FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

NEW YORK ACADEMY OF SCIENCES 1818
PER MARIA PER TERRAS

Library

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

5.06 (45.1)

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME TRENTESIMOOTTAVO

1902-903

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1903

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR Principi.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 25 GENNAIO 1903.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'OVIDIO (Enrico), Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino; Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, ecc., Uffiz. ❋, Comm. ☒.

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 1° aprile 1889.

VICE-PRESIDENTE

PEYRON (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ❋, Uffiz. ☒.

15 Gennaio 1863 - 18 gennaio 1863. — Pensionato 28 novembre 1869.

Tesoriere

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Uff. ✠.

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale e della Società Zoologica di Londra.

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), *predetto.*

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano a. r. e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Gr. Uffiz. ⊛; Comm. ✻, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

25 Giugno 1871 - 27 luglio 1871. — Pensionato 1° maggio 1879.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✻, ⊛.

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia Gioenia

di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc. ecc., ✻, Comm. ☒.

11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della Regia Università di Torino, ☒.

15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto*.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ☒.

10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* " del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo ☒.

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), *predetto*.

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Comm. ☒.

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze Naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica

nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Presidente della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin. und Naturwissenschaften,* Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., ✠, ✂.

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, ✠.

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale e Rettore della R. Università di Torino, ✠.

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896.

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia della R. Università di Torino, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, ecc.

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina e Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di scienze naturali di Mosca, della Società Veneto Trentina, ecc., ✠.

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Morera (Giacinto), Ingegnere, Dottore in matematiche, Professore ordinario di meccanica razionale, ed incaricato di meccanica superiore nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Professore onorario della R. Università di Genova, ⊕.

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido), Professore ordinario di elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Museo Industriale Italiano in Torino. Comm. ⊕.

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⊕, ⊜.

3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stockolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti

di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ☙, Comm. ❋; ✠.

16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Uff. ❋, Comm. ☙.

11 Giugno 1876 - 11 luglio 1876. — Pensionato 3 giugno 1884.

Cremona (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Presidente della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edimburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi, di Svezia e di Copenaghen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Dublino, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'Insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Fisico-medica di Erlangen, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze, Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, e dell'Accademia Americana di Boston, Socio Corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), dell'Imperiale Accademia di Vienna, delle Reali Accademie di Berlino, del Belgio e di Lisbona, e dell'Accademia Pontaniana in Napoli, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo,

Dottore (D. Sc.) delle Università di Dublino e di Christiania, Professore emerito nell' Università di Bologna, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Cord. ⊞, Cav. e Cons. ⊞.

1° Dicembre 1889 - 15 dicembre 1889.

Volterra (Vito), Dottore in Fisica e Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Professore di Fisica matematica e di Meccanica celeste nella R. Università di Roma, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro titolare corrispondente della Società di scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ⊞.

3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei, e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ❋, ⊞.

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano, ❋, ⊞.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei

e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente della R. Società delle Scienze di Gottinga, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Membro straniero della *London mathematical Society,* Dottore onorario dell'Università di Christiania, Uff. ✻, Cav. ▭, ⊕.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina,* Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-Mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-Fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-Chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-Chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New York, Socio onorario della *Royal microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Cav. ⊕, Cav. ▭, Comm. ✻.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

ACCADEMICI STRANIERI

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow.

31 Dicembre 1882 - 1° febbraio 1883.

Gegenbaur (Carlo), Professore nell'Università di Heidelberg.

31 Dicembre 1882 - 1° febbraio 1883.

Koelliker (Alberto von), Professore nell'Università di Würzburg.

11 Giugno 1893 . 25 giugno 1893.

Klein (Felice). Professore nell'Università di Gottinga.

10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena.

13 Febbraio 1998 - 24 febbraio 1898.

Berthelot (Marcellino), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto, Parigi.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Stokes (Giorgio Gabriele), Professore nell'Università di Cambridge (Inghilterra).

14 Gennaio 1900 - 28 gennaio 1900.

CORRISPONDENTI

SEZIONE
DI MATEMATICHE PURE

TARDY (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova . . . . . *Firenze*
16 Luglio 1864.

CANTOR (Maurizio), Professore nell'Università di . . . . . *Heidelberg*
25 Giugno 1876.

SCHWARZ (Ermanno A.), Professore nella Università di . . . . . *Berlino*
19 Dicembre 1880.

BERTINI (Eugenio), Professore nella Regia Università di . . . . . *Pisa*
9 Marzo 1890.

DARBOUX (G. Gastone), dell'Istituto di Francia *Parigi*
9 Marzo 1890.

POINCARÉ (G. Enrico), dell'Istituto di Francia *Parigi*
15 Maggio 1892.

NOETHER (Massimiliano), Professore nell'Università di . . . . . *Erlangen*
3 Dicembre 1893.

JORDAN (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . . *Parigi*
12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a . *Stoccolma*
12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*
10 Gennaio 1897.

Cesàro (Ernesto), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*
17 Aprile 1898.

Castelnuovo (Guido), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*
17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Professore nella Regia Università di . . . . . *Padova*
17 Aprile 1898.

SEZIONE

DI MATEMATICHE APPLICATE, ASTRONOMIA E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Tacchini (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . . . . *Roma*
14 Dicembre 1884.

Fasella (Felice) . . . . . *Torino*
14 Dicembre 1884.

Zeuner (Gustavo), Prof. nel Politecnico di *Dresda*
3 Dicembre 1893.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di . . . . . *Cambridge*
27 Maggio 1894.

Lorenzoni (Giuseppe), Professore nella Regia Università di . . . . . *Padova*
3 Febbraio 1895.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di . . . . . *Milano*
12 Gennaio 1896.

Helmert (F. Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia . . . . . *Potsdam*
12 Gennaio 1896.

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in . *Roma*
10 Gennaio 1897.

SEZIONE

DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Roma*
30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in . . . . . *Charlottenburg*
2 Gennaio 1881.

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*
12 Marzo 1882.

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . *Firenze*
12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Bologna*
14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia *Parigi*
15 Maggio 1892.

RAYLEIGH (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella " *Royal Institution* " di . . . . *Londra*
3 Febbraio 1895.

THOMSON (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di . . . . . *Cambridge*
12 Gennaio 1896.

BOLTZMANN (Luigi), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*
12 Gennaio 1896.

MASCART (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . *Parigi*
10 Gennaio 1897.

PACINOTTI (Antonio), Professore nella Regia Università di . . . . . *Pisa*
17 Aprile 1898.

LANGLEY (Samuel Pierpont), Segretario delle *Smithsonian Institution* di . . . . . *Washington*
11 Febbraio 1900.

SEZIONE

DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

PATERNÒ (Emanuele), Professore di Chimica applicata nella R. Università di . . . . . *Roma*
2 Gennaio 1881.

KÖRNER (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*
2 Gennaio 1881.

BAEYER (Adolfo von), Professore nell'Università di . . . . . *Monaco* (Baviera)
25 Gennaio 1885.

WILLIAMSON (Alessandro Guglielmo), della R. Società di . . . . . *Londra*
25 Gennaio 1885.

THOMSEN (Giulio), Professore nell'Università di . . . . . *Copenhagen*
25 Gennaio 1885.

LIEBEN (Adolfo), Professore nell'Università di *Vienna*
15 Maggio 1892.

MENDELEJEFF (Demetrio), Professore nell'Università di. . . . . *Pietroburgo*
3 Dicembre 1893.

HOFF (Giacomo Enrico van't), Professore nell'Università di. . . . . *Berlino*
27 Maggio 1894.

FISCHER (Emilio), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*
24 Gennaio 1897.

RAMSAY (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . *Londra*
24 Gennaio 1897.

SCHIFF (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in *Firenze*
28 Gennaio 1900.

MOISSAN (Enrico), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di . . . *Parigi*
28 Gennaio 1900.

SEZIONE

DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di . . . . . *Roma*
30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Università di . . . . . *Heidelberg*
25 Giugno 1876.

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di . . . . . *Lipsia*
16 Gennaio 1881.

Capellini (Giovanni), Professore nella Regia Università di . . . . . *Bologna*
12 Marzo 1882.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*
8 Febbraio 1885.

Klein (Carlo), Professore nell'Università di *Berlino*
15 Marzo 1892.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica . . . . . *Londra*
3 Dicembre 1893.

Fouqué (Ferdinando Andrea), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto . . *Parigi*
3 Febbraio 1895.

Gemmellaro (Gaetano Giorgio), Professore nella R. Università di . . . . . *Palermo*
13 Febbraio 1898.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di . . . . . *Monaco*
13 Febbraio 1898.

Taramelli (Torquato), Professore nella R. Università di . . . . . *Pavia*
28 Gennaio 1900.

Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di . . . . . *Gottinga*
28 Gennaio 1900.

SEZIONE

DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in *Milano*
16 Gennaio 1881.

Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . . *Padova*
8 Febbraio 1885.

Hooker (Giuseppe Dalton), Direttore del Giardino Reale di Kew . . . . . *Londra*
8 Febbraio 1885.

Delpino (Federico), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*
22 Febbraio 1885.

Pirotta (Romualdo), Professore nella Regia Università di . . . . . *Roma*
15 Maggio 1892.

Strasburger (Edoardo), Professore nell'Università di . . . . . *Bonn*
3 Dicembre 1893.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di *Monaco*
13 Febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di *Genova*
13 Febbraio 1898.

Schwendener (Simone), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*
13 Febbraio 1898.

SEZIONE

DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

Philippi (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chili)
24 Luglio 1842.

Sclater (Filippo Lutley), Segretario della Società Zoologica di . . . . . *Londra*
25 Gennaio 1885.

Fatio (Vittore), Dottore . . . . . *Ginevra*
25 Gennaio 1885.

Locard (Arnould), dell' Accademia delle Scienze di . . . . . *Lione*
23 Giugno 1889.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di . . . . . *Parigi*
1° Dicembre 1889.

Foster (Michele), Professore nell' Università di . . . . . *Cambridge*
1° Dicembre 1889.

WALDEYER (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*
1° Dicembre 1889.

GUENTHER (Alberto) . . . . . *Londra*
3 Dicembre 1893.

FLOWER (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale . . . . . *Londra*
27 Maggio 1894.

ROUX (Guglielmo), Professore nella Università di . . . . . *Monaco* (Baviera)
13 Febbraio 1898.

MINOT (Carlo Sedgwick), Prof. nell'" Harvard Medical School " di . . . . . *Boston Mass.* (S. U. A.)
28 Gennaio 1900.

BOULENGER (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di . . . . . *Londra*
28 Gennaio 1900.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia dell'arte militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio Corrispondente straniero onorario della Società Nazionale degli Antiquarii della Francia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, ✻, ⊞.

18 Maggio 1879 - 5 giugno 1879. — Pensionato 27 gennaio 1890.

Segretario

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino; Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente della R. Deputazione veneta di Storia patria di quella per le Marche e di quella per l'Umbria, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, dell'Ateneo veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✻, ⊞.

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron (Bernardino), *predetto.*

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ⊕.

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ❋ e ⊕, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta.

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi Piemontesi e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Membro del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Vice-Presidente della Commissione araldica per il Piemonte, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e della Società Accademica d'Aosta, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della nuova Società per la Storia di Sicilia e della Società di Storia e di Archeologia di Ginevra, Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanza, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia ecc., Comm. ❋, ⊕.

30 Giugno 1878 - 18 luglio 1878. — Pensionato 24 giugno 1888.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ❋, ⊕.

18 Maggio 1879 - 5 giugno 1879. — Pensionato 25 ottobre 1889

Ferrero (Ermanno), *predetto.*

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione ✻, Comm. ⊞.

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, ecc., Uffiz. ✻ e ⊞.

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Membro del Consiglio degli archivi, Consigliere degli Ordini dei SS. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✻ e ⊞, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo.

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di

Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz. ⊞.

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Membro della Commissione per la Statistica giudiziaria e della Commissione per la riforma del Codice di procedura penale, Socio Corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), ed effettivo dell'Istituto di Diritto internazionale, Socio Onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. ⊞ e dell'Ordine di S. Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica francese, Uff. ❋.

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 18 aprile 1901.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio Onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Uff. ❋, Comm. ⊞.

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Renier (Rodolfo), *predetto.*

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore nel Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario della Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ❋, ⊞.

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Chironi (Dott. Giampietro), Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio

corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione.

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda e della Società Siciliana per la storia patria.

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Bibliotecario di S. M. il Re d'Italia, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Gr. Cord. della Corona d'Italia, Uffiz. ✠ e Cav. e Cons. ⊕, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc.

7 Giugno 1857 - 12 giugno 1857.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore emerito, Primo Presidente della Corte di Cassazione di Firenze, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere del Contenzioso Diplomatico e dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Comm. ✠, e Gr. Croce ▭, Cav. ⊕, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

29 Giugno 1873 - 19 luglio 1873.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia di Baviera, Socio Straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. On. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. On. in Filosofia dell'Università di Budapest. Professore emerito della R. Università di Pisa, Gr. Uffiz. ❋ e ▭, Cav. ⊕, Cav. del Merito di Prussia, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Uff. ❋, Comm. ▭, Cav. ⊕.

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e di quella di Napoli, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et belles lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo

di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto e della R. Accademia di Lucca, Cav. ⛨, Gr. Uff. ✻, Comm. ⛁.

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Insignito della Cittadinanza milanese, Socio nazionale della R. Accad. dei Lincei, della Società Reale di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero dell' Istituto di Francia e della Società Reale svedese di Scienze e Lettere in Gotemburgo, Accademico della Crusca, Membro d'onore dell'Accademia delle Scienze di Vienna, Membro corrispondente delle Accademie delle Scienze di Belgrado, Berlino, Budapest, Copenaga, Pietroburgo, della Società orientale americana, degli Atenei di Venezia e Brescia, dell'Accademia d'Udine, dell'I. R. Società Agraria di Gorizia, Socio onorario delle Accademie delle Scienze d'Irlanda e di Rumania, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Minerva di Trieste, della Società asiatica italiana, della R. Accademia di Belle Arti e del Circolo filologico di Milano, della Lega nazionale per l'unità di cultura tra i Rumeni e dell'Associazione Americana per le lingue moderne; Dottore in filosofia per diploma d'onore dell'Università di Wirzburgo, Professore emerito di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano; Cav. dell'Ord. Civile di Savoia, Gr. Cord. ⛁, Comm. della Legion d'Onore, ecc.

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università di Berlino.

3 Gennaio 1861 - 16 gennaio 1861.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell' " *École des Chartes* ", Parigi.

4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Paris (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

3 Marzo 1889 - 15 marzo 1889.

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Lipsia.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino.

3 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia.

31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

CORRISPONDENTI

SEZIONE

DI SCIENZE FILOSOFICHE

Bonatelli (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . . *Padova*
15 Febbraio 1882.

Pinloche (Augusto), Professore nel Liceo Carlomagno di . . . . . *Parigi*
15 Marzo 1896.

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi Superiori pratici e di perfezionamento di *Firenze*
15 Marzo 1896.

Cantoni (Carlo), Professore nella R. Università di . . . . . *Pavia*
15 Marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*
15 Marzo 1896.

SEZIONE

DI SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno . *Vicenza*
5 Aprile 1881.

Rodriguez de Berlanga (Manuel) . . . *Malaga*
17 Giugno 1883.

Schupfer (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . . . *Roma*
14 Marzo 1886.

Gabba (Carlo Francesco), Professore nella R. Università di . . . . . *Pisa*
3 Marzo 1889.

Buonamici (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . . *Pisa*
16 Marzo 1890.

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia *Parigi*
26 Febbraio 1893.

SEZIONE

DI SCIENZE STORICHE

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . *Cherasco*
15 Dicembre 1853.

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . . *Londra*
14 Marzo 1886.

Chevalier (Canonico Ulisse) . . . . . *Romans*
26 Febbraio 1893.

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in. . . . . *Roma*
28 Aprile 1895.

Bryce (Giacomo) . . . . . *Londra*
15 Marzo 1896.

Patetta (Federico), Professore nella R. Università di . . . . . *Siena*
15 Marzo 1896.

SEZIONE

DI ARCHEOLOGIA

PALMA di CESNOLA (Conte Luigi), Direttore del Museo Metropolitano di Arti a . . . . *New-York*
2 Gennaio 1876.

LATTES (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . . *Milano*
14 Marzo 1886.

POGGI (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a . . . . . *Savona*
2 Gennaio 1887.

PLEYTE (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . . *Leida*
2 Gennaio 1887.

PALMA DI CESNOLA (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquarii di Londra . . . *Firenze*
3 Marzo 1889.

MOWAT (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia . . . . . *Parigi*
16 Marzo 1890.

NADAILLAC (Marchese I. F. Alberto de) . *Parigi*
16 Marzo 1890.

BRIZIO (Eduardo), Professore nell'Università di . . . . . *Bologna*
26 Febbraio 1893.

BARNABEI (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano . . . . . *Roma*
28 Aprile 1895.

GATTI (Giuseppe) . . . . . *Roma*
15 Marzo 1896.

SEZIONE

DI GEOGRAFIA ED ETNOGRAFIA

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*
17 Giugno 1883.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*
28 Aprile 1895.

SEZIONE

DI LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE

Krehl (Ludolfo), Professore nell'Università di . . . . . *Dresda*
25 Giugno 1857.

Sourindro Mohun Tagore . . . . . *Calcutta*
18 Gennaio 1880.

Weber (Alberto), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*
20 Marzo 1881.

Kerbaker (Michele), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*
17 Giugno 1883.

Marre (Aristide) . . . . . *Vaucresson* (Francia)
1° Febbraio 1885.

Oppert (Giulio), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*
3 Marzo 1889.

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*
3 Marzo 1889.

Amelineau (Emilio), Professore nella " *École des Hautes Études* „ di . . . . . *Parigi*
28 Aprile 1895.

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di . . . . . *Bonn*
28 Aprile 1895.

SEZIONE

DI FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA

Bréal (Michele), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*
1° Febbraio 1895.

Nigra (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia a . . . . . *Vienna*
14 Marzo 1886.

Rajna (Pio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . *Firenze*
14 Marzo 1886.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . . . . *Firenze*
16 Marzo 1890.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 17 Novembre 1901 al 25 Gennaio 1903.

ELEZIONI

SOCI

Morera (Giacinto). Eletto Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 9 febbraio 1902 e approvata l'elezione con R. Decreto del 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido). Id. Id.

D'Ovidio (Enrico). Rassegna le dimissioni da Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

D'Ovidio (Enrico). Eletto alla carica triennale di Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi Unite del 14 dicembre 1902 a complemento del triennio principiato dal compianto Socio A. Cossa e approvata l'elezione con R. Decreto 21 dicembre 1902.

Camerano (Lorenzo). Eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 25 gennaio 1903 della Classe stessa a complemento del triennio principiato dal Socio E. D'Ovidio, e approvato con R. Decreto 1° febbraio 1903.

MORTI

4 Agosto 1900.

Perrens (Francesco), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze storiche).

22 Novembre 1901.

Kovalewski (Alessandro), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

12 Aprile 1901.

Cornu (Maria Alfredo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

20 Luglio 1902.

Felici (Riccardo), Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

5 Settembre 1902.

Virchow (Rodolfo), Socio straniero della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

21-22 Settembre 1902.

Damour (Agostino Alessio), Socio Corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Geologia, Mineralogia e Paleontologia).

27 Settembre 1902.

Reymond (Gian Giacomo), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali storiche e filologiche.

23 Ottobre 1902.

Cossa (Alfonso), Socio residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Presidente dell'Accademia.

6 Dicembre 1902.

Wislicenus (Giovanni), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

23 Gennaio 1903

Rendu (Eugenio), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze filosofiche).

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio; quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 15 Giugno al 16 Novembre 1902.

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-Physikalische Klasse. N. F., Bd. II, No. 3. Berlin, 1902; 4°.

* **Abhandlungen** der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. XIV Bd., 1902; 8°.

* **Académie** R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Annuaire, 1902; 8°. — Biographie Nationale, T. XVI, 2e fasc.; 8°. — Bulletin de la Classe des Sciences, 1901; 1902, Nos. 1-5; 8°. — Mémoires, T. 54e, 1r et 4e fasc.; 4°. — Mémoires Couronnés et Mémoires des Savants étrangers, T. 59e, 1r et 2e fasc.; 4°. — Mémoires Couronnés et autres Mémoires, T. 56e, 61e; 8°. Bruxelles, 1900-1902.

* **American** Chemical Journal. Vol. XXVI, Nos. 4-6; XXVII, 1-3. Baltimore, 1901-1902; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).

* **American** Journal of Mathem. Vol. XXIV, N. 1. Baltimore, 1902; 4°.

* **Analele** Academiei Romane. Ser. II, T. XXIII (1900-1901). Memoriile Secțiunii scientifice.

Actività sciintifică a luĭ Jon Ghica. Discursuri de receptiune de C. I. Istrati; cu rĕspuns de D. A. Sturdza. Bucureşci, 1901; 4°.

* **Anales** de la Sociedad Científica Argentina. Entrega 6a, t. LIII; 1, 2, LIV. Buenos Aires, 1902; 8°.

* **Anales** del Museo Nacional de Montevideo. T. IV, 1a parte. 1902; 4°.

* **Annales** de la Société géologique de Belgique. T. XXIX, 2e et 3e livr. Liège, 1901-1902; 4°.

* **Annales** de la Société d'Agriculture, Sciences et Industrie de Lyon. 7e série, t. VII-VIII (1899-1900). Lyon, 1901; 8°.

* **Annales** de la Société Linnéenne de Lyon. Nouvelle série, t. 47e et 48e. Lyon, 1901; 8°.

* **Annales** de l'Université de Lyon: N. S.; I. Sciences, Médecine, fasc. 8, 9. Lyon-Paris, 1902; 8°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de Marseille. T. XII. Paris, 1902; 4°.

* **Annales** des Mines. 10me série, t. I, 4e livr.; II, 7e. Paris, 1902; 8°.

* **Annales** de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathém. et les sciences physiques. 2me Série, T. IV, 1r, 2me fasc., 1902. Paris; 4°.

Annals of the R. Observatory, Edinburgh. Vol. 1. Glasgow, 1902; 4°.

Annuaire statistique de la ville de Buenos-Ayres. XIe année, 1901. Buenos-Ayres, 1901; 8° (*dalla Direzione generale di Statistica municipale*).

* **Archives** du Musée Teyler, série II, vol. VIII, 1e partie. Haarlem, 1902; 8°.

* **Archives** Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences à Haarlem. Sér. II, t. VII, 2e et 5e livrs. La Haye, 1902; 8°.

* **Archives** (Nouvelles) du Museum d'histoire naturelle. 4me série, t. III, 2e fasc.; IV, 1r fasc. Paris, 1901, 1902; 4°.

* **Atti** della R. Accademia economico-agraria dei Georgofili di Firenze, 4a serie, vol. XXV, disp. 2a, 1902; 8°.

* **Atti** della Società Italiana di scienze naturali, vol. XLI, fasc. 2°, 3°. Milano, 1902; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Rendiconto dell'Adunanza solenne del 1° giugno 1902; 4°.

* **Atti** dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Anno LV, sess. IV-VII, 1902. Roma; 4°.

* **Bergens** Museum Aarbog 1902, Afhandlinger og Aarsberetning. Bergen, 1902; 8°.

* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathologie. II Bd., 7 bis 12; III, 1-3 Heft. Braunschweig, 1902; 8°.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. Julho-Dezembro de 1901. Rio de Janeiro, 1902; 8° (*dal Ministerio da Indus., Viagão e Obras Publicas*).

* **Bollettino** del R. Comitato Geologico d'Italia. Anno 1902. N. 2. Roma; 8°.

* **Buletinul** Societatii de Sciinte din Bucuresci-Romania. Anul XI. No. 3, 4. Bucuresci, 1902; 8°.

* **Bulletin** de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. 2e Série, T. II, fasc. 4; VI, fasc. 2, 3. Bruxelles, 1902; 8°.

* **Bulletin** of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XL, No. 2, 3; XLI, 1. Cambridge Mass., 1902; 8°.

Bulletin of the Chicago Academy of Sciences. Vol. II, n. 3, 4, part I. 1900; 8°.

* **Bulletin** of the Lloyd Library of Botany, Pharmacy and materia medica. Farmacy Ser. No. 1; Mycological Ser. No. 2, 9. Cincinnati, Ohio, 1902; 8°.

Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Cordoba. T. XVII, entr. 1a. Buenos Aires, 1902; 8°.

* **Bulletin** international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Nos. 6, 7, 1902; 8°.

* **Bulletin** of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. XI, Art. 11; XII, Art. 1. Granville, O., 1902; 8°.

* **Bulletin** of the American Mathematical Society. 2nd Ser., vol. VIII, No. 10; IX, 1, 2. Lancaster, Pa., and New York, 1902; 8°.

* **Bulletin** of the University of Kansas. Science bulletin. Vol. I, Nos. 1-4. Lawrance, Kan., 1902; 8°.

* **Bulletin** de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. Ann. 1902. Nos. 1, 2. Moscou, 1902; 4°.

* **Bulletin** de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France. 2me Sér., T. II, 1r trimestre 1902. Nantes; 8°.

* **Bulletin** de la Société Neuchâteloise des sciences naturelles. T. XXVII (1898-1899). Neuchâtel, 1899; 8°.

* **Bulletin** de la Société Géologique de France. 4e série, T. I, N. 5 (1901); II, N. 1 (1902). Paris, 1902; 8°.

* **Bulletin** de la Société Mathématique de France. T. XXX, fasc. 2. Paris, 1902; 8°.

Bulletin de la Société Philom. de Paris. 9e Série, T. IV, N. 2. 1901-1902; 8°.

* **Bulletin** de la Société Scientifique et Médicale de l'Ouest. T. XI, Nos. 1, 2. Rennes, 1902; 8°.

* **Bulletin** du Muséum d'histoire naturelle. Année 1901, Nos. 7, 8; 1902, Nos. 1-4. Paris, 1902; 8°.

* **Cartes** tectoniques des environs de Moutier, de Bellelay (Jura bernois) par L. Rollier. 1900; 2 f.i (*dalla " Commission géolog. Suisse „*).

Centralbureau der internationalen Erdmessung. N. F. der Veröffentlichungen, No. 6.

* **Česká Akademie císaře Františka Josefa** pro vědy, Slovesnost a Umění. III. Bulletin international. Résumé des travaux présentés. VIe année. Sciences mathématiques et naturelles; Médecine, 1901; 8°.
Rozpravy. Třída II (Mathematiko-Přírodnická). Ročnik, X (1901); 8°.
Věstník. Ročnik, X. Číslo 1-9. 1901. Praze; 8°.

* **Denkschriften** des medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena; vol. IX, 1 Lief. Testo e tav. Jena, 1902; 4°.

Erläuterungen zur geologischen Karte der Lägernkette in 1 : 25.000 von F. Mühlberg. Bern, 1902; testo in-8° e 1 c. in-f° (*dalla " Commission géolog. Suisse „*).

* **Field Columbian** Museum. Anthropological Ser., Vol. III, No. 2; Geological Series, Vol. I, Nos. 9, 10. Report Ser., Vol. II, No. 1. Chicago, U. S. A., 1900-1901; 8°.

** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1901, Bd. LVII. 2, 3. Abth. Braunschweig, 1902; 8°.

* **Geological** Literature added to the Geological Society's Library during the Year ended December 31st. 1901. London, 1902; 8°.

* **Geological** Survey of Canada. Catalogue of Canadian plants. Part VII. — Lichenes and Hepaticae by J. Macoun. Ottawa, 1902; 8°.

Geology (The) and Mineral Resources of the Copper River Districts, Alaska by F. C. Schrader and A. C. Spencer. Washington, 1901; 4° (*dal Department of the Interior U. S. Geological Survey*).

* **Giornale** della R. Accad. di Medicina. A. LXV, n. 6-9. Torino, 1902; 8°.

* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. 31. Jahrg. 1900. Heft 1, 2. Berlin, 1902; 8°.

* **Jahresbericht** der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg für 1900. 1901; 8°.

* **Jahreshefte** des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. 58 Jahrgang. Stuttgart, 1902; 8°.

* **Jenaische** Zeitschrift für Naturwissenschaft. herausg. von der medizinisch-naturwiss. Gesellschaft zu Jena; Bd. XXIX, Heft 3. u. 4; XXX, 1. Jena, 1902; 8°.

Informes presentados a la Secretaria de Fomento por el Director del Observatorio astronomico nacional sobre los trabajos del Establecimiento desde Julio de 1899 hasta Diciembre de 1901. Mexico, 1902; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. Vol. LXX, Part II, Natural science, No. 2 (1901); LXXI, No. 1 (1902). Calcutta; 8°.

* **Journal** of the Chemical Society. Vols. 81 and 82; August-November 1902. London; 8°.

* **Journal** of the Linnean Society. Botany, Vol. XXVI, Nos. 179, 180; XXXV, No. 245. Zoology, vol. XXVIII, No. 185. London, 1902; 8°.

* **Journal** of the R. Microscopical Society, 1902, part 4, 5. London; 8°.

* **Journal** de l'École Polytechnique: IIe série, 7e cahier. Paris, 1902; 4°.

* **Journal** of the College of sciences, Imp. University of Tōkiō, Japan. Vol. XIII, part 3^a^ (1900); XVI, part 2^a^, art. 6°; XVII, p. 2^a^, 3^a^, art. 7-9. Tōkiō, 1902; 8°.

* **List** of the Fellows and honorary, foreign, and corresponding Members and Medallist of the Zoological Society of London. London, 1902; 8°.

* **Matériaux** pour la Carte géologique de la Suisse. N. S. XIIIe livr. Étude géologique de la Côte-aux-Fées et des environs de St-Croix et Baulmes, avec 1 c. au 1 : 25.000 par Th. Rittener. Berne, 1902; 4° (*dalla " Commission géolog. Suisse "*).

* **Mémoires** de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 6e série, t. I. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde, juin 1900 – mai 1901. Bordeaux, 1901; 8°.

* **Mémoires** de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tom. 34, fasc. 2, 1902; 4°.

* **Mémoires** de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Sciences et Lettres. 3e Sér., T. VI. Paris, Lyon, 1901; 8°.

* **Mémoires** de la Société zoologique de France pour l'année 1901. T. XIV. Paris; 8°.

* **Mémoires** (Nouveaux) de la Société Helvétique des sciences naturelles. Vol. 38me. Zürich, 1901; 4°.

* **Memoirs** of the National Academy of Sciences, Vol. VIII [Sixth Memoir]. Washington, 1902; 4°.

* **Memoirs** of the Museum of Comparative Zoology at Harward College. Vol. XXXVII, No. 1. Cambridge U. S. A., 1902; 4°.

* **Memorias** y Revista de la Sociedad Científica " Antonio Alzate ". T. XIII, Nos. 3 y 4; T. XVI, Nos. 2-6. Mexico, 1901; 8°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. XIX, fasc. 8°. Milano, 1902; 4°.

* **Memorie** della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Ser. II, vol. XII, parte 2ª; Ser. III, vol. III. Modena, 1901-1902; 4°.

* **Memorie** descrittive della carta geologica d'Italia. Vol. XI. 1902; 8° (*dal R. Ufficio Geologico*).

* **Mittheilungen** der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1901. Nr. 1500-1518. Bern, 1902; 8°.

* **Mittheilungen** aus der medicinischen Facultät der Kaisr.-Japanischen Universität zu Tōkiō. Bd. V, No. 4. Tōkiō, 1902; 4°.

* **Monthly Notices** of the Royal Astronomical Society. Vol. LXII, No. 8, 9, London, 1902; 8°.

* **Nachrichten** von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physik. Klasse. 1901. Heft 4, 5. Göttingen, 1902; 8°.

* **Natuurkundig** Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië Uitgegeven door de konink. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indié. Deel LXI. Tiende Serie, Deel V. Batavia, 1902; 8°.

Observations made at the Royal magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. XXIII (1900). Batavia, 1900; f° (*dono del Government of Netherlands India*).

* **Occasional Papers** of the California Academy of Sciences. VIII. San Francisco, 1901; 8°.

** **Palaeontographica.** Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit. Bd. 42. Stuttgart, 1895.

Peabody Institute, of the city of Baltimore. Thirty-fifth Annual Report. June 1, 1902. Baltimore; 8°.

* **Proceedings** of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXVII, Nos. 15-22. Boston, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the Asiatic Society of Bengal. Nos. IX-X, XI (Extra No); I-V (1902). Calcutta; 8°.

* **Proceedings** of the Cambridge Philosophical Society; Vol. XI, Part 6ª. Cambridge, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the Linnean Society of London; 114th Session, From November 1901 to June 1902. London, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the Royal Physical Society. Session 1900-1901. Part 4ª. Edinburgh, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the R. Society. No. 463-468. London, 1902; 8°.

Proceedings of the Royal Institution of Great Britain. Vol. XVI, Part III, n. 95. London, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the Zoological Society of London for the year 1902. Vol. I, Part 2ª; II, P. 1ª and Index 1891-1900. London; 8°.

* **Proceedings** of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1900, Vol. LIII, Part III (1901). Philadelphia, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XLI, No. 168. Philadelphia, 1902; 8°.

* **Proceedings** of the California Academy of Sciences. 3. Ser., Botany Vol. II, Nos. 3-9; Zoology II, Nos. 7-11; III, Nos. 1-4. San Francisco, 1901-1902; 8°.

* **Procès-Verbaux** des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. An. 1900-1901. Paris, 1902; 8°.

** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. IV Bd., Lief. 2. u. 3. Leipzig, 1902; 8°.

Publicationen für die Internationale Erdmessung. Die Astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. k. und k. militär-geographischen Institutes in Wien, XVIII Bd. Wien, 1902; 4°.

* **Pubblicazioni** della Specola Vaticana. Vol. VI. Torino, 1902; 4°.

* **Quarterly** Journal of the Geological Society. Vol. LVIII, Part 3. No. 231. London, 1902; 8°.

* **Rapport** annuel de la Commission Géologique du Canada. N. S., Vol. XI (1898). Texte et Cartes. Ottawa, 1900-1901; 8°.

Reconnaisance in the Cape Nome and Norton Bay Regions, Alaska, in 1900 by A. H. Brooks, G. B. Richardson, A. J. Collier and W. C. Mendenhall. Washington, 1901; 4° (*dal Department of the Interior U. S. Geological Survey*).

* **Recueil** d'études paléontologiques sur la Faune Crétacique du Portugal. Vol. I. Espèces nouvelles ou peu connues par P. Choffat. Lisbonne, 1901-1902; 4° (*dalla Commission du service géologique du Portugal*).

* **Rendiconti** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Serie II. Vol. XXXV, fasc. 14-16. Milano, 1902; 8°.

* **Rendiconti** del Circolo Matematico di Palermo. Tom. XVI, fasc. 3-5. Palermo, 1902; 8°.

* **Rendiconto** dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Série 3ª, vol. VIII, fasc. 6° e 7°. Napoli, 1902; 8°.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey showing the progress of the Work from July 1, 1899, to June 30, 1900. Washington, 1901; 4°.

* **Report** (Annual) of the Board of Regents of the Smithsonian Institution .....for the year ending June 30, 1900. Report of the U. S. National Museum. Washington, 1902; 8°.

Report (Twenty-first Annual) of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior 1899-1900. Ch. D. Walcott Director. Parts 5 and 7. Washington, 1899; 2 vol. e Atl. 4°.

Report of the Librarian of Congress for the fiscal year ending June 30, 1901. Washington, 1901; 8°.

* **Royal Society**. Reports to the Malaria Committee. Seventh Series. London, 1902; 8°.

* **Sitzungsberichte** der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1 Mai 1902, N. XXIII; 31 Juli 1902, N. XL. Berlin; 8°.

* **Sitzungsberichte** der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 33 Heft, 1902; 8°.

* **Sitzungsberichte** der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1902. Heft 2; 8°.

* **Smithsonian Institution.**

Smithsonian Contributions to Knowledge. 1309. Washington, 1901; 4°.

* **Transactions** of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XIX, Part 2ª. Cambridge, 1900; 8°.

* **Transactions** of the American Mathematical Society. Vol. 3°, No. 3, 4. October, 1902. Lancaster, Pa., and New York; 4°.

* **Transactions** of the Linnean Society of London. 2nd Ser. Botany, vol. VI, p. 2, 3. 2nd Ser. Zoology, vol. VIII, p. 5-8. London, 1901-902; 4°.

* **Transactions** of the Zoological Society of London. Vol. XVI, Part 6ª, 7ª. 1902; 4°.

Transactions of the Manchester Geological Society. Vol. XXVII, Part X-XVI, 1901-1902: 8°.

* **Travaux** et **Mémoires** du Bureau international des Poids et Mesures. T. XII. Paris, 1902; 4°.

Tufts College Studies, No. 7 (Scientific Series). Tufts College, Mass., 1902; 8°.

* **University of California.**

Agricultural experiment Station, E. W. Ihlgard Director, Bulletin, Nos. 131-139. Berkeley, 1901-1902; 8°.

Agricul. exper. Station. Nature-Study bulletins. Berkeley, 1900; 8°.

Annual Report of the Secretary to the Board of Regents of the Univ. of California, for the year ending June 30, 1900. Sacramento, 1901; 8°.

Bulletin of the Department of Geology. Vol. II, Nos. 8-12. Berkeley, 1900; 8°.

The University Chronich, an official Record; Vol. IV. Nos. 1-6. Berkeley, 1899; 8°.

Univ. of California. Bulletins. Issued Quarterly. N. S. Vol. II. Nos. 4; III, 1. Berkeley, 1900; 8°.

** **Verhandlungen** der deutschen physikalischen Gesellschaft im Jahre 1902, Jahrg. 4, N. 12-13. Berlin; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. geologischen Reichsanstalt Bericht. N. 7-10, 1902. Wien; 8°.

** **Verhandlungen** der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 49, 50 Bd., 1899, 1900; 8°.

* **Verhandlungen** der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 52 Bd., 6-8 Heft, 1902; 8°.

Veröffentlichung des K. preussischen geodätischen Institutes. N. F., No. 8, 9. Berlin, 1902; 8°.

* **Vjestnik** kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Godina IV. Svezak 4. Zagreb, 1902; 8°.

* Журналъ русскаго физико-химическаго Общества при Императорскомъ. С. Петербургскомъ Университетѣ. Т. XXXIV, n. 5, 6. 1902; 8°.

* *Dalla R. Biblioteca dell' Università di Erlangen:*

Agricola (H.). Die thermoelektromotorische Kraft des Quecksilbers und einiger sehr verdünnter Amalgame in ihrer Abhängigkeit von Druck und Temperatur. Leipzig, 1902; 8°.

Bauer (W.). Ueber die Entschwefelung von aryldithiocarbaminsauren Ammoniaksalzen. Bamberg, 1902; 8°.

Bauereisen (A.). Die Nabelschnurrestbehandlung des Neugebornen. Weissenburg a. S., 1901; 8°.

Becker (G.). Zur Kenntniss der sesquioxyd- und titanhaltigen Augite. Erlangen, 1902; 8°.

Behnke (A.). Studien über die Entwickelung der Mundwerkzeuge der Hymenopteren. Berlin; 8°.

Beucker (H.). Cystennieren einer Missgeburt. Erlangen, 1902; 8°.

Berdel (E.). Beitrag zur Kenntnis der Legierungen. Erlangen, 1902; 4°.

Berg (E. v.). Ueber Phosphate des Rubidiums und Caesiums. Erlangen, 1901; 8°.

Beyer (A.). Untersuchuugen über Umlagerungen an der Nordseeküste in besonderen an und auf der Insel Sylt. Halle a. S., 1901; 8°.

Böck (F.). Ueber die Funtionsfähigkeit nach Oberarmluxtionen. Metz, 1902; 8°.

Brücher (M.). Der Schichtenaufbau des Müsener Bergbaudistriktes; die daselbst auftretenden Gänge und die Beziehungen derselben zu den wichtigsten Gesteinen und Schichtenstörungen. München, 1901; 8°.

Brügel (P.). Ein Fall von Pyaemie im Anschluss an einen subphrenischen Abszess bei chronischer Cholelithiasis. Braunschweig, 1902; 8°.

Cohn (G.). Vergleichend-anatomische Untersuchungen von Blatt und Achse einiger Genistern-Gattungen aus der Subtribus der Crotalarieen Bentham-Hooker. Capel, 1901; 8°.

Constantinides (J.). Klinische Beiträge zur Kenntnis der Dystrophia musculorum progressiva. Erlangen, 1902; 8°.

Dencks (E.). Zur Kenntnis der γ-Diketone Erlangen, 1902; 8°.

Doering (P.). Ueber die angoborene Haarlosigkeit des Menschen (Alopecia congenita). Erlangen, 1901; 8°.

Döring (T.). Der Einfluss des Kobalthydroxyds auf die Einwirkung der Halogene auf Kalilauge. Erlangen, 1902; 8°.

Dorn (J.). Ueber die Bildung der Knochenabscesse. Würzburg, 1901; 8°.

Eckert (A.). Untersuchung verschiedener Käsesorten auf Schweinerotlaufbakterien. Erlangen, 1902; 8°.

Enslin (E.). Ein Beitrag zur Kasuistik der Darm-Invaginationen infolge von Darmtumoren. Nürnberg, 1902; 8°.

Euler (H.). Ueber den Verlauf der Magenverdauung unter verschiedenen physikalischen Einflüssen. Erlangen, 1902; 8°.

Fried (O.). Ein Fall von primärem Sarkom des Meckelschen Divertikels. Bamberg, 1902; 8°.

Frischmann (K. H A.). Spontanfraktur bei Osteomyelitis suppurativa. Erlangen, 1901; 8°.

Fuchs (R. F.). Zur Physiologie und Wachstumsmechanik des Blutgefäss-Systemes. Jena, 1902; 8°.

Glanz (G. A.). Ueber medico-mechanische Nachbehandlung Unfallverletzter. Erlangen, 1901; 8°.

Glatzel (B.). Quantitative Untersuchungen über Absorption und Reflexion im Ultraviolett. Burg, 1901; 8°.

Görte (O.). I. Ueber das Vorkommen von Cholin und Betainen in Goffeïn

und Theobromin enthaltenden Pflanzenteilen. II. Ueber das Vorkommen von Cholin in einigen essbaren Pilzen. Erlangen, 1902; 8°.

Graf (G.). Ueber Additionsprodukte Schiffscher Basen und über Dimethylnaphtosafranin. Erlangen, 1902; 8°.

Gutbier (A.). Studien über das Tellur. Leipzig, 1901; 8°.

Hackel (W.). Die Bauchnaht. Nürnberg, 1901; 8°.

Hagen (W.). Ein Fall von traumatischer-Erkrankung des unteren Rückenmarksabschnittes mit besonderer Berüchsichtigung der Lokalisation des Reflexcentrums für die Blase. Erlangen, 1901; 8°.

Hamaji (W.). Ein Fall von doppelseitiger progressiver totaler Ophtalmoplegie. Erlangen, 1902; 8°.

Hardt (W.). Spektroskopisches Verhalten und elektrische Leitfähigkeit des Kobaltchlorids in verschiedenen Lösungsmitteln. Braunschweig, 1901; 8°.

Hart (C.). Ein Beitrag zur Struma suffocatoria. Erlangen, 1901; 8°.

Hayashi (T.). Vergleichende Blutdruckmessungen an Gesunden und Kranken mit den Apparaten von Gärtner, Riva-Rocci und Frey. Erlangen, 1901; 8°.

Hehl (N.). Ueber die Dimensionen der Gebilde an der Kathode. Erlangen, 1901; 8°.

Henrich (F.). Ueber die negative Natur ungesättigter Radikale. Erlangen, 1900; 8°.

Holm (R.). Ueber einen Fall geheilter Invagination. Bochum, 1902; 8°.

Holzmann (H.). Ueber die Isomerieerscheinung bei den Thiosemicarbaziden. Erlangen, 1902; 8°.

Hubaleck (M.). Die Einwirkung von Amidosulfonsäure auf Pseudocumidin und Piperidin. Neuwied, 1901; 8°.

Hühner (P.). Vergleichende Untersuchungen über die Blatt- und Achsenstructur einiger Australischer Podalyrieen-Gattungen. Cassel, 1901; 8°.

Hundt (P.). Ueber Adnexerkrankungen bei Uterusmyomen. Erlangen; 8°.

Kluge (A.). Statistische Untersuchungen über die Häufigkeit von Fällen tötlich verlaufender Gallensteinerkrankung vor und nach Einführung der Gallensteinoperation. Erlangen, 1901; 8°.

Knoesel (C.). Die Einwirkung einiger Antiseptika (Calciumhydroxyd, Natriumarsenit und Phenol) auf alkoholische Gärung. Jena, 1902; 8°.

Kohler (G.). Die künstliche Deformation des Schädels. Erlangen, 1901; 8°.

Korczyński (A. v.). Studien über Isatin. Krakau, 1902; 8°.

Krauss (H.). Vergleichende Untersuchungen über die Wirkungen der einfachsten Fett- und aromatischen Säuren, ihre Substitutionsproducte und Ester. Erlaugen, 1901; 8°.

Krell (H.). Ueber die Einwirkung von Halogenalkylen auf die Alkalisalze der Amidophenole und Amidobenzolsulfosäuren. Erlangen, 1901; 8°.

Lasker (E.). Ueber Reihen auf der Convergenzgrenze. London, 1900; 4°.

Matsuura (S.). Ueber ausgedehnte Resektion der langen Röhrenknochen wegen maligner Geschwulst. Erlangen, 1902; 8°.

Medicus (F.). Ueber hysterische Lähmungen der oberen Extremität. Erlangen, 1902; 8°.

Meixner (E.). Ein Beitrag zur Kenntnis der Raupenhaar-Ophthalmie. Lichtenfels, 1901; 8°.

Model (R.). Der primäre Krebs der Gallenblase. Erlangen, 1901; 8°.

Moeller (E.). I. Ueber Derivate der o-Nitrobenzyl-o-aminozimmtsäure. II. Ueber Umlagerungsprodukte der o-p-Azobenzoldikarbonsäure. Erlangen, 1902; 8°.

Paasch (P.). Ein Beitrag zur Kasuistik über klonische Accessoriuskrämpfe. Erlangen, 1901; 8°.

Pauselius (K.). Das Aneurysma popliteum. Nürnberg, 1901; 8°.

Phol (W.). Ueber o-Nitrobenzyl-p-amidobenzoesäure und ihre Derivate. Erlangen, 1901; 8°.

Pilgram (H. J.). Die Schaarschaar der Kegelschnitte, die ein gegebenes Tangenten-Dreieck haben. Remscheid, 1902; 8°.

Plitt (W.). Weiter Mitteilungen über den queren Fundalschnitt. Nürnberg, 1900; 8°.

Prenger (A.). Systematisch-anatomische Untersuchungen von Blatt und Achse bei den Podalyrieen-Gattungen der nördlichen Hemisphäre und des Kapgebietes, sowie bei den vier australischen Podalyrieen-Gattungen Brachysema, Oxylobium, Chorizema und Mirbelia. Erlangen, 1901; 8°.

Radicke (P.). Schützt das Emphysem vor Erkrankung an Lungentuberkulose? Erlangen, 1902; 8°.

Reiger (R.). Innere Reibung plastischer und fester Körper. Braunschweig, 1901; 8°.

Richter (J.). Vergleichende Untersuchungen über den mikroskopischen Bau der Lymphdrüsen von Pferd, Rind, Schwein, und Hund. Bonn, 1902; 8°.

Rigaud (M.). Ueber β-substituierte N-Methyl-Pyridone und Dimethyl-N-Methyl-Chinolon. Erlangen, 1902; 8°.

Rhodius (O.). Ueber die Einwirkung von salpetriger Säure auf Resorcinmonomethyläther. Bamberg, 1902; 8°.

Rose (J. A.). Beiträge zur Kenntniss der Borsäure und über eine direkte gewichtsanalytische Bestimmung derselben. Bonn a. Rh., 1902; 8°.

Sakamoto (J.). Ueber zwei Fälle von Weil'scher Krankheit. Erlangen, 1902; 8°.

Sammet (P.). Die in der Sammlung des mineralogisch-geologischen Instituts der Universität Erlangen enthaltenen Silicate. Erlangen, 1901; 8°.

Scharff (P.). Beiträge zur Frage der Ernährung des Neugebornen in den ersten Lebenstagen. Erlangen, 1901; 8°.

Schmidt (W.). Untersuchungen über die Blatt- und Samenstruktur bei den Loteen. Jena, 1902; 8°.

Schneider (S.). Zur Kenntnis der Isodithiobiazolone. Erlangen, 1902; 8°.

Schroeder (A.). Anatomische Untersuchung des Blattes und der Axe bei den Liparieae und Bossiaeae. Cassel, 1902; 8°.

Schuh (H.). Zur Diagnose und Pathologie der Perikarditis. Nürnberg, 1901; 8°.

Schulze (W.). Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Genisteengattungen Genista, Adenocarpus und Calycotome. Chemnitz, 1901; 8°.

Senft (O.). Die Metallspielwarenindustrie und der Spielwarenhandel von Nürnberg und Fürth. Erlangen, 1901; 8°.

Spitta (A.). Zur Kenntnis des Diphenylisodithiobiazolon. Erlangen, 1902; 8°.

Stelzner (K.). Ueber den Dampfdruck fester Körper. Braunschweig, 1901; 8°.

Stoess (L.). Ein Fall von Cysticercus racemosus des Gehirns. Erlangen, 1901; 8°.

Thiele (W.). Ueber einen Fall von Gliom und Sarkom des Rückenmarks mit Höhlenbildung und sekundären Strängdegenerationen. Leipzig, 1902; 8°.

Tsuchida (U.). Ein Fall von diffuser Sklerodermie mit ungewöhnlich starker Pigmentierung der Haut und Schleimhäute (Morbus Addison?). Erlangen, 1902; 8°.

Ulmer (T.). Ueber die Produkte der Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Thioharnstoffe. Erlangen, 1901; 8°.

Walter (A.). Ringsynthetische Versuche in der Carbazid-Reihe. Sulbach i. O., 1901; 8°.

Werner (J.). Statistischer Beitrag zur Therapie der Unterschenkelsarkome. Köln, 1901; 8°.

Werner (M.). Drei Fälle von primärem Nierensarkom. Erlangen, 1901; 8°.

Westrum (W.). Klinische Beiträge zur Kenntnis der Syringomyelie. Erlangen, 1901; 8°.

Winkler (F.). Beiträge zur vergliechenden Anatomie der Gattungen Crotalaria und Prioritropis. Bromberg, 1901; 8°.

Yukawa (G.). Untersuchungen über den Fusssohlentrichreflex in der grossen Zehe (Rabinski'scher Reflex) bei Gesunden und Kranken. Erlangen, 1902; 8°.

Zahn (H.). Ueber Protoplasmagifte. Erlangen, 1901; 8°.

* ***Dall' Università di Giessen:***

Anna (A.). Ein Fall von Tumor cerebri ohne Stauungspapille. Giessen, 1902; 8°.

Bartels (E.). Cysticercus fasciolaris. Anatomie, Beiträge zur Entwicklung und Umwandlung in Taenia crassicollis. Jena, 1902; 8°.

Becker (A.). Ueber den Zusammenhang von Katarakt und Struma. Giessen, 1902; 8°.

Behr (F. G. v.). Einfluss von Zusätzen auf die Hydrolyse von Natriumphenolatlösungen bei der Siedetemperatur. Giessen, 1902; 8°.

Bischoff (A.). Beitrag zur Frage der Gastrostomie. Giessen, 1901; 8°.

Blum (D.). Zur Casuistik der Geschwulstbildungen der Conjunctiva mit besonderer Berücksichtigung der Neubildungen in der Carunkelgegend. Giessen, 1902; 8°.

Brand (K.). Ueber die elektrochemische Reduktion von Ketonen. Giessen, 1901; 8°.

Brauckmann (F.). Zur Casuistik der Behandlung der Kniescheibenbrüche mittelst Naht. Giessen, 1902; 8°.

Brühl (A.). Zur Casuistik der Ectropium-Operationen. Giessen, 1901; 8°.

Causé (F.). Zur Casuistik des intermittierenden Exophthalmus und der varikösen Venenerweiterungen in der Umgebung des Auges. Giessen, 1902; 8°.

Curschmann (F.). Bietet der quere Fundalschnitt bei der Sectio caesarea (G. Fritsch) gegenüber dem Längsschnitt durch dei Corpuswand Vorteile? Berlin, 1902; 8°.

Dilger (W.). Uterus bicornis septus cum Vagina septa. Wiesbaden, 1902; 8°.

Dillmann (H.). Ueber Leukoplakia linguae mit besonderer Berücksichtigung ihrer Histologie und Aetiologie. Berlin, 1902; 8°.

Eichler (A.). Ein Fall von einem Cancroid der Orbita beim Pferde und statistiche Zusammenstellung von Carcinomen bei Pferden. Jena, 1901; 8°.

Faller (E.). Ueber die Totalinkrustation der Pferdeleber. Giessen, 1902; 8°.

Flath (H.). Ein Fall von doppelseitiger Mucocele des Siebbeinlabyrinths. Giessen, 1902; 8°.

Fuhrmann (M.). Analyse des Vorstellungsmaterials bei epileptischem Schwachsinn. Berlin, 1902; 8°.

Gminder (H.). Versuche zur Darstellung nitrierter Thioharnstoffe. Giessen, 1901; 8°.

Grips (W.). Ueber einen pyogenen Mikroorganismus des Schweines. Hannover; 8°.

Hansen (A.). Die Entwicklung der Botanik seit Linné. Giessen, 1902; 4°.

Heinsberger (P.). Zur Casuistik der retrobulbären Neuritis optica auf hereditärer Grundlage. Giessen, 1902; 8°.

Helwig (O.). Ueber einen Fall von Osteogenesis imperfecta. Giessen, 1902; 8°.

Hill (T.). Ueber Residuen des Dotterganges in der Darmwand. Giessen, 1901; 8°.

Hobstetter (K.). Die Hufknorpelfistel des Pferdes und ihre Behandlung. Berlin, 1901; 8°.

Hommel (W.). Ueber die quantitative Trennung von Wolfram und Molybdän. Zürich, 1902; 8°.

Hubert (R.). Ueber Ovarialgeschwülste bei Kindern. Giessen, 1901; 8°.

Kölle (H.). Ein Fall von Lidgangrän nach Scharlach mit Conjunctivitis diphtheritica. Giessen, 1902; 8°.

Krautstrunk (T.). Beiträge zur Entwickelung der Keimblätter von Lacerta agilis. Wiesbaden, 1901; 8°.

Krombach (C.). Beitrag zur Frage der Ovariotomie in der Schwangerschaft. Giessen, 1902; 8°.

Kutscher (F.). Ein Fall von subcutaner totaler Ruptur der Arteria poplitea. Strassburg, 1902; 8°.

Linkenheld (F.). Zur Casuistik der Geschwülste der Schädeldecken. Giessen, 1902; 8°.

Logemann (F.). Ein Beitrag zu den Missbildungen der Ureters. Giessen, 1902; 8°.

Mehring (W.). Versuche zur elektrochemischen Oxydation organischer Stoffe. Giessen, 1902; 8°.

Meyer (J. A.). Ueber Zerfallsvorgänge an ovarialeiern von Lacerta agilis. Wiesbaden, 1901; 8°.

Nieberle (C.). Ueber die Nierenpapillennekrose bei Hydronephrose. Giessen, 1901; 8°.

Ohly (O.). Beitrag zur Lehre der tragfähigen Amputationsstümpfe. Giessen, 1902; 8°.

Ostermann (A.). Ueber die Sonderstellung der Chloride in dem Verhalten der roten Blutköperchen gegen Salzlösungen. Giessen, 1901; 8°.

Pullmann (W.). Beitrag zur Casuistik der Elephantiasis Penis. Giessen, 1902; 8°.

Rixen (P.). Bietet der quere Fundalschnitt bei der Sectio caesarea gegenüber dem Längsschnitt durch die Corpuswand Vorteile? Jüchen, 1902; 8°.

Rüther (A.). Ueber die mit dem Behring'schen Diphtherie-Heilserum in der chirurgischen Klinik in Giessen in der Zeit vom 1. I. 1897 bis 31. XII. 1901 erzielten Erfolge. Giessen, 1902; 8°.

Rüther (R.). Davainea mutabilis. Hannover, 1901; 8°.

Schmidt (E.). Beitrag zur Behandlung der chronischen Empyeme. Giessen, 1902; 8°.

Schopp (L.). Zur Casuistik der primären Sarkome der Ileocoecalgegend. Giessen, 1901; 8°.

Schultz (C.). Zur Casuistik der Endocarditis und Insufficienz der Pulmonalarterienklappen. Giessen, 1902; 8°.

Schulz (P.). Verhalten von Salzen in Aceton. Giessen, 1901; 8°.

Schumacher (G.). Ueber die elektrochemische Reduktion der Nitroanissäure. Giessen, 1902; 8°.

Siegler (C.). Beiträge zur puerperalen Statistik. Material aus den Jahren 1872-1900 aus der Entbindungsanstalt zu Fulda. Giessen, 1902; 8°.

Spiegelhoff (J. H.). Beitrag zur Lehre von der Conjunctivitis blennorrhoica. Giessen, 1902; 8°.

Terbrüggen (W.). Ueber die eitrigen Mittelohrentzündungen im Kindesalter. Giessen, 1902; 8°.

Treiber (G.). Ueber den Wert der Mischnarkosen. Giessen, 1902; 8°.

Ubbels (D. G.). Vergleichende Untersuchungen von mütterlichem Blute, fötalem Blute und Fruchtwasser. Utrecht, 1901; 8°.

Ulmer (O.). Ueber einen Fall von schnellendem Finger. Giessen, 1902; 8°.

Vichausen (M.). Ueber einen Fall von cholaemischer Blutung in die Gallenblase. Giessen, 1901; 8°.

Volhard (F.). Ueber das fettspaltende Ferment des Magens. Berlin, 1901; 8°.

Wagner (E.). Zur Casuistik der Perforation des Oesophagus durch Fremdkörper und konsekutiver Lungengangrän. Giessen, 1902; 8°.

Weber (O.). Casuistische Beiträge zur Hysterie im Kindesalter. Grünberg, 1902; 8°.

Wohlfahart (Th.). Ueber einige Benzidine. Giessen, 1902; 8°.

Wolff (W.). Die Bewegungen des Duodenums, nebst Bemerkungen über einzelne Bewegungsformen des Dünndarms Ueberhaupt. Giessen, 1902; 8°.

Zehrlaut (H.). Die Maximalstromdichten bei der Reduction aromatischer Nitrokörper in alkalischer und saurer Lösung. Mainz, 1901; 8°.

Zohlen (O.). Ueber die Einwirkung von Dimethylsulfat auf Michlersches Keton und Auramin. Giessen, 1902; 8°.

* *Dalla " Grossh. Technischen Hochschule zu Karlsruhe " :*

Bragstad (O. S.). Theorie des rotierenden Feldes mit Anwendung auf die Bestimmung des Stromdiagrammes der asynchronen Maschinen. Stuttgart, 1902; 8°.

Brunner (K.). Die Entwicklung des Schulwesens in den badischen Markgrafschaften (1453-1803). Karlsruhe, 1902; 8°.

Eitner (P.). Untersuchungen über die Explosionsgrenzen brennbarer Gase und Dämpfe. München, 1902; 8°.

Fridericiana. Programma für das Studienjahr 1902-1903. Karlsruhe, 1902; 8°.

Fünfzigjähriges Regierungs-Jubiläum seiner k. Hoheit des Grossherzoges Friedrich. Karlsruhe, 1902; 8°.

Haid (M.). Die modernen Ziele der Erdmessung. Karlsruhe, 1901; 8°.

Heymann (S.). Ueber die Xylylnitrophenylketone. Karlsruhe, 1900; 8°.

Kačer (F.). I. Ueber die Einwirkung von Knallquecksilber und Aluminiumchlorid auf Toluol, o- m- und p-Xylol und auf Mesitylen. II. Ueber die Einwirkung von Knallquecksilber auf Phenol. Karlsruhe, 1901; 8°.

Kriemler (C. J.). Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. Karlsruhe, 1902; 4°.

Muth (F.). Untersuchungen über die Einwickelung der Inflorescenz und der Blüthen, sowie über die angewachsenen Achselsprosse von Symphytum officinale. München, 1902; 8°.

Schleuning (W.). Velia in Lucanien. Berlin, 1902; 4°.

Wöhler (L.). Die pseudokatalytische Sauerstoffaktivierung des Platins. Karlsruhe, 1901; 8°.

* ***Dalla Biblioteca dell'Università di Upsala:***

Andersson (J. G.). Ueber die Stratigraphie und Tektonik der Bären Insel. Upsala, 1901; 8°.

Bjerke (K. R.). Ueber die Veränderung der Refraktion und Sehschärfe nach Entfernung der Linse. Leipzig, 1902; 8°.

Ekman (V. W.). Om jordrotationens inverkan på vindströmmar i hafvet. Kristiania, 1902; 8°.

Grönberg (G.). Die Ontogenese eines niedern Säugergehirns nach Untersuchungen an Erinaceus europaeus. Jena, 1901; 8°.

Göransson (E.). Om periodiska lösningar till lineära differentialekvationer. Upsala, 1901; 4°.

Rinman (E. L.). Om triazol-, bistriazol- och tritriazolföreningar. Upsala, 1902; 8°.

Rudberg (T. A.). Några bidrag till kännedomen om vätskornas emission och reflexion. Upsala, 1902; 8°.

Zachrisson (L. J. F.). Experimentella studier öfver den intravenösa och subkutana saltvatteninfusionens värde vid akut anämi. Upsala, 1902; 8°.

Abbe (C.). The physical basis of long-range Weather Forecasts; 4° (*dalla "Johns Hopkins University", Baltimore*).

Abderhalden (E.). Ueber den Einfluss des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes. München, 1902; 8°.

— Das Verhalten des Hämoglobins während der Säuglingsperiode. Strassburg, 1902; 8°.

— Weitere Beiträge zur Frage nach der Einwirkung des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes. München, 1902; 8° (*dall'A.*).

* **Afzelius** (H.). Erik Benzelius D. A. En kyrkohistorisk lefnadsbild Från Sveriges Storhetstidehavarf. II. Stockholm, 1902; 8° (*dalla* " *K. Universitets-Biblioteket* „. *Upsala*).

Backhouse (T. W.). Publications of West Hendon House Observatory, Sunderland. Sunderland, 1902; 4° (*dall'A.*).

** **Bastian** (H. C.). Ueber Aphasie und andere Sprachstörungen. Leipzig, 1902; 8°.

** **Bellini** (C.). Trattato elementare teorico pratico di ragioneria generale. Milano, 1901; 8°.

** **Beltrami** (E.). Opere matematiche. T. 1°. Milano, 1902; 4°.

Bigelow (F.). Line integral in the atmosphere; 4° (" *Johns Hopkins University* „, *Baltimore*).

Bjerknes (V.). The Dynamic principle of circulatory moviments in the Atmosphere; 4°.

— The circulatory moviments in the Atmosphere; 4° (*Id.*).

Cavazzutti (E. M.). Projet d'organisation du mouvement scientifique universel en anglais, espagnol, français, allemand, italien. Buenos Aires, 1902; 8° (*dall'A.*).

Celoria (G.). Il concetto del mondo nell'astronomia moderna. Roma, 1902; 4° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Ceresole (G.). Di un caso di ossificazione completa del pericardio di un'anitra domestica. Padova, 1899; 8°.

— Gli erbaggi del mercato di Padova in rapporto alla diffusione delle malattie infettive e parassitarie. Padova, 1900; 8°.

— Esame batteriologico dell'acqua dei " Tonfi „ sul monte Frontal in comune di Crespano Veneto. Padova, 1900; 8°.

— Difendiamoci dall'*Anchylostoma duodenale*! Venezia, 1900; 8°.

— Un caso di ascessi splenici multipli nella capra prodotti dal *Bacterium coli communis*. Milano, 1900; 8°.

— Analisi batteriologica dell'acqua di " S. Gottardo „, salso-bromo-iodica-solforosa. Padova, 1901; 8° (*dall'A.*).

Gramme (Z.). Les hypothèses scientifiques. Paris, 1902; 8° (*dalla vedova A. Gramme*).

** **Gross** (Th.). Robert Mayer und Hermann v. Helmholtz. Eine kritische studie. Berlin, 1898; 8°.

** — Kritische Beiträge zur Energetik. II H. v. Helmholtz und die Erhaltung der Energie. Berlin, 1902; 8°.

Haasemann (L.). Der Pendelapparat für relative Schweremessungen der deutschen Südpolarexpedition. Charlottenburg, 1902; 4° (*dall'A.*).

Heeres (J. E.). Rumphius Gedenkbock (1702-1902). Haarlem, 1902; f° (*Id.*).

In Memoria di Giuseppe Gibelli (1831-1838). Genova, 1902; 4° (*dono del Socio Mattirolo*).

Macchiati (L.). Sulla fotosintesi fuori dell'organismo e sul suo prodotto. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*).

Mc Adie (A. G.). Fog Studies on Mount Tamalpais; 4°.

— Photographs of fog billows; 4° (*dalla* " *Johns Hopkins University* „, *Baltimore*).

Mac Donald (A.). A plan for the Study of Man. Washington, 1902; 8° (*dall'A.*).

** **Meyer** (A. B.) and **Wiglesworth** (L. W.). The Birds of Celebes and the neighbouring Islands. Berlin, 1898; 2 vol. 4°.

** **Ostwald** (W.). Lehrbuch der allgemeinen Chemie. II Bd., II Liefg. Zweite umgearb. Aufl. Leipzig, 1902; 8°.

Petraroja (L.). Sulla struttura e sullo sviluppo del rene. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae opus..... conditum, nunc continuatum D.re G. Beck de Mannagetta. Tom. 22. Decas 30. Lipsiae et Gerae; 4°.

** **Reichenow** (Ant.). Die Vögel Afrikas. II. Bd., I. Hälfte, Dritter Halbband. Neudamm, 1903; 8°.

Ricciardi (L.). La coltivazione del tabacco indigeno. Napoli, 1902; 8°.

— Sulla genesi delle bombe quarzose e delle lave vulcaniche. Napoli, 1902; 8°.

— Dalle rocce acide alle basiche e loro classificazioni. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*).

Righi (A.). Sui fenomeni acustici dei condensatori. Bologna, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Ronna (A.). Léonard de Vinci, peintre-ingénieur-hydraulicien. Paris, 1902; 8° (*dall'A.*).

Saint-Lager. Histoire de l'Abrotonum. — Signification de la désinence *ex* de quelques noms de Plantes. Paris, 1900; 8°.

— La perfidie des Synonymes dévoilée à propos d'un Astragale. Lyon, 1901; 8° (*Id.*).

Sars (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. IV. Copepoda Calanoida. Part VII-X, Centropagidae, Diaptomidae, Temoridae, Metridiidae, Heterohabdidae. Bergen, 1902; 8° (*dal Museo di Bergen, Norvegia*).

Schlagdenhauffen (F.). Titre et publications scientifiques.

— Nouvelles recherches sur les eaux de Nancy. Nancy, 1882; 8°.

— Recherches sur la présence du manganèse dans les végétaux. Nancy, 1885; 8°.

— Sur quelques plantes toxiques des Légumineuses, et un nouveau poison du cœur provenant du genre Coronilla. Nancy, 1902; 8° (*dall'A.*).

— et **Braun**. Étude comparative des réactifs indicateurs employés dans les titrages alcalimétriques. Paris, 1901; 8°.

— — Emploi des réactifs indicateurs pour la détermination de la capacité de saturation des acides gras. Paris, 1901; 8°.

— — Sur la solubilité relative de l'iode dans l'iodure de potassium, le chloroforme, le sulfure de carbone, l'éther, la benzine, l'éther de pétrole, l'essence de térébenthine et l'alcool amylique. Strassburg, 1901; 8° (*dal sig. Schlagdenhauffen*).

— (**Freyss** und). Ueber den allgemeinen Fortschritt der Fransen in dünnen Quarz- und Kalkspathplatten, welche unter einem beliebigen Winkel mit optischen Axe zugeschnitten sind. 1857; 8° (*Id.*).

Schlagdenhauffen et **Garnier**. Sur l'analyse de quelques terrains des Vosges. Nancy, 1882; 8°.
— — Empoisonnement par l'acide sulfurique de commerce. 1884; 8°.
— — Intoxication par un extrait d'opium. Affaire instruite contre X..... pharmacien inculpé d'homicide par imprudence. Paris, 1901; 8° (*Id.*).
— (E. **Heckel** et). Nouvelles recherches chimiques et physiologiques sur le M' Boundou. Paris, 1880; 8°.
— — Des Kolas africains au point de vue botanique, chimique et térapeutique. Paris, 1884; 8°.
— — Du Doundaké et de son écorce dite " Quinquina africain ". Paris, 1886; 8° (*dal sig. Schlagdenhauffen*).
— et (E. **Heckel** et). Sur la galle de l'" Acacia spirorbis " Labill. Bordeaux, 1887; 8°.
— — Note sur un faux Kola. Paris, 1887; 8°.
— — Du café du Soudan fourni par le fruit alimentaire du Houlle (Parkia biglobosa, Benth.) dans l'Afrique équatoriale. Paris, 1887; 8°.
— — Nouvelles recherches sur le vrai et sur un faux Jéquirity. Genève, 1887; 4°.
— — Sur le Bakis (Tinospora Bakier Miers) et le Sangol (Cocculus Leaeba G.-P. et Rich.) du Senegal et du Soudan. Lille, 1895; 8°.
— — Sur les Psathura des îles de la Réunion et sur le P. Angustifolia J. de Cordemoy en tant que plantes aromatiques et exitantes. Paris, 1900; 8°.
— — Sur la Copaifera Salikounda Heckel, de l'Afrique tropicale et sur ses graines à Coumarine (Salikounda des peuples Sousous) au point de vue botanique et chimique, comparaison avec la Fève de Tonka; 4° (*Id.*).
— et L. **Planchon**. Sur un Strophanthus du Congo français. Marseille, 1897; 8°.
— — Nouveau procédé de destruction des matières organiques applicables aux recherches toxicologiques. Paris, 1898; 8°.
— — Sur une cause d'erreur dans le dosage de l'iode dans les tissus et glandes de l'organisme. Paris, 1900; 8°.
— — Contribution à l'étude des composés glycérinés des acides phosphorique et arsénique. Paris, 1901; 8°.
— — Contribution à l'étude du dosage de iode dans l'organisme. Paris, 1901; 8°.
— — Sur la genèse des glycéro-arséniates et leur emploi thérapique. Nancy, 1902; 8°.
— — Sur l'étude comparée des glycérophosphates et des glycéroarséniates; 8° (*Id.*).
— et E. **Reeb**. Note sur la solubilité des arséniates et arsénites de fer. Strassburg, 1888; 8°.
— — Fleurs de Pyrètre; leur principe toxique. Strassburg, 1890; 8°.
— — Faits pour servir à l'étude chimique et physiologique de l'Artichaut (Cinara Scolymus L.). Strassburg, 1894; 8°.
— — Contribution à l'étude du genre Coronilla au point de vue botanique, chimique, physiologique et thérapeutique. Strassburg, 1899; 8°. (*Id.*).

Schlagdenhauffen et E. **Reeb**. Contribution à l'étude chimique et physiologique du genre Érysimum. Mulhouse, 1900; 8°.

— — Note sur un glucoside nouveau extrait des graines d'Érysimum de la famille des Crucifères. Paris, 1900; 4°.

— — Sur un cas supposé d'empoisonnement par l'acide cyanhydrique. Mulhouse, 1901; 8°.

— — Note sur le Fenugrec et son emploi dans la thérapeutique vétérinaire. Paris, 1902; 8°.

— — Contribution à l'étude du genre Linaria au point de vue botanique et chimique. Mulhouse, 1902; 8°

— — Du rôle de la Lécithine dans les plantes. Nancy, 1902; 8°.

— — Sur la présence de la Lécithine dans les végétaux. Paris, 1902; 4° (*dal sig. Schlagdenhauffen*).

Stiattesi (R.). Bollettino Sismografico dell'Osservatorio di Quarto-Castello (Firenze). Mugello, 1902; 8° (*dall'A.*).

Veronese (G.). Les postulats de la géometrie dans l'enseignement. Paris; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Vinci** (Leonardo da). Il codice Atlantico; fasc. 27°. Milano, 1902; f°.

** **Weierstrass** (K.). Mathematische Werke. 4. Bd. Berlin, 1902; 4°.

Dal 22 Giugno al 23 Novembre 1902.

* **Abhandlungen** der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Historisch-Philologische Klasse. N. F., Bd. V, No. 4. Berlin, 1902; 4°.

* **Academiei Romane**. Acte și documente relative la istoria renascerei României. Vol. IX (1857-1858).

Analele Ser. II: T. XXIII (1900-1901). Memoriile Secțiunii istorice. XXIII, Memoriile Sect. literare. XXIV (1901-1902) Partea administrativă și desbaterile; 4°.

Istoria romana de Titus Livius traducere începută de N. Barbu continuată de Nd. Locusteana și I. S. Petrescu; 8°.

Memoriu despre Starea Moldovei la 1787 de Comitele D'Hauterive; 8°.

Monumentele epigrafice și Sculpturali ale Musevlvi National de antichitati din Bucuresci ecc. de Gr. G. Tocilescv. Part. 1; 4°.

Operele principeluĭ Dimitre Cantemir. T. VIII; 8°. Bucuresci, 1901-1902.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Bd. XLVII, Lfg. 231. Leipzig, 1902; 8°.

* **American** Journal of Philology. Vol. XXII, Nos. 2-3. Baltimore, 1902; 8° (*dall'Università John Hopkins di Baltimora*).

* **Analecta** Bollandiana. T. XXI, fasc. 2°. Bruxelles, 1902; 8°.

* **Annales** de la Faculté des Lettres de Bordeaux et des Universités du Midi. 4me série. Bulletin italien, T. II, N. 3. Revue des études anciennes. T. IV, N. 3. Bordeaux, 1902; 8°.

* **Annales** du Musée Guimet. Revue de l'Histoire des religions. T. XXX, 1ère et 2me partie. Nos. 1, 2. Paris, 1902; 8°.

* **Annales** du Midi. Revue de la France méridionale fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. XIVe année, N. 54. Toulouse, 1902; 8°.

* **Annali** della R. Scuola Normale superiore di Pisa. Filosofia e Filologia. Vol. XV. Pisa, 1902; 9°.

Annali di Statistica. Atti della Commissione per la statistica giudiziaria e notarile. Sessione del giugno 1901. Roma, 1902; 8° (*dalla Direzione generale della Statistica*).

— — Notizie sulle condizioni industriali della provincia di Livorno. 2ª ed. Roma, 1902; 8°.

Annali di Statistica. — Statistica industriale. Fasc. 64. L'industria del cotone in Italia. Roma, 1902; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

Annuario Accademico della R. Università degli studî di Siena per l'anno 1901-1902; 8°.

* **Atti** della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Serie V, vol. IX. Notizie degli Scavi; fasc. 4-8. Roma, 1902; 4°.

* **Atti** della I. R. Accademia di Scienze, lettere ed arti degli Agiati in Rovereto. Ser. III, vol. 8°, fasc. 2°, An. 1902. Rovereto; 8°.

* **Atti** del Municipio di Torino. An. 1900. Vol. I, II. Torino, 1902; 4°.

* **Atti** del R. Istituto Veneto di Scienze, Lett. ed Arti. T. LXI, disp. 7ª-10ª. Venezia, 1902; 8°.

** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Bd. IX, Liefg. 3-5; X, 1, 2. Supplementband, Liefg. 3-5. Leipzig, 1902; 4°.

* **Bibliotheca** Indica: A Collection of Oriental Works published by the Asiatic Society of Bengal. New ser., Nos. 1005-1014. Calcutta, 1902; 8°.

** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXIX. 1902. Trimestre secundum. Lipsiae; 8°.

* **Bibliothèque** Méridionale. 1e Série. Tom. VII. Le Troubadour Bertrand d'Alamanon par J.-J. Salvedra de Grave. Toulouse, 1902; 8° (*Faculté des Lettres de l'Université de Toulouse*).

* **Boletin** de la Real Academia de la Historia. T. XLI, cuad. 1-5. Madrid, 1902; 8°.

* **Bollettino** della Società Pavese di Storia patria. Anno II, fasc. 3, 4. Pavia, 1902; 8°.

* **Bollettino** della Società Umbra di Storia Patria. Anno VIII, fasc. 2°, 3°. Perugia, 1902; 8°.

* **Bulletin** international de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie. N. 6, 7. 1902; 8°.

* **Bulletin** de la Société des Hautes-Alpes. 21e ann., 3e série. No. 2. Gap, 1902; 8°.

* **Bulletin** historique du Diocèse de Lyon. 3e An., No. 17, 18. Lyon, 1902; 8°.

Bulletin de l'Institut International de Statistique. T. XII, 2me et dern. livrs. Rome, 1902; 8°.

* **Bullettino** dell'Istituto di Diritto Romano. Anno XIV (1901), fasc. 2-4. Roma, 1902; 8°.

Calendar 2561-62 (1901-1902). The Kyōto Imp. University. Kyōto, 1902; 8°.

Campagne del Principe Eugenio di Savoia. Vol. XVIII, XIX, XX e Atl. Torino, 1901-1902 (*dono di* S. M. il Re d'Italia).

* **Česká Akademie Císaře Františka Josefa** pro vědy, slovesnost a umění. Almanach. Ročnik XII (1902); 8°.

Archiv pro lexikografii a dialektologii. Číslo 3. (1901).

Historický Archiv. Číslo 21 (1901); 8°.

Rozpravy. Třída I (Pro vědy filosofické, právní a historické) (1901); 8°.

Spisy J. A. Komenského. Číslo 4 (1901); 8°.

Fr. Bartoš. Národní písně moravské v nově nasbírané (1901); 8°.

E. Ott. Soustavný úvod ve studium nového řízenl soudniho. Dil III (1901); 8°.

A. Pavlíček. Chek ve vědě a v zákonodárstvi (1902); 8°. Praze.

Comercio exterior y Movimento de Navegación de la República Oriental del Uruguay, etc. Montevideo, 1900; 8° (*dalla Dirección de Estadística General*).

** **Consulente** legale (Il mio). Manuale teorico-pratico per la propria difesa. 5ª ediz. Milano; 8°.

** **Dictionnaire** des sciences philosophiques par une Société de professeurs et de savants sous la direction de Mr Ad. Franck. 3me tirage. Paris, 1885; 8°.

* **Eranos**. Acta philologica Suecana. Edenda curavit Vilelmus Lundström. Vol. IV, fasc. 3-4, 1900-1902. Upsaliae; 8°.

* **Giornale** storico e letter. della Liguria. An. III, fasc. 5-7. Spezia, 1902; 8°.

* **Göteborgs** k. Vetenskaps-och Witterhets Samhälles Handlingar. Fjärde följden, IV. Göteborgs, 1902; 8°.

* **Journal** of the Asiatic Society of Bengal. History, Literat., etc. Vol. LXX, Part I, No. 2; Extra Nos. 1, 2 (1901); LXX, Part III, Anthropology and cognate subjects, Nos. 1, 2 (1902). Calcutta; 8°.

* **Katalog** literatury naukowej polskiej wydawany przez Komisye Bibliograficzną Wydzialu Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejetnosci w Krakowie. T. II, Rok 1902, Zeszvt 1. Kraków; 8°.

Inventario del R. Archivio di Stato di Cagliari e notizie delle carte conservate nei più notevoli archivi comunali, vescovili e capitolari della Sardegna. Cagliari, 1902; 4° (*dono del Direttore dell'Archivio*).

* **Johns Hopkins University Studies** in Historical and Political Science. Ser. XIX, 10-12; XX, 1. Baltimore, 1901-1902; 8°.

* **Jugoslavenska Akademija** Znanosti i Umjetnosti. Ljetopis. Godinu 1901. Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. XXX, 2, Scriptores, vol. 4°. Rad.-Knjiga 148, Filol.-histor. etc. Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Svezak VII., 1. Zagrebu, 1902; 8°.

* **Mémoires** et **Documents** publiés par l'Académie Chablaisienne fondée à Thonon le 7 décembre 1886. Tome XII. Thonon-les-Bains, 1902; 8°.

* **Memorie** del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze storiche e morali. Vol. XXI, fasc. 4°. Milano, 1902; 4°.

** **Minerva**. Jahrbuch der Gelehrten Welt. 12°. Jahrg. Strassburg, 1903; 8°.

** **Monumenta Germaniae historica**. Epistolarum tomi VI, pars prior; Scriptorum rerum Merovingicarum. T. IV; Scriptorum, T. XXXI, p. I. Berolini, 1902; 4°.

Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1901. Roma, 1902; 4° (*dal Ministero delle Finanze*).

* **Nachrichten** von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Philologisch-historische Klasse, 1902, Heft 3, 4. Geschäftliche Mittheilungen, 1902. Heft 1. Göttingen; 8°.

* **Notulen** van den Algemeene en Directievergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XL. 1902. Aflev. 1. Batavia; 8°.

Nuovi Saggi della C. R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Vol. 6-9, p. I. Padova, 1847-83. 3 vol. 4°.

** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Ergänzungsheft N^r 139. Gotha, 1902; 8°.

Petersen (E.), **Domaszewski** (A. v.), **Calderini** (G.), Die Marcus-Säule auf Piazza Colonna in Rom. München, 1896; 1 v. 4° testo e 2 Atl. fol.

* **Primo** (Il) secolo dell'Ateneo di Brescia. 1802-1902. Brescia, 1902; 4°.

* **Rendiconto** delle Tornate e dei Lavori dell'Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli. N. S., Anno XVI, Gennaio-Aprile 1902. Napoli; 8°.

* **Rivista** Ligure di scienze, lettere ed arti. Organo della Società di letture e conversazioni scientifiche. An. XXIV, fasc. 4, 5. Genova, 1902; 8°.

Rivista periodica dei lavori dell'I. R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Vol. 1°, 3-4; 2, 14-27, 1-2; 29, 3-4; 30, 1-2; 33, 3-4; 34. Padova, 1853-84.

* **Sitzungsberichte** der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der k. b. Akad. der Wissenschaften zu München. 1902, Heft 1, 2. München; 8°.

Statistica della Popolazione. Movimento dello Stato Civile. Anno 1900. Roma, 1902; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

Statistica degli scioperi avvenuti nell'Industria e nell'Agricoltura durante l'anno 1900. Roma, 1902; 8° (*dal Ministero di Agric., Ind. e Commercio*).

Statistica delle cause di morte nell'anno 1900. Roma, 1902; 8° (*Id.*).

* **Statistica** giudiziaria penale per l'anno 1899. Roma, 1902; 8° (*Id.*).

* **Tijdschrift** voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen etc.; Deel XLV, Aflev. 4. Batavia, 1902; 8°.

* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. An. V, fasc. 5-8. Trento, 1902; 8°.

* **Verhandelingen** van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel LIV, 1^r Stuck; LV, 1^r Stuck. Batavia, 1902; 8°.

* **Vocabolario** degli Accademici della Crusca. 5^a impressione. Vol. IX, fasc. 2°. Firenze, 1902; 4°.

Dalla R. Biblioteca dell'Università di Erlangen.

Autenrieth (E.). Der Untergang der Regress-Verbindlichkeit beim Wechsel. Strassburg i. E., 1902; 8°.

Barbarino (O.). Die Rechtskraft des Strafurteils und ihre Wirkungen. Würzburg, 1902; 8°.

Belau (K.). Ueber die Grenzen des mechanischen Geschehens im Seelenleben des Menschen nach Lotze. Flatow, 1901; 8°.

Beschütz (M.). Einfluss der Fälschung von Unterschriften auf Wechseln auf die Wechselverbindlichkeiten; Bedeutung des nachträglichen Versprechens desjenigen, dessen Namen fälschlich geschrieben wurde, die Fälschung nicht geltend machen zu wollen. Hamburg, 1902; 8°.

Bretzfeld (F.). Beiträge zum Rechte des Differenzgeschäftes. München, 1902; 8°.

Brunner (G.). Geschichte der Reformation des Klosters und Stiftlandes Waldsassen bis zum Tode des Kürfürsten Ludwig VI (1583). Erlangen, 1901; 8°.

Bullemer (K.). Quellenkritische Untersuchungen zum I. Buche der Rhetorik Melanchthons. Würzburg, 1902; 8°.

Burdorff (E.). Ist die rechtliche Natur des obligatorischen Vorkaufsrechts und Wiederkaufsrechts im bürgerlichen Gesetzbuche geändert gegenüber dem genuinen Rechte? Altona, 1902; 8°.

Chone (H.). Die Handelsbeziehungen Kaiser Friedrichs II. zu den Seestädten Venedig, Pisa, Genua. Berlin, 1902; 8°.

Clausen (F. W.). Inwieweit schliessen gegen die Forderung bestehende Einreden die Verjährung aus nach gemeinem Rechte und nach B. G. Buche? Gotha, 1902; 8°.

Cramer (A.). Das Verlöbnis nach dem B. G. B. Würzburg, 1902; 8°.

Daumling (C.). Minderheitsrechte in der Aktiengesellschaft. Bayreuth, 1902; 8°.

Dirr (P.). Zur Geschichte der Reichskriegsverfassung und der Larenburger Allianz. München, 1901; 8°.

Ehrenhard (H.). Einfluss des bürgerlichen Gesetzbuchs auf die Verbrechensbegriffe Diebsthal, Unterschlagung und auf die Besitzentziehung. Ingolstadt, 1902; 8°.

Geiger (W.). Die kulturgeschichtliche Bedeutung des indischen Alterthums. Erlangen, 1901; 4°.

Graff (H.). Die konstitutive Wirkung der Firmeneintragung nach dem Handelsgesetzbuche von 10. Mai 1897. Berlin, 1902; 8°.

Greiff (J.). Das staatliche Reformationsrecht nach seiner geschichtlichen Entwickelung und heutigen praktischen Bedeutung. Posen, 1902; 8°.

Hackenberg (K.). Non usus und libertatis usucapio als Aufhebungsgrund der Servituten. Dresden, 1901; 8°.

Hannk (M.). Die Unterhaltspflicht im bürgerlichen Recht. Halle a. S., 1901; 8°.

Hoppe (G.). Die Psychologie des Juan Luis Vives nach den beiden ersten Büchern seiner Schrift " De anima et vita „ dargestellt und beurteilt. Berlin, 1901; 8°.

Hövel (O.). Der Artikel 376 des H.-G.-B. und die Aenderung desselben durch die neue Gesetzgebung. Köln a. Rh., 1899; 8°.

Hüneberg (A.). Der Einfluss der Eröffnung und Beendigung des Konkurses auf das Anfechtungsrecht und die Anfechtungsansprüche der Konkurs-Gläubiger. Hamm i. W., 1901; 8°.

Jacob (L.). Ueber die Grundbegriffe der Wissenschaftslehre Bernard Bolzano's. München, 1902; 8°.

Jacobi (H.). Der Schadensersatz wegen Nichterfüllung nach § 325, 326 B. G. B. unter besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Kaufvertrage. Würzburg, 1902; 8°.

Karnstädt (C.). Die stillschweigenden Willenserklärungen im Feuerversicherungsgeschäft. Köln, 1901; 8°.

Kertscher (F. C.). Der Einfluss des Bestehens einer Streitgenossenschaft auf die Pflicht zur Tragung und Erstattung der Processkosten. Altenburg, 1901; 8°.

Kiefer (A.). Die Veränderungen der Volksdichtigkeit im Königriech Bayern von 1840 bis 1895. Leipzig, 1902; 8°.

Kleemann (J.). Die Pflegschaft für ein Sammelvermögen. Berlin-Rixdorf, 1902; 8°.

Knischewsky (P.). Das preussische Gesamtministerium. Bartenstein, 1901; 8°.

Koeltz (B.). Wie haftet der vertragsmässige Uebernehmer eines Vermögens den Gläubigern des Veräusserers? Berlin, 1901; 8°.

Kopp (O.). Die Aufnahme eines neuen Gesellschafters nach B. G. B. unter besonderer Berücksichtigung der Subsidiarität dieser Vorschriften für die offene Handels- und die Kommanditgesellschaft. Elberfeld, 1902; 8°.

Krauss (I.). Das Portrait Dantes. Berlin, 1901; 8°.

Kroidl (N. L.). Der Hamfang der Polizeigewalt aus Art. 102 Abs. 1. des bayer. Ausführungsgesetzs zur Reichs-Strafprozessordung. Nürnberg, 1902; 8°.

Lazarus (A.). Zur syrischen Uebersetzung des Buches der Richter. Kirchhain N.-L., 1901; 8°.

Leibel (R.). Das Pflichtteilsrecht der entfernteren Verwandten nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Berlin, 1902; 8°.

Mallmann (K.). Der § 1244 des bürgerlichen Gesetzbuchs nach Inhalt und Bedeutung. Metz, 1901; 8°.

Mang (E.). Die Anweisung. Wüstegiersdorf, 1902; 8°.

Martin (M.). Johann Landtsperger. Die unter diesem Namen gehenden Schriften und ihre Verfasser. Augsburg, 1902; 8°.

Nebel (C.). Vauvenargues' Moralphilosophie mit besonderer Berücksichtigung seiner Stellung zur französischen Philosophie seiner Zeit. Leipzig, 1901; 8°.

Neubürger (F.). Verfassungsrecht der gemeinen Judenschaft zu Fürth und in dessen Amt im achtzehnten Jahrhundert. Fürth, 1902; 8°.

Orthal (H.). Die Schadenersatzpflicht des Auftraggebers nach dem bürgerlichen Gesetzb. nebst einer rechtsvergleichenden Uebersicht. München, 1901; 8°.

Pape (M.). Die Vormundschaft der Mutter nach den deutschen Rechten des Mittelalters bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts. Wolfenbüttel, 1902; 8°.

Petersen (H.). Grundzüge der Ethik Jakob Böhme's. Erlangen, 1901; 8°.

Porger (G.). Johann Stuve's Leben und Wirken. Halle a. S., 1901; 8°.

Rohé (H.). Das kausmännische Auskunftswesen. München, 1901; 8°.

Samson (M.). Das sog. Selbstkontrahiren nach gemeinem Recht und bürgerlichem Gesetzbuch. Neumünster, 1901; 8°.

Schaefer (G.). Dissertatio de tertio Bacchylidis carmine. Erlangen, 1901; 8°.

Schaumann (G.). Religion und religiöse Erziehung bei Rousseau. Leipzig, 1902; 8°.

Schiedermair (L.). Künstlerische Bestrebungen am Hofe des Kurfürsten Ferdinand Maria von Bayern. Freising, 1902; 4°.

Schill (E.). Der Postscheck nach dem Entwurfe der deutschen Postscheckordung vom Jahre 1899 und dem Rechsetatgesetze vom 30. Marz 1900. München, 1901; 8°.

Schlachter (F.). Spottlieder in französischer Sprache, besonders auf die Franzosen, aus dem Beginne des siebenjährigen Krieges. Erlangen, 1901; 8°.

Schneiner (C.). Die Abänderung der Anrechnung einer auf mehrere Schuldposten geleisteten Zahlung. Erlangen, 1902; 8°.

Silberberg (R.). § 111 des Strafgesetzbuches für das Deutsche Reich in seinem Verhältnis zur Lehre von der Teilnahme. Gratz (Posen), 1902; 8°.

Stein (J.). Die Einwirkung des neuen bürgerlichen Rechts auf das Anwendungsgebiet des § 289 des Reichstrafgesetzbuches. Erlangen, 1902; 8°.

Strauss (H.). Niessbrauch an einem Vermögen. Kaiserslautern, 1902; 8°.

Tetzlaff (O.). Das kommunale Steuerwesen der Stadt Halle a. S. Berlin, 1902; 8°.

Thimme (G.). Die religionsphilosophischen Prämissen Schleiermacherschen Glaubenslehre. Hannover und Leipzig, 1901; 8°.

Thomas (G.). Die staatsrechtliche Stellung des Statthalter von Elsass-Lothringen. Könisberg i. Pr., 1901; 8°.

Uebersicht des Personal-Standes bei der k. bayerischen Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen nebst dem Verzeichnisse der Studierenden im Winter-Semester 1901/1902 und Sommer-Semester 1902. Erlangen; 8°.

Ulmer (F.). Die semitischen Eigennamen im Alten Testament auf ihre Entstehung und Elemente hin untersucht. Leipzig, 1901; 8°.

Varnhagen (H.). Prolegomena ad editionem fabulae romanensis quae inscripta est: Pier Plainnes seaven yeres Prentiship. Erlangae, 1901; 4°.

Verzeichnis der Vorlesungen welche an der k. bayerischen Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen im Winter-Semester 1901-1902 und Sommer Semester 1902. Erlangen; 8°.

Vonschott (K.). Beiträge zur Lehre vom Blancoaccept. Bielefeld, 1902; 8°.

Weber (F.). Die staatlichen Betriebe und die Reichsgewerbeordnung unter besonderer Berücksichtigung Bayerns. Leipzig, 1902; 8°.

Weichert (A.), Die legio XXII Primigenia. Trier, 1902; 8°.

Weyl (F.). Die Standesherrnqualität der Grafen von Altleiningen-Westerburg zu Ilbenstadt. Giessen, 1901; 8°.

Will (J.). Quae ratio intercedat inter Dionis Cassii de Cæsaris bellis Gallicis narrationem et commentarios Cæsaris de bello Gallico. Bambergae, 1901; 8°.

Willweber (P.). Das Recht der Untermiethe nach dem gemeinen Recht und dem Recht des bürgerlichen Gesetzbuches. Berlin, 1901; 8°.

Wohlberg (R.). Grundlinien einer talmudischen Psychologie. Berlin, 1902; 8°.

Zimmermann (G.). Die Beendigungsgründe der Gewerkschaft nach dem Allgemeinen Berggesetz für die preussischen Staaten vom 24. Juni 1865. Münster i. W., 1901; 8°.

Zoepfl (G.). Nationalökonomie d. technischen Betriebskraft. Erlangen, 1902; 8°.

* *Dall' Università di Giessen:*

Bürger (O.). Beiträge zur Kenntnis des Teuerdank. Strassburg, 1902; 8°.

Eise (H.). Der Gemeindewaisenrat im deutschen Recht. Alsfeld, 1902; 8°.

Esselborn (K.). Die Ministerverantwortlichkeit im Grossherzogtum Hessen. Leipzig, 1902; 8°.

Kallner (A.). Mischnah-Commentar des Maimonides zum Traktat Taanith I. II. Leipzig, 1902; 8°.

Koch (G.). Manegold von Lautenbach und die Lehre von der Volkssouveränität unter Heinrich IV. Berlin, 1902; 8°.

Koenig (R.). Statistiche Mitteilungen aus 62. kleinbäuerlichen Betrieben über Erzeugung, Verbrauch, Verkauf und Zukauf von Getreide. Jena, 1901; 8°.

Kraus (J.). Beiträge zur Kenntnis der Mundart der nordöstlichen Champagne im 13. und 14. Jahrhundert. Giessen, 1901; 8°.

Leist (A.). Die Strafgewalt moderner Vereine. Giessen, 1901; 8°.

Mattes (H.). Das Gemeinschaftliche Testament nach dem bürgerlichen Gesetzbuche. Worms, 1902; 8°.

Molz (H.). Die Substantivflexion seit Mittelhochdeutscher zeit. Halle a. S., 1902; 8°.

Nehb (G.). Die Formen des Artikels in den französischen Mundarten. Berlin, 1901; 8°.

Northoff (T.). Die landwirtschaftliche Betriebsweise auf einem westfälischen Einzelhofe des Kreises Lüdinghausen um das Jahr 1900. Münster, 1902; 8°.

Personalbestand der Grossherzoglich hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Winterhalbjahr 1901-1902, Sommerhalbjahr 1902. Giessen, 1901; 8°.

Pfannmüller (G.). Die kirchliche Gesetzgebung Justinians hauptsächlich auf Grund der Novellen. Berlin, 1902; 8°.

Scheffer (A.). Die Hebung der Leistungsfähigkeit des Milchviehes durch Gründung von Kontrollvereinen nach dänischem Muster. Giessen. 1902; 8°.

Schmitt (E.). Die Surrogation im bürgerlichen Gesetzbuch. Giessen, 1902; 8°.

Schwarz (J. F.). Lotzes Geschichtsphilosophie in ihrem Verhältnis zu seiner Religionsphilosophie und Metaphysik. Mainz, 1901; 8°.

Thomas (W.). Die Anschauung der Reformatoren von geistlichen Amte. Leipzig, 1901; 8°.

Völsing (K.). Das Vereins- und Dersammlungsrecht im Grossherzogtum Hessen. Seine geschichtliche Entwichelung und gegenwärtige Gestaltung. Giessen, 1902; 8°.

Vorlesungsverzeichniss der Grossherzoglich hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen. Sommerhalbjahr 1902, Winterhalbjahr 1902-1903. Giessen, 8°.

Wolf (P.). Ueber das schlichte Mobiliarmiteigentum unter dem Rechte des bürgerlichen Gesetzbuchs für das Deutsche Reich. Giessen. 1902; 8°.

* *Dalla Biblioteca dell'Università di Upsala:*

Årsskrift, Upsala Universitets. 1901. Upsala [1900-1901]; 8°.

Barkman (H.). Bidrag till den transscendentala kategoriläran. 1. Upsala, 1901; 8°.

Björkegren (O. R.). De sonis dialecti Rhodiacæ. Upsaliæ, 1902; 8°.

Carlbom (J. L.). Magnus Dureels negotiation i Köpenhamn 1655-57. Sveriges och Danmarks inbördes förhållande under åren närmast före Karl X:s första danska krig. Göteborg, 1901; 8°.

Collijn (I. G. A.). Les suffixes toponymiques dans les langues française et provençale. P. 1. Développement des suffixes latins -anus, -inus, -ensis. Upsala, 1902; 8°.

Edling (E. G.). Priscillianus och den äldre priscillianismen. 1. Upsala, 1902; 8°.

Föreläsningar och öfningar vid Kongl. Universitetet i Upsala höst-terminen 1901. Upsala, 1901; 8°.

— — vår-terminen 1902. Upsala, 1902; 8°.

Hammarsten (O.). Om näringsämnenas betydelse för muskelarbetet. Inbjudningsskrift. Upsala, 1901; 8°.

Hamnström (E. A. D.). Freden i Fredrikshamn. Upsala, 1902; 8°.

Hesselman (B. I.). Stafvelseförlängning och vokalkvalitet i östsvenska dialekter. Upsala, 1902; 8°.

Hjertén (N. I. F.). De loco Poeticæ Aristoteleæ 1449 b 13-16 cum tragoediis collato. Upsaliæ 1901; 8°.

Huss (E. G.). Undersökning öfver folkmängd, åkerbruk och boskapsskötsel i landskapet Västerbotten åren 1540-1571. Upsala, 1902; 8°.

Kallstenius (G. G.). Värmländska bärgslagsmålets ljudlära. Stockholm, 1902; 8°.

Matrikel, Uppsala universitets, på uppdrag af Universitetets Rektor utgifven af Aksel Andersson. 2. 1632-1650. Inbjudningsskrift. Upsala, 1902; 8°.

— — 3. 1650-1665. Inbjudningsskrift. Upsala, 1902; 8°.

Mellén (L. G.). De Ius fabula capita selecta. Upsaliæ, 1901; 8°.

Paues (A. C.). A fourteenth century English biblical version consisting of a prologue and parts of the New Testament edited from the manuscripts together with some introductory chapters on Middle English biblical versions (prose-translations). Cambridge, 1902; 8°.

Stjernberg (N. F.). Till frågan om de s. k. rent ekonomiska kategorierna. Upsala, 1902; 8°.

Strömberg (E. V.). Studia in panegyricos ueteres latinos. Upsaliæ, 1902; 8°.

Torbiörnsson (T.). Die gemeinslavische Liquidametathese. Upsala, 1901; 8°.

Wejle (C. M.). Sveriges politik mot Polen 1630-1635. Upsala, 1901; 8°.

Dono del Socio Boselli:

André (G.). Nizza, 1792-1814. Nizza, 1894; 8°.

Annuario della R. Università degli Studi di Genova 1893-94, 1895-96, 1899-900. Genova, 1894-1900; 6 vol. 8°.

Atti del Congresso agrario nazionale inaugurato in Roma il 15 aprile 1894. Roma, 1894; 8°.

Bentivegna (R.). Trattato della fognatura cittadina. Milano, 1889; 8°.

Berchet (F.). IV-V Relazione (1896-1901) dell'Ufficio regionale per la conservazione dei monumenti del Veneto. Venezia, 1899-901; 2 vol. 8°.

Bertarelli (P.). Sui fatti principali riguardanti l'igiene e la sanità pubblica del Regno dal 1° gennaio al 30 novembre 1897. Roma, 1897; 4°.

Boccardo (G.). Trattato teorico-pratico di economia politica. 6ª ediz. Torino, 1879; 3 vol. 16°.

Bollettino della Società di Storia patria *Anton Ludovico Antinori*. Aquila, 1889-901; 13 vol. 8°.

Borromeo (C.). Dante personificato nel Veltro con Appendice sulle finte epistole ai principi e popoli d'Italia, ai fiorentini, ad Arrigo VII. Torino-Palermo, 1901; 8°.

Brusaferro (S.). La tubercolosi negli animali domestici. Torino, 1890; 8°.

Carutti (D.). Storia della città di Pinerolo. Pinerolo, 1893; 8°.

Congrès géologique international. Compte rendu de la 3me session. Berlin, 1888; 8°.

Courrier (Le) d'Italie. Rome, 1879-80; 2 vol. 4°.

Dacci (G.). Cenni storici e statistici intorno alla R. Scuola di musica in Parma. Parma, 1888; 4°.

Diritti (I) della scuola. Milano, 1899-902. 3 vol. 4°.

Discorsi pronunziati a commemorazione del conte professore Cesare Albicini raccolti e pubblicati nel 1° anniversario della sua morte. Forlì, 1892; 8°.

Drochi (L.). Lorenzo Bruno. Cenni biografici. Torino-Roma, 1894; 12°.

— Patria. Versi. Torino, 1895; 8°.

Économiste (L') français. Années 13-25. Paris, 1885-97; 25 vol. 8°.

Fettarappa (G.). Nozioni di economia politica. Principii di economia applicati alle stime e conteggi ad esse relativi. Torino, 1887-90; 2 vol. 8°.

Fighiera (L. S.). La lingua e la grammatica di C. Crispo Sallustio. Savona, 1900; 8°.

Gandoglia (B.). La città di Noli. Savona, 1885; 8°.

Gelli (J.). Bibliografia generale della scherma. Firenze, 1890; 4°.

Giglioli (E. H.). Avifauna italica. Elenco delle specie di uccelli stazionarie o di passaggio in Italia. Firenze, 1886; 8°.

— — Primo resoconto dei risultati della inchiesta ornitologica in Italia. Firenze, 1889-90; 2 vol. 8°.

Intermezzo. Direttore dr. G. Canti. Alessandria, 1890; 8°.

International law Association. Report of the 14th, 15th, 18th, 19th Conference. London, 1891-901; 4 vol. 8°.

Johnston-Lavis (H. J.). Monograph of the earthquakes of Ischia. London-Naples, 1885; 4° con tav.

Leva (Della) sui giovani nati nell'anno 1870, 1873-74, 76. Roma 1893-98; 4 vol. 8°.

Loria (L.). Le strade ferrate. 2ª ediz. Milano, 1890-92; 2 vol. 8°.

Marzorati (E.). Elementi di economia ed estimo rurale, cadastro e stima di miniere. 2ª ediz. Milano, 1884; 2 vol. 8°.

Memoria (In) del marchese Giulio Dragonetti. Roma [1896 c.]; 8°.

Molmenti (P. G.). La storia di Venezia nella vita privata dalle origini alla caduta della Repubblica. Torino, 1880; 8°.

Musatti (E.). Guida storica di Venezia. Padova-Venezia, 1890; 16°.

Palomba (S.). Della preminenza della legge naturale nel diritto umano. Cagliari, 1897; 8°.

Parola (F.). Decemviri. Drama. Albae, 1887; 16°.

Pensiero (Il) italiano, repertorio mensile di studi. Milano, 1891-98; 22 vol. 8°.

Pigorini-Beri (C.). Costumi e superstizioni dell'Appennino marchigiano. Città di Castello, 1889; 8°.

Pinna (M.). L'archivio del duomo di Cagliari. Cagliari-Sassari, 1899; 4°.

Pinnaferrà (G.). Orientazioni sociologiche dalla Sardegna. Bari, 1898; 8°.

Pompei (A.). Studi intorno all'anfiteatro di Verona. Verona, 1877; 4°.

Rassegna di scienze sociali e politiche. Firenze, 1883-90; 15 vol. 8°.

Relazione statistica intorno ai servizi postale e telegrafico, 1895-96—1898-99. Roma, 1897-1901; 4 vol. 4°.

Revue politique et parlementaire. Paris, 1894-96; 7 vol. 8°.

Ricordo pittorico militare della spedizione sarda in Oriente (1855-56). Torino, 1884; 4° obl.

Rivista di diritto internazionale. Napoli, 1899-902; 4 vol. 8°.

Rota (G.). La vasca per le esperienze di architettura navale nel R. Arsenale di Spezia. Genova, 1898; 4°.

Sacchi (V.). Lucca e la sua provincia. Impressioni. Roma, 1893; 4°.

Santa Rosa (H.) e **Fidanza** (F. A.). Album do Parà em 1899. Berlin; 4°.

Sapeto (G.). Grammatica araba volgare ad uso delle scuole tecniche. Firenze-Genova, 1866; 8°.

Scuola (La) nazionale. Torino, 1890-901; 12 vol.

Verzellino (G. V.). Delle memorie particolari e specialmente degli uomini illustri della città di Savona. Savona, 1891; 8°.

---

* **Bonnet** (É.). Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier. 1ère partie. Montpellier, 1901; 8° (*dono dell'Accad.*).

** **Cheickho** (P. L.). [Maǵânî ou fleuves de la littérature arabe; Beyrouth, impr. Catholique, 1882-96; 6 vol. 8°.
Notes sur le Maǵânî. Beyrouth, 1886-88]; 4 vol. 8°.

Cortellini Diaz del Alcazar (D. J.). La Belleza. Disertación filosófico-histórica con un prólogo de D. E. de Obregón. Madrid, 1902 (*dall'A.*).

Dalla Vedova (G.). Annibale Ferrero. Gotha, 1902, 1 c. (*dall'A. Socio corrispondente*).

Gambèra (P.). M. Porena. Commento grafico alla Divina Commedia per uso delle scuole. Salerno, 1902; 8° (*dall'A.*).

Gerola (G.). Lavori eseguiti nella necropoli di Phaestos dalla Missione archeologica italiana dal 10 febbraio al 22 marzo 1902. Relazione. Roma, 8° (*dal Presidente della Scuola italiana*).

Halbherr (F.). Id. Id., dal 15 maggio al 12 giugno 1902 (*Id.*).

** **Litta.** Famiglie celebri italiane (2ª serie): Caracciolo di Napoli di F. Fabris. Parte 2ª. Napoli; f°.

Meerens (C.). La science musicale à la portée de tous les artistes et amateurs. Bruxelles, 1902; 8°.

Merkel (C.). L'opuscolo " De Insulis Nuper Inventis „ del messinese Nicolò Scillacio. Milano, 1901; 4° (*dono del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere*).

Nadaillac (de). L'age de cuivre. Louvain, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

— Voyage du Duc et de la Duchesse d' York à travers les Colonies anglaises. Paris, 1902 (*Id.*).

Peixotto (J. B.). The French Revolution and modern French Socialism. New York, 1901; 8° (*dall'Università di California*).

Poggi (V.). Gli antichi statuti di Carpasio (21 luglio 1433). Torino, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Rigobon (P.). Studii antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci. Bari, 1902; 8° (*dall'A.*).

Simonetti (N.). L'epistola a Cangrande non è di Dante. Spoleto, 1902; 8° (*Id.*).

* **Stornaiolo** (C.). Codices Urbinates latini. T. I (Codices 1-500). Accedit appendix ad descriptionem picturarum cum exemplari f. 2 codicis 464 phototypice expresso. Romae, 1902; 4° (*dalla Bibliot. Apost. Vaticana*).

* **Vattasso** (M.) e **Franchi** de' Cavalieri (P.). Codices Vaticani latini. T. I. Codices 1-678. Romae, 1902; 4° (*Id.*).

Dal 16 al 30 Novembre 1902.

* **Geological** Map of Dominion of Canada (Western Sheet, No. 783; f° (*dal Geological Survey of Canada*).

Naegamvala (K. D.). Report on the total Solar Eclipse January 21-22, 1898, as observed at jeur in western India, vol. 1°. Bombay, 1902; 4° (*dall'A. Direttore dell'Osservatorio Maharaja Takhtasingji, Poona*).

Chiarugi (G.). L'insegnamento dell'anatomia dell'uomo secondo i nuovi regolamenti universitari. Firenze, 1902; 8° (*dall'A.*).

Rossi (F.). Traité de l'art des accouchements (1796-99). Fragments d'après le ms. inédit de la Bibliothèque de la R. Académie des Sciences, publiés par le prof. Dr. J. Carbonelli. Turin, 1902; 8° (*dono del Dr. J. Carbonelli*).

* *Dall'Università di Basel:*

Abderhalden (E.). Ueber den Einfluss des Höhenklimas auf die Zusammensetzung des Blutes. München, 1902; 8°.

Åkerberg (T.). Ueber die Geschwindigkeit der elektrolytischen Zersetzung von Oxalsäure bei Gegenwart von Schwefelsäure. Ein Beitrag zum Studium der elektrolytischen Reaktionsgeschwindigkeit bei einem sekundären Prozesse. Leipzig, 1902; 8°.

Auerbach (M.). Das braune Fettgewebe bei schweizerischen und deutschen Nagern und Insektivoren. Bonn, 1902; 8°.

Banning (F.). Zur Kenntnis der Oxalsäurebildung durch Bakterien. Jena, 1902; 8°.

Bäumlin (J.). Ueber familiäre Erkrankungen des Nervensystems. Leipzig, 1901; 8°.

Beisswenger (A.). Ueber die Reduktion einiger Anhydride der Bernsteinsäure- und Glutarsäuregruppe zu Lactonen. Tübingen, 1902; 8°.

Blumer (S.). Zur Entstehung der Glarnerischen Alpenseen. Lausanne, 1902; 8°.

Bossart (A.). Zur Chemie der Verfettung in krankhaften Neubildungen und im tuberculösen Gewebe. Aarau, 1902; 8°.

Breustedt (G.). Beiträge zur Kenntniss der aromatischen Hydantoine. Braunschweig, 1902; 8°.

Burtolf (J.). Verengerungen und Verwachsungen in der Pars laryngea pharyngis. Basel, 1901; 8°.

Buxtorf (A.). Beiträge zur Kenntnis der Sedimente im Basler Tafeljura. Bern, 1901; 4°.

Clauditz (J.). Blattanatomie canarischer Gewächse mit Berücksichtigung von Standort und Klima. Hildesheim, 1902; 8°.

Czerkis (M.). Oxydationen von Amido- und Nitrophenolen. Zürich, 1902; 8°.

Damm (O.). Ueber den Bau, die Entwicklungsgeschichte und die mechanischen Eigenschaften mehrjäriger Epidermen bei den Dicotyledonen. Cassel, 1901; 8°.

Fabricius (M.). Beiträge zur Laubblatt-Anatomie einiger Pflanzen der Seychellen, mit Berücksichtigung des Klimas und des Standortes. Jena, 1902; 8°.

Farine (G.). Ueber einige Acidylderivate des o-Amidobutyrophenons und deren Uberführung in α- und γ-Oxychinoline. Porrentruy, 1902; 8°.

Flachs (A.). Ueber das Bitumen des Reutlinger Schiefers, ein Beitrag zur Theorie der Erdölbildung. Basel, 1902; 8°.

Fleischer (J.). Ueber den Reactions-Verlauf bei der Einwirkung von Di- und Trinitrochlorbenzol auf mehrbasische Amine und Phenole. Boskowitz, 1901; 8°.

Gonser (R.). Ueber acute Osteomyelitis im Kindesalter mit besonderer Berücksichtigung der Endresultate. Berlin, 1902; 8°.

Gough (L. H.). The development of Admetus pumilio Koch. A contribution to the embryology of the Pedipalpi. Strassburg, 1901; 8°.

Graefe (E.). Ueber Einwirkungsproducte des Chlorkohlenoxydes auf einige aromatische Alkohole und Phenole. Liebertwolkwitz-Leipzig, 1901; 8°.

Hagenbach (E.). Beitrag zur Kenntniss der angeborenen Sacro-coccygealtumoren. Berlin, 1902; 8°.

Huber (O.). Die Kopulationsglieder der Selachier. Leipzig, 1901; 8°.

Huber (T.). Das Verhalten des Gedächtnisses nach traumatischen Kopfverletzungen. Basel, 1901; 8°.

Klut (H.). Beiträge zur Kenntnis substituierter Thiodicyandiamine. Friedrichshagen, 1902; 8°.

Mathé (E.). Ueber Einwirkungsproducte von Diazokörpern auf Phenylhydrazine. — Ueber einige beizenziehende Orthochinolinderivate. — Ueber einige neue Orthotoluchinolinderivate. Colmar, 1901; 8°.

Merckens (O.). Ueber die α-Phenylglutarsäure und ihre Kondensation mit Benzaldehyd. Die γδ-Diphenyl- γδ-Pentensäure. Basel, 1902; 8°.

Mühlhauser (B.). A. Ueber Untersuchungen in der Acridinreihe. B. Zur Kenntniss der a-Aethylidenglutarsäure. Augsburg, 1902; 8°.

Müller (A.). Hundert Fälle von Perityphlitis aus der Basler chirurgischen Klinik. Berlin, 1902; 8°.

Pfisterer (G.). Ueber Pneumokokken-Gelenk- und Knocheneiterungen. Beobachtungen aus dem Kinderspital in Basel. Berlin, 1902; 8°.

Pollitt (G. P.). Ueber die Kontaktwirkung des Eisenoxyds bei der Umwandlung von Schwefeldioxyd und Sauerstoff in Schwefeltrioxyd. Zürich, 1902; 8°.

Preiswerk (E.). Ueber die Einwirkung aromatischer Amine und des Natriummalonesters auf dibromsubstituierte Säuren. Basel, 1902; 8°.

Preiswerk (H.). Ueber Dunitserpentin am Geisspfadpass im Oberwallis. Basel, 1901; 8°.

Probst (O.). Einfluss des Stickstoffs auf die Pflanzenentwicklung mit besonderer Berücksichtigung des Wurzelsystems. Bonn, 1901; 8°.

Reber (M.). Ueber eine bisher nicht beschriebene Form von Rektalstrikturen und eine neue Behandlung derselben. Tübingen, 1901; 8°.

Reis (F.). Zur Kenntniss der Condensationsprodukte der a-Ketonsäuren und ihrer Umwandlungsprodukte. Strassburg i. Els., 1902; 8°.

Roth (K.). Ueber Metalldestillation und über destillierte Metalle. Leipzig, 1902; 8°.

Rouus (M.). Ueber Cineolsäure. Basel, 1901; 8°.

Sauerbeck (E.). Ueber die Verkürzung der Hirnhöhlenhörner, ihr Vorkommen und ihre Entstehung. Berlin, 1901; 8°.

Schmidt-Nielsen (S.). Studien über chemischen und mikrobiologischen Vorgänge beim Reifen des gesalzenen Fischfleisches (speziell von Clupea Harengus). Throndhjem, 1902; 8°.

Schröder (L.). Entwicklungsgeschichtliche und anatomische Studien über das männliche Genitalorgan einiger Scolytiden. Berlin, 1902; 8°.

Schwyzer (J.). Zur Kenntnis der bromierten Xylidine. Zürich, 1902; 8°.

Sonneborn (F.). Zur Kenntnis der Vinylessigsäure. Basel, 1902; 8°.

Spiess (O.). Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung. Basel, 1902; 8°.

Staehelin (R.). Der Gaswechsel des Menschen im Höhenklima. Leipzig, 1901; 8°.

Strübin (K.). Beiträge zur Kenntnis der Stratigraphie des Basler Tafeljura. Speziell des Gebietes von Kartenblatt 28, Kaiseraugst (Siegfriedatlas). Basel, 1901; 8°.

Suter (F. A.). Beitrag zur Statistik des Mastdarmcarcinomes und Uebersicht über die hauptsächlichsten Operationsmethoden. Zürich-Oberstrass, 1900; 8°.

Thesmar (G.). Contribution à la connaissance des Xylènes. Bâle, 1902; 8°.

Thommen (J.). Klinische und experimentelle Beiträge zur Kenntniss der Bauchcontusionen und der Peritonitis nach subcutanen Darmverletzungen. Berlin, 1902; 8°.

Van der Sleen (G.). Ueber die a-Oxybutensäure (Vinyl-glycolsäure) und ihre Umlagerungen. Haarlem, 1901; 8°.

Vortisch (R.). Ueber die Einwirkung aromatischer Amine auf die drei isomeren Dibrombrenzweinsäuren. Basel, 1902; 8°.

Waldenberger (Ch. A.). Ueber die Elektrolyse der Estersalze der Phenylbernsteinsäure mit fettsauren Salzen. Basel, 1901; 8°.

Wannier (A.). Experimentelle Untersuchungen über die baktericide Wirkung einiger Harndesinficientien. Berlin und Leipzig, 1901; 8°.

Wenner (P.). A. Ueber Alkylirungen mittelst Dimethylsulfat und p-Toluolsulfosäureester. B. Ueber Phenylisocrotonsäureanilid. Basel, 1902; 8°.

Wessel (L.). Ueber einige Derivate des Ditolyls. Köln, 1902; 8°.

Wetter (A.). Ueber Aposafranine und Azoniumverbindungen aus Tolusafranin. Beiträge zur Kenntnis der Phtalamidone. Basel, 1902; 8°.

Wille (L.). Ueber die psychophysiologischen und pathologischen Beziehungen des Gedächtnisses. Basel, 1901; 4°.

Wright (R. G.). Zur Kenntnis des Auramins G. Zürich, 1902; 8°.

Zeltner (A.). Beiträge zur Kenntniss der Beziehungen zwischen Constitution und Drehungsvermögen. Freiburg i. Br., 1902; 8°.

Zschoche (R.). Ueber die elektrolytische Oxydation von Methylgruppen in aromatischen Verbindungen. Basel, 1902; 8°.

Dal 23 Novembre al 7 Dicembre 1902.

Anzilotti (D.). Teoria generale della responsabilità dello Stato nel diritto internazionale. Parte prima. Firenze, 1902; 8°.

— I mutamenti dei rapporti patrimoniali fra coniugi nel diritto internazionale privato. Firenze, 1900; 8° (*dall'A.*).

Beyssac (J.). Le Prieuré Saint-Hilaire-de-Nus au diocèse d'Aoste. Lyon, 1902; 8° (*Id.*).

* **Elenco** dei doni 1898-1901 [fatti alla Biblioteca Palatina di Modena]; 8°.

Del Lungo (I.). San Francesco alla Verna. Firenze, 1902; 8°.

— Tommaseo e Capponi da lettere inedite d'ottobre-novembre 1833. Roma, 1902; 8°.

— Il Tommaseo e Firenze. Roma, 1902; 8° (*dall'A.*).

Fubini (R.). La dottrina dell'errore in diritto civile italiano. Torino, 1902; 8° (*Id.*).

Peyre (R.). Une princesse de la Renaissance. Marguerite de France duchesse de Berry, duchesse de Savoie. Paris, 1902; 8° (*Id.*).

Serafini (E.). Le obbligazioni divisibili ed indivisibili. Modena, 1902; 8° (*Id.*).

Toesca di Castellazzo (C.). L'offerta al pubblico. Contributo alla teoria dell'Offerta contrattuale " ad incertam personam ". Torino, 1903; 8° (*Id.*).

Tordi (D.). Il codice autografo di rime e prose di Bernardo Tasso. Appendice al libro terzo degli Amori. Firenze, 1902; 8°.

Trojano (P. R.). La filosofia morale e i suoi problemi fondamentali. Torino, 1902; 8° (*dall'A.*).

* *Dall'Università di Basel:*

Bock (E.). Florentinische und venezianische Bilderrahmen aus der Zeit der Gotik und Renaissance. München, 1902; 8°.

Catalogue des écrits académiques suisses 1901-1902. Basel, 1902; 8°.

Fricke (E.). Der Einfluss Shakespeares auf Alfred de Mussets Dramen. Basel, 1901; 8°.

Hassler (O.). Ein Heerführer der Kurie am Anfang des XIII. Jahrhunderts. Pelagius Galvani. Kardinalbischof von Albano. Berlin, 1902; 8°.

Meyer (J.). Die Hölle im Islam. Basel, 1901; 8°.

Personal-Verzeichnis der Universität Basel für das Winter-Semester 1901/1902 und Sommer-Semester 1902. Basel, 1901; 8°.

Reiff (P.). Der moderne psychophysische Parallelismus. Heilbronn, 1901; 8°.

Verzeichnis der Vorlesungen an der Universität Basel im Sommer-Semester 1902, und Winter-Semester 1902-1903; 4°.

dal 30 Novembre al 14 Dicembre 1902.

Alasia (C.). Saggio terminologico-bibliografico sulla recente Geometria del triangolo. Bergamo, 1902; 8° (*dall'A.*).

Borredon (G.). La Luna è la sorgente fisica del freddo; 8° (*Id.*).

** **Encyclopaedia** Britannica. Vol. 25-29. Edinburgh & London, 1901-1902; 5 vol. 4°.

Galilei (G.). Le Opere. Edizione Nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia; Vol. XII. Firenze, 1902; 8° (*dono del Ministero dell'I. P.*).

Giuliano (S.). Descrizione del doppio freno idropneumatico S. Giuliano. Testo e tav. Torino, 1902; 8° (*dall'A. pel 1° Premio Vallauri*).

Guareschi (I.). Storia della Chimica. II. Faustino Malaguti e le sue opere. Torino, 1902; 4° (*dall'A. Socio residente*).

Kölliker (A.). Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien. Leipzig, 1902; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Majocchi (G.). Trisezione dell'angolo colla riga e col compasso. Milano, 1902, 1 c. (*dall'A.*).

Marini (A.). Note sericole e cenni sulla campagna bacologica 1902. Torino; 8° (*Id.*).

Pascal (E.). I gruppi continui di trasformazioni. Milano, 1903; 16° (*Id.*).

Ricci (G. B.). La via ai rapporti melodici della musica naturale. Indagine critica. Savona, 1902; 8° (*dall'A. per il 1° Premio Vallauri*).

Richards (T. W.). Further investigation of the atomic weight of copper. Boston, 1887; 8°.

— A determination of the relation of the atomic weights of copper and silver. 1887; 8°.

— The analysis of cupric bromide, and the atomic weight of copper. 1890; 8°.

— On cupric oxybromide. 1890; 8°.

— A revision of the atomic weight of copper. 1891; 8°.

— Ueber Cupriammonium-Acetobromid. 1892; 8°.

Richards (T. W.). A revision of the atomic weight of barium. First and second paper: The analysis of baric bromide, and baric chloride. 1893; 8°.
— A revision of the atomic weight of strontium. First paper: The analysis of strontic bromide. 1894; 8°.
— On the temperature coefficient of the potential of the calomel electrode, with several different supernatant electrolytes. 1897; 8°.
— Note on the rate of dehydration of crystallized salts. 1897; 8°.
— On the cause of the retention and release of gases occluded by the oxydes of metals. 1898; 8°.
— Die Uebergangstemperatur des Natriumsulfats: ein neuer Festpunkt in der Thermometrie. 1898; 8°.
— A convenient gas generator, and device for dissolving solids. 1898; 8°.
— Note on the Spectra of hydrogen. 1899; 8°.
— An electric drying oven. 1899; 8°.
— Ueber die Bestimmung von Schwefelsäure bei Gegenwart von Eisen; eine Notiz über feste Lösungen und die Hydrolyse von Chrom- und Eisensalzen. 1900.
— Bemerkung über eine Methode zur Aichung von Gewichten. 1900; 8°.
— Report. International atomic weights. 1900; 8°.
— The driving energy of physico-chemical reaction, and its temperature coefficient. 1900; 8°.
— The relation of the taste of acids to their degree of dissociation, II. 1900; 8°.
— Modifications of Hempel's Gas-apparatus. 1901; 8°.
— Suggestion concerning the nomenclature of heat capacity. 1901; 8°.
— The Standard of atomic weights. 1901; 8°.
— Neubestimmung des Atomgewichtes von Calcium. 1902; 8°.
— The possible significance of changing atomic volume. 1901; 8°. II. The probable source of the heat of chemical combination and a new atomic hypothesis. 1902; 8°. III. The relation of changing heat capacity to change of free energy, heat of reaction, change of volume, and chemical affinity. 1902; 8°.
— Note on the application of the Phase Rule the fusing points of copper, silver, and gold. 1902; 8°.
— Concerning gas-analysis by measurement in constant volume under changing pressure. 1902; 8°.
— A Table of atomic weights. 1898, 1901, 1902; 8°.
— and **Archibald** (E. H.). A study of growing crystals by istantaneous photomicrography. 1901; 8°.
— — The decomposition of mercurous chloride by dissolved chlorides: A contribution to the Study of concentrated solutions. 1902; 8°.
— and **Baxter** (G. P.). A revision of the atomic weight of cobalt. 1° The analysis of cobaltous bromide. 1897; 8°. 2° The determination of the cobalt in cobaltous bromide. 1899; 8°. 3° The analysis of cobaltous chloride and oxyde. 1899; 8°.
— — Revision des Atomgewichtes von Eisen. 1900; 8°.

Richards (T. W.). **Mc Caffrey** (C. F.) u. **Bisbee** (H.). Die Okklusion von Magnesiumoxalat durch Calciumoxalat und die Lösliehkeit von Calciumoxalat. 1901; 8°.

— **Collins** (E.) u. **Heimrod** (G. W.). Das elektro chemische Aequivalent des Kupfers und des Silbers. 1900; 8°.

— and **Cooke** (J. P.). The relative values of the atomic weights of hydrogen and oxygen. 1887; 8°.

— and **Cushman**. A revision of the atomic weight of nikel. I. The analysis of nikelous bromide. 1897; 8°. II. The determination of the nikel in nikelous bromide. 1899; 8°.

— and **Forsythe** (R. J.). On the action of ammonia upon cupriammonium acetobromide. 1897; 8°.

— and **Fraprie** (F. R.). The solubility of manganous sulphate. 1901; 8°.

— und **Harrington** (W. L.). Bemerkungen über den Siedepunkt von gemengten Lösungen. 1898; 8°. I. Chlorwasserstoffsäure neben Kadmiumoxalat und citrat. II. Natriumchlorid und Kadmiumsulfat von C. M. C. Gordon, L. J. Henderson und W. L. Harrington.

— und **Heimrod** (G. W.). Ueber die Genauigkeit des verbesserten Voltameters. 1902; 8°.

— and **Lewis** (G. N.). Some electrochemical and termochemical relations of zinc and cadmium amalgams. 1898; 8°.

— and **Merigold** (B. S.). On the cuprosammonium bromides and the cuprammonium sulphocyanates. 1897: 8°.

— — A new investigation concerning the atomic weight of uranium. 1902; 8°.

— and **Oenslager** (G.). III. On the cupriammonium double salts. 8°.

— and **Parker** (H. G.). On the occlusion of baric chloride by baric sulphate. 1894; 8°.

— — A revision of the atomic weight of magnesium. 1896; 8°.

— and **Rogers** (E. F.). On the occlusion of gases by the oxydes of metals. 1893; 8°.

— — A revision of the atomic of zinc. First paper: The analysis of zinc bromide. 1895; 8°.

— and **Shaw** (H. G.). On the cupriammonium double Salts. 1893; 8°.

— and **Singer** (S. K.). The quantitative separation of hydrochloric and hydrocyanic acids. 1902; 8°.

— and **Stull** (W. N.). The speed and nature of the reaction of bromine upon oxalic acid. 1902; 8°.

— (J. **Trowbridge**) und. The temperature and ohmic resistance of gases during the oscillatory electric discharge. 1897; 8°.

— — The effect of great current strength on the conductivity of electrolytes. 1897; 8°.

— und **Whitridge** (A. H.). II. On the cupriammonium double salts. 1894; 8° (*dal sig. T. W. Richards per il 1° Premio Vallauri*).

Trabucco (G.). La geologia e l'agricoltura. Firenze, 1902; 8° (*dall'A.*).

Dal 7 al 21 Dicembre 1902.

* **Bidrag** till Sverges Medeltidshistoria tillegnade C. G. Malmström den 2 November 1902, af historiska Seminariet vid Upsala Universitet. Upsal, 1902; 8° (*dall'Univ. di Upsala*).

Calendario del Santuario di Pompei. Basilica pontificia del SS. Rosario. Valle di Pompei, 1903; 16°.

* **Censimento** della Popolazione del Regno al 10 febbraio 1901. Vol. I. Popolazione dei comuni e delle rispettive frazioni divisa in agglomerata e sparsa e popolazione dei mandamenti amministrativi. Roma, 1902; 8° (*dalla Direz. Gen. della Statistica*).

** **Encyclopaedia** Britannica. Vol. 30, 31. Edinburgh & London, 1902; 4°.

Ferri (A.). Antichità. Rieti. 1898; 8°.

— Antichità. — In Sabina. Rieti, 1898; 8° (*dall'A. per il XIII premio Bressa*).

Finocchiaro-Sartorio (A.). La comunione dei beni tra coniugi nella storia del diritto italiano. Palermo, 1902; 8° (*dall'A.*).

Manno (G.). Lettere inedite del barone G. Manno a Pietro Martini (1835-66). Cagliari, 1902; 4° (*dal sig. Cav. Dott. Silvio Lippi Direttore del R. Archivio di Stato di Cagliari*).

Masi (E.). Asti e gli Alfieri nei ricordi della Villa di San Martino. Firenze, 1903; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Power (M.). Anglo-Jewish Calendar for every day in the Gospels. London, 1902; 8° (*dall'A. per il XIII premio Bressa*).

* **Urkunder** och Författningar angående Donationer vid Upsala Kongl. Universitet. På uppdrag af det större Akademiska Konsistoriet samlade och utgifna af Th. Brandberg och J. von Bahr. Upsala, 1902; 8° (*dall'Università di Upsala*).

Dal 14 al 28 Dicembre 1902.

Colomba (L.). Sulla presenza della dispersione nei pirosseni giadeitoidi in rapporto colla loro composizione chimica. Padova, 1902; 8° (*dall'A.*).

Dichiara (F.). La cura elettrica dei fibromi dell'utero. Palermo, 1902; 8° (*Id.*).

Helmert (F. R.). Ueber die Reduction der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein gemeinsames Niveau. Berlin, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Penzig (O.). I prodotti vegetali del Mercato di Buitenzorg (Giava). Genova, 1898; 8°.

— Sopra una falsificazione singolare osservata nel cavolfiore. Genova, 1900; 8°.

— Cenni storici sull'Orto ed Istituto Botanico della R. Università di Genova. Genova, 1900; 8°.

— Note sul genere " Mycosyrinx ". Genova, 1900; 8°.

— Cenni sulla vita e sulle opere di Antonio Piccone. Genova, 1901; 8°.

— Beiträge zur Kenntniss der Gattung Epirrhizanthes Bl. Leide, 1901; 8°.

— Die Fortschritte der Flora des Krakatau. Leide, 1902; 8°.

— Note di Teratologia vegetale. Genova, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrisp.*).

— et **Saccardo** (P. A.). Diagnoses fungorum novorum in insula Java Collectorum. Genuae, 1902; 8° (*Id.*).

Petraroja (L.). Metamorfosi del modello cartilagineo primitivo delle ossa. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*)

Dal 21 Dicembre 1902 al 4 Gennaio 1903.

Busch (W.). Die Beziehungen Frankreichs zu Oesterreich und Italien zwischen den Kriegen von 1866 und 1870-71. Tübingen, 1900; 4° (*dall'Università di Tübingen*).

Dareste (R.). Le Code babylonien d'Hammourabi. Paris, 1902; 4° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Beauvoir (J. M.). Pequeño diccionario del idioma Fueguino-Ona. Con su correspondiente Castellano. 1ª y 2ª parte. Por un Misionero Salesiano de la Terra del Fuego. Buenos Ayres; 8° (*dal Sac. Paolo Ubaldi*).

Einaudi (L.). Questioni intorno all'imposta delle aree edilizie. Torino, 1900; 1 fasc. 8°.

— Un Principe mercante. Studio sulla espansione coloniale italiana. Torino, 1900; 1 vol. 8°.

— La rendita Mineraria. Torino, 1900; 1 vol. 8°.

— Salvatore Cognetti de Martiis. Bologna, 1901; 1 fasc. 8°.

— Studi sugli effetti delle imposte. Contributo allo studio dei problemi tributari municipali. Torino, 1902; 1 fasc. 8° (*dall'A.*).

Gramantieri (D.). Raffaello. Pesaro, 1902; 8° (*Id.*).

Jannacone (P.). Sullo sciopero nei servizi pubblici. Torino, 1902; 8° (*Id.*).

Lange (K.). Der schlafende Amor des Michelangelo. Tübingen, 1898; 4° (*dall'Università di Tübingen*).

Schleich (G.). Burkard David Manchart. Tübingen, 1897; 4° (*Id.*).

Schwabe (L.). Die kaiserlichen decennalien und die alexandrinischen Münzen. Tübingen, 1896; 4° (*Id.*).

Dal 28 Dicembre 1902 all'11 Gennaio 1903.

Allievi (L.). Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. Roma, 1902; 4° (*dall'A. per il premio Vallauri*).

Borredon (G.). La legge del sistema planetario o l'armonia del moto dei suoi corpi. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*).

Hugues (L.). Un seul champignon sur le Globe. Port-Louis, Maurice, 1902; 8° (*Id.*).

Koelliker (A.). Die Golgifeier in Pavia. Jena, 1902; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Lemoine (E.). Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

Olivero (G. B.). Trattato di astronomia basato sul sistema solare stabilito dalla curva 8 (meridiana del tempo medio). Torino, 1902; 4° (*dall'A. per il premio Vallauri*).

Pirotta (R.) e **Chiovenda** (E.). Illustrazioni di alcuni erbarii antichi Romani. Genova, 1902; 8° (*dal sig. R. Pirotta Socio corrispondente dell'Accademia*).

Spoltore (N.). La trisezione dell'angolo. Vasto, 1901; 8°.

— Il moto perpetuo ossia guadagno contemporaneo di forza e velocità nei movimenti delle leve. Vasto, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

Dal 4 al 18 Gennaio 1903.

Boselli (P.). Discorso d'inaugurazione pronunziato al IV Congresso Nazionale delle Società Economiche, tenutosi in Torino il 14 ottobre 1902. Torino, 1902; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Flasch (A.), Heinrich von Brunn. München, 1902; 4° (*dalla k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*).

Giusta (A.). Inchiesta sul riposo festivo. Torino, 1902; 8° (*dall'A.*).

Phöhlmann (R.). Griechische Geschichte im neunzehnten Jahrhundert. München, 1902; 4° (*dalla k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*).

Savio (F.). Le origini del Monastero di S. Stefano d'Ivrea. Pinerolo, 1902; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Dall'11 al 25 Gennaio 1903.

Macchiati (L.). Sur la photosynthèse en dehors de l'organisme. Paris, 1902; 4° (*dall'A.*).

Voit (C. v.). Max von Pettenkofer zum Gedächtniss. München, 1902; 4° (*dalla R. Accad. delle Scienze*).

Dal 18 Gennaio al 1° Febbraio 1903.

** **Encyclopaedia** Britannica. Vol. 32, 33. London, 1902; 4°.

Schuyten (M. C.). Paedalogisch Jaarbock. 3de en 4de Jaargang, 1902-1903. Leipzig, 8° (*dall'A.*).

* *Dall'Università di Heidelberg :*

Anzeige der Vorlesungen, welche im Sommer-Halbjahr 1902, u. Winter-Halbjahr 1902/1903 auf Grossh. Badischen Ruprecht-Karls-Universität zu Heidelberg. Heidelberg, 1902; 8°.

Baer (A.). Ueber die Entwickelung der Mannheimer Eisen- und Maschinenindustrie mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiterverhältnisse. Heidelberg, 1901; 8°.

Baur (P.). Eileithyia. Tübingen, 1901; 8°.

Becker (C. H.). Beiträge zur Geschichte Aegyptiens unter dem Islam. Strassburg, 1902; 8°.

Bergmann (R.). Geschichte der ostpreussischen Stände und Steuern von 1688 bis 1704. Leipzig, 1901; 8°.

Brach (A.). Giottos Schule in der Romagna. Strassburg, 1902; 4°.

Damnitz (G. v.). Die volkswirtschaftliche Bedeutung der Feldbahnen. Berlin; 8°.

Daur (A.). Das alte deutsche Volkslied besonders des 16 Jahrhunderts nach seinen formelhaften Elementen betrachtet. Berlin, 1902; 8°.

Delpy (E.). Die Legende von der heiligen Ursula in der Kölner Malerschule. Köln, 1901; 8°.

Dohm (R.). Beiträge zum Aktienwessen. Heidelberg, 1901; 8°.

Ernst (Ph. G.). Die Heroide in der deutschen Litteratur. Heidelberg, 1901; 8°.

Eichhorst (M.). Die Lage der Bergarbeiter im Saargebiet. Eisleben, 1901; 8°.

Ellering (B.). Die Allmenden im Grossherzogtum Baden. Tübingen, 1902; 8°.

Flecken (F.). Der Selbstschutz der Landwirte bei zunehmender Industrie. Heidelberg, 1901; 8°.

Forkert (F. M.). Beiträge zu den Bildern aus dem altfranzösischen Volksleben auf Grund der " Miracles de Nostre Dame „ par personnages. Bonn, 1901; 8°.

Gätche (M.). Das haufmännische Auskunftswesen in den Vereinigten Staaten von Amerika und in Grossbritannien. Hamburg, 1901; 8°.

Gerzon (J.). Die judisch-deutsche Sprache. Köln, 1902; 8°.

Greiss (O.). Die wirtschaftliche und sociale Bedeutung der Latifundien unter besonderer Bezugnahme auf Böhmen. Heidelberg, 1902; 8°.

Grosse (R.). Das Postwesen in der Kurpfalz im 17. und 18. Jahrhundert. Tübingen, 1902; 8°.

Hamilton (N.). Die Darstellung der Anbetung der heiligen drei Könige in der toskanisken Malerei von Giotto bis Lionardo. Strassburg, 1901; 4°.

Hausrath (A.). Geschichte der teologischen Facultät zur Heidelberg im neunzehnten Jahrhundert. Heidelberg, 1901; 4°.

Hechtenberg (K.). Das Fremdwort bei Grimmelshausen. Heidelberg, 1901; 8°.

Hennemann (H.). Die Mundart der sogenannten Grunddörfer in der Grafschaft Mansfeld. Heidelberg, 1901; 8°.

Höxter (J.). Die Vorgeschichte und die beiden ersten Jahre des " immerwährenden „ Reichstags zu Regensburg. Heidelberg, 1901; 8°.

Jaffé (E.). Die Arbeitstheilung im englischen Bankwesen. Heidelberg, 1902; 8°.

Kanter (H.). Die Entwicklung des Handels mit gebrauchsfertigen Waren von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis 1866 zu Frankfurt a. M. Tübingen, 1901; 8°.

Klee (A.). Die Landarbeiter in Mittel- und Niederschlesien nach den Erhebungen des Evangelisch-sozialen Kongresses. Tübingen, 1902; 8°.

Knapp (O.). Die Ausbreitung des flektierten Genitivs auf -s im Mittelenglischen. 1902; 8°.

Kohlrausch (E.). Die Lehre vom Rechtsirrtum in Theorie und Praxis des heutigen Strafrechts. Potsdam; 8°.

Kopp (H.). Die Bühnenleitung Aug. Klingemanns in Braunschweig. Hamburg u. Leipzig, 1901; 8°.

Krug (M.). Die Kartographie der Meeresströmungen in ihren Beziehungen zur Entwicklung der Meereskunde. Bremen; 8°.

Lilienfein (H.). Die Anschauungen von Staat und Kirche im Reich der Karolinger, ein Beitrag zur mittelalterlichen Weltanschauung. Heidelberg, 1902; 8°.

Manes (A.). Die Geschichte der deutschen Haftpflichtversicherung. Leipzig, 1902; 8°.

Miessner (W.). Ludwig Tiecks Lyrik. Berlin, 1902; 8°.

Munzinger (L.). Die Entwicklung des Inseratenwesens in den deutschen Zeitungen. Heidelberg, 1901; 8°.

Nagel (O.). Der Schöppenmeister Hieronymus Roth. Leipzig, 1901; 8°.

Rehm (V.). Die Palatalisierung der Gruppe 'sc' im Altenglischen. Heidelberg, 1901; 8°.

Richthofen (E. v.). Ueber die historischen Wandlungen in der Stellung der autoritären Parteien zur Arbeiterschutzgesetzgebung und die Motive dieser Wandlungen. Heidelberg, 1901; 8°.

Rodakiewicz (A.). Die galizischen Bauern unter der polonischen Republik. Brünn, 1902; 4°.

Roedel (Ph.). Victor Hugo und der Conservateur littéraire. Heidelberg, 1902; 8°.

Rose (E.). Danziger Getreidehandel vom Beginn bis zur Mitte des XIX. Jahrhunderts. Heidelberg, 1901; 8°.

Rothes (W.). Die Darstellungen des Fra Giovanni Angelico aus dem Leben Christi und Mariae. Ein Beitrag zur Ikonographie des Meisters. Strassburg, 1902; 4°.

Sachse (P.). Fichte's nationalökonomische Anschauungen. Heidelberg, 1902; 8°.

Scherer (V.). Die Ornamentik bei Albrecht Dürer. Strassburg, 1902; 8°.

Snyder (H. A.). Thoreau's Philosophy of Life with special consideration of the influence of Hindoo Philosophy. s. a. l.; 8°.

Stöpel (K. T.). Reformvorschläge zur Organisation der deutschen Kaliindustrie. Heidelberg, 1902; 8°.

Sutro (E.). Die kaufmännische Krediterkundigung. Heidelberg, 1902; 8°.

Uhde (H.). Der Mannheimer Shakespeare. Ein Beitrag zur Geschichte der ersten deutschen Shakespeare-Uebersetzungen. Berlin, 1902; 8°.

Veltman (C.). Unsere Holzzollpolitik. Heidelberg, 1902; 8°.

Wahl (G.). Johann Christoph Rost. Leipzig, 1902; 8°.

Weymann (K. J.). Die aethiopische und arabische Uebersetzung des Pseudocallisthenes. Kirchhain N. L., 1901; 8°.

Wittichen (F. K.). Preussen und England in der europäischen Politik 1785-1788. Heidelberg, 1902; 8°.

Zorell (S.). Die Entwicklung des Parochialsystems bis zum Ende der Karolingerzeit. Mainz, 1901; 8°.

Zwiklitz (L.). Die Bestrebungen zur Hebung des Brennereigewerbes im deutschen Reich durch Gesetzebung und genossenschaftlichen Zusammenschluss. Heidelberg, 1901; 8°.

Dal 25 Gennaio all'8 Febbraio 1903.

Giorgi (G.). Unità razionali di elettromagnetismo. Napoli, 1901; 8°.

— La trazione elettrica sulle ferrovie. Torino, 1902; 8°.

— Il sistema assoluto M. KG. S. Roma, 1903; 8°.

— Il funzionamento del rocchetto di Rumhkorff. Roma, 1903; 8° (*dall'A.*).

Grassi (G.). Sul calcolo delle dinamo e degli alternatori. Torino, 1902; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Libellus post saeculum quam Joannes Bolyai de Bolya anno 1802 A. D. 18 Kal. Januarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem etc. Claudiopoli, 1902; 4° (*dono dell'Università di Klausenburg*).

Dall' Università di Heidelberg:

Adams (H.). Ueber Fremdkörper in der Speiseröhre. Heidelberg, 1901; 8°.
Amburger (N.). Zur operativen Behandlung der Brustwand- und Mediastinalgeschwülste. Tübingen, 1901; 8°.
Amos (M.). Ueber Diamidolutidin und Dioxylutidin. Heidelberg, 1902; 8°.
Arndts (J.). Beiträge zur Kenntnis des Benzoins. Heidelberg, 1901; 8°.
Arnsperger (L.). Ueber den Rose'schen Kopftetanus. Heidelberg, 1901; 8°.
Aufhäuser (D.). Ueber die Hydrazide der beiden Oxypropionsäuren. Heidelberg, 1902; 8°.
Baermann (A.). Beiträge zur Kenntnis der aromatischen Aldehyde. Berlin, 1902; 8°.
Beck (C.). Zur Säuferleber im Kindesalter. Berlin, 1901; 8°.
Beindl (C.). Untersuchungen über hochmolekulare Amidosäuren. München, 1901; 8°.
Becker (A.). Interferenzröhren für elektrische Wellen. Heidelberg, 1901; 8°.
Benrath (A.). Ueber die Umsetzung von Metallverbindungen des Dibenzoylhydrazins mit Jod und halogenhaltigen Substanzen. Heidelberg, 1902; 8°.
Bopp (K.). Antoine Arnauld der Grosse Arnauld als Mathematiker. Leipzig, 1902; 8°.
Bosch (W.). Organische Quecksilber-Verbindungen. Heidelberg, 1901; 8°.
Broichsitter (G.). Ueber die Einwirkung von Aether und Aluminiumchlorid auf Pseudocumidin sowie über einige neue Derivate des 3-5-Diaethylphenol-1. Heidelberg, 1901; 8°.
Caldemeyer (H.). Ueber die osteoplastischen Operationen bei Empyem des sinus frontalis. Lengerich i. W., 1901; 8°.
Cäsar (W.). Einwirkung von Hydrazinhydrat auf alkyl-substituierte Malonester. Heidelberg, 1901; 8°.
Dallwig (G.). Ein Beitrag zur Kenntnis der Chinole. Marburg, 1901; 8°.
Darmstaedter (E.). Ueber das Hydrazid der n-Tetramethylendicarbonsäure. Heidelberg, 1902; 8°.
Dick (J. W.). Zur Casuistik traumatischer Pankreascysten. Heidelberg, 1902; 8°.
Ebler (E.). Ueber die Anwendbarkeit der Hydroxylamin- und Hydrazinsalze in der qualitativen Analyse. Heidelberg, 1902; 8°.
Franzen (H.). Ueber 2, 4, 5 Trimethyldibenzylamin und 2, 4, 5 Trimethyldibenzylhydrazin. Heidelberg, 1901; 8°.
Friedmann (C.). Beiträge zur Casuistik und Statistik der extragenitalen syphilitischen Primäraffekte. Heidelberg, 1902; 8°.
Friedrich (H. A.). Beiträge zur Blattanatomie der Acanthaceen. Heidelberg, 1901; 8°.
Fuchs (J.). Ueber Wasserstoffabspaltung aus Dihydrolutidindikarbonsäureester dur Erhitzen bei Gegenwart von Palladiummohr sowie eine Umlagerung desselben Esters mittels konzentrierter Salzsäure. Heidelberg, 1902; 8°.
Fuchs (W.). Ueber direkte Anlagerung von getrocknetem Brom an Kohlenhydrate. Heidelberg, 1902; 8°.

Gierke (E.). Ueber den Eisengehalt verkalkter Gewebe unter normalen und pathologischen Bedingungen. Berlin, 1902; 8°.

Goldschmidt (R.). Untersuchungen über Eireifung, Befruchtung und Zelltheilung bei Polystomum integerrimum Rud. Leipzig, 1902; 8°.

Gruschwitz (W.). Ueber die Darstellung äthylierter Aniline durch Einwirkung von Aether und Aluminiumchlorid auf Anilin. Heidelberg, 1901; 8°.

Heckel (W.). Ueber das Verhalten des Benzhydrols und Benzoins bei höheren Temperaturen. Heidelberg, 1902; 8°.

Heimann (J.). Beiträge zur Kenntnis der Ortho- und Metaphosphorsäure. Heidelberg, 1902; 8°.

Herz (K.). Ein Fall von Sklerodermie. Schwelm i. W., 1902; 8°.

Herzog (E.). Beiträge zur Kenntnis der hochmolekularen ungesättigten Fettsäuren. Heidelberg, 1902; 8°.

Hesse (F. H.). Zur Kenntniss der Granula der Zellen des Knochenmarkes, bezw. der Leukocyten. Berlin, 1902; 8°.

Heynemann (L. H.). Ueber das Hydrazid der Pyrazol-3, 4, 5-Tricarbonsäure. Hannover, 1901; 8°.

Hirschel (G.). Ueber Strumitis bey Typhus abdominalis. Heidelberg, 1901; 8°.

Hoedt (W.). Beiträge zur Kenntnis der fettaromatischen Ketone. Heidelberg, 1901; 8°.

Horowitz (A.). Ueber den anatomischen Bau und das Aufspringen der Orchideenfrüchte. Cassel, 1902; 8°.

Joseph (E.). Die Morphologie des Blutes bei der akuten und chronischen Osteomyelitis. Tübingen, 1902; 8°.

Keller (H.). Dynamische Untersuchungen über die Bildung von Azofarbstoffen. Heidelberg, 1902; 8°.

Keuthe (W.). Ueber Entwicklungshemmung pathogener Bacterien insbesondere von Typhus durch Medikamente. Heidelberg, 1902; 8°.

Klenk (K.). Untersuchungen über Bromderivate des Safrols. Heidelberg, 1901; 8°.

Knothe (E.). Vergleichende Anatomie der unbenetzbaren Blätter. Berlin, 1902; 8°.

Kohen (W.). Quantitative Trennungen mit Wasserstoffsuperoxyd Persulfat und Hydroxylamin. Heidelberg, 1902; 8°.

Küppers (G.). Ueber die Reduktion von m- und o- Oxybenzaldazin in alkalischer Lösung. Heidelberg, 1901; 8°.

Laan (B. v. der). Ueber die Hydrazide und Azide von Alkylglycolsäuren. Heidelberg, 1902; 8°.

Laske (V.). Ueber die Einwirkung von Hydroxylamin und Saurehydraziden auf Carbodiphenylimid, Carboditolylimid, Phenylcyanamid und Dicyan. Wien, 1901; 8°.

Lossen (H.). Ueber das primäre Carcinom und Sarkom der Vagina. München, 1902; 8°.

Löw-Beer (O.). Studien über die Constitution der Oxyazokörper. Heidelberg, 1901; 8°.

Marschall (F.). Ueber die Einwirkung von Hydrazin auf Bakterien. Heidelberg, 1902; 8°.

Marx (H.). Ueber Fettgewebs-Nekrose und Degeneration der Leber bei Pankreatitis haemorrhagica. Berlin, 1901; 8°.

Merk (A.). Beiträge zur Pathologie und Chirurgie der Gallensteine. Jena, 1902; 8°.

Mott (O. E.). Ueber Benzylmalonhydrazid. Heidelberg, 1900; 8°.

Mottek (S.). Beiträge zur Kenntnis der kondensierenden Wirkung organischer Amine. Heidelberg, 1902; 8°.

Müller (K.). Die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Mandelsäureaethylester. Heidelberg, 1902; 8°.

Müller (O.). Untersuchungen über die Abhängigkeit des Pseudophenol-Charakters von der Stellung der Halogenatome in der Seitenkette. Heidelberg, 1901; 8°.

Mündler (M.). Ueber Aminolyse. Heidelberg, 1901; 8°.

Nehrkorn (A.). Histologische und Experimentelle Beiträge zur Frage der Schnittführung und Nahtmethode bei laparotomien. Tübingen, 1902; 8°.

Neumayer (T.). Ueber die Reindarstellung der Monoglyceride, $C_3H_3(O.C_nH_{2n-1}O)(OH)_2$. Heidelberg, 1902; 8°.

Noethlichs (R.). Ueber Condensationen von Oxymethylenkampher mit Acetessigester. Heidelberg, 1901; 8°.

Nohl (E.). Zur Kenntnis der Chininamaurose. Hamburg u. Leipzig, 1901; 8°.

Otte (F.). Zur Kenntnis ungesättigter Phenoläther. Heidelberg, 1902; 8°.

Page (T. Y.). Ueber den Nachweis von Tuberkelbacillen in den Faeces. Heidelberg, 1902; 8°.

Pagenstecher (A. H.). Ueber Opticustumoren. Lepizig, 1902; 8°.

Pauli (H.). Ueber Orthochlorbenzylhydrazin. Heidelberg, 1901; 8°.

Pfeil (K.). Ueber die Aufschliessung der Silikate und anderer schwer zersetzbarer Mineralien mit Borsäureanhydrid. Heidelberg, 1901; 8°.

Pfister (M.). Ueber die reflektorischen Beziehungen zwischen Mammae und Genitalia muliebria. Berlin, 1902; 8°.

Pierstorff (H.). Zur Kenntnis der Styrole. Heidelberg, 1901; 8°.

Preiss (P.). Beitrag zur Casuistik der neuropathischen Fracturen. Heidelberg, 1901; 8°.

Pringsheim (H.). Ueber das Hydrazid der Pentamethylendicarbonsäure. Heidelberg, 1901; 8°.

Pugin (M. H.). Ueber das Hydrazid der Picolinsäure und das a-Amidopyridin. Heidelberg, 1901; 8°.

Riedel (A.). Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 3, 5 Dinitrobenzoësäure-Aethylester. Heidelberg, 1902; 8°.

Riffart (J.). Ueber Einwirkung von Aethylnitrit auf Amidoacetylaceton. Heidelberg, 1901; 8°.

Roediger (K.). Weitere Beiträge zur Statistik des Zungencarcinoms. Tübingen, 1901; 8°.

Rubin (A.). Beiträge zur Anwendung des Murphy'schen Darmknopfes. Karlsruhe, 1901; 8°.

Schilling (J.). Beiträge zur Chemie des Thoriums. Köln, 1901; 8°.

Schmidt (W.). Ueber den schnellenden Fingers. Heidelberg, 1902; 8°.

Schröder (B.). Untersuchungen über Gallertbildungen der Algen. Heidelberg, 1902; 8°.

Schulze (H.). Beiträge zur Blattanatomie der Rutaceen. Halle a. s., 1902; 8°.

Sichling (H.). Die Reaktionsgeschwindigkeit bei der elektrolytischen Reduktion. Heidelberg, 1902; 8°.

Simonsohn (M.). Ueber den Gefässbündelverlauf in den Blumenblättern der Liliaceen. Heidelberg, 1901; 8°.

Soetbeer (F.). Die Secretionsarbeit der kranken Niere. Strassburg, 1902; 8°.

Speyer (E.). Zur Kenntnis der Additionsfähigkeit ungesättigter Verbindungen. Heidelberg, 1901; 8°.

Spuler (R.). Ueber die feinere Histologie der Chondrome. Jena, 1902; 8°.

Starck (H.). Die Divertikel der Speiseröhre. Leipzig, 1900; 8°.

Stern (J.). Beiträge zur Kenntnis einiger Diketone. Heidelberg, 1902; 8°.

Steudel (H.). Eine neue Methode zum Nachweis von Glukosamin und ihre Anwendung auf die Spaltungsprodukte der Mucine. Strassburg, 1902; 8°.

Stoecker (M.). Untersuchungen über Phenilseleninsäure $C_6H_5 . SeO_2H$ und Phenylselenosäure $C_6H_5 . SeO_3H$. Heidelberg, 1901; 8°.

Storp (W.). Ueber den Einfluss von Alkylgruppen auf die Abspaltung der Halogene aus dem Benzolkern. Kettwig, 1901; 8°.

Strasser (P.). Beitrag zur Kenntnis der systematisierten Naevi. Heidelberg, 1901; 8°.

Tetzner (F.). Ueber die Salzsäure-Additionsprodukte der Alkyliden-Desoxybenzoine. Heidelberg, 1902; 8°.

Thaler (O.). Ueber in die in der Heidelberger chirurgischen Klinik des Geh. R. Czerny 1889-1899 Behandelten Fälle von Carcinoma penis. Salzungen, 1901; 8°.

Valdek (H. Ostersetzer gen.). Dynamische Untersuchungen über die Bildung von Azofarbstoffen aus einigen Naphtylaminsulfosäuren und Diazobenzolsulfosäure. Darmstadt, 1901; 8°.

Völcker (F.). Das Caput obstipum eine intrauterine Belastungsdeformität. Tübingen, 1901; 8°.

Wagner (Ed.). Ueber Condensation vom Dekamethylendiamin mit Aldehyden und Ketonen. Heidelberg, 1901; 8°.

Weber (R. H.). Elektromagnetische Schwingungen in Metällröhren. Leipzig, 1902; 8°.

Witkowski (A.). Ueber Mycosis fungoides. Heidelberg, 1902; 8°.

Wölfel (G.). Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Polemoniaceen. Heidelberg, 1901; 8°.

Woltze (K.). Ueber äthyliertes m-Kresol. Heidelberg, 1902; 8°.

Wright (E.). Die foyaitisch-theralitischen Eruptivgesteine der Insel Cabo Frio, Rio de Janeiro, Brasilien. Wien, 1901; 8°.

Zinsser (G.). Ueber die Ueberführung der Hydrazide der n-Buttersäure und α-Naphtoësäure in heterocyklische Verbindungen. Heidelberg, 1901; 8°.

Dal 1° al 15 Febbraio 1903.

Brandileone (F.). Note sull'origine di alcune istituzioni giuridiche in Sardegna durante il Medio Evo. Firenze, 1902; 8° (*dall'A.*).

Cais de Pierlas (E.) et **Saige** (G.). Chartrier de l'Abbaye de Saint-Pons hors les murs de Nice publié par ordre de S. A. S. le Prince Albert Ir de Monaco. Monaco, 1903; 4° (*dono di S. A. S. il principe Alberto I di Monaco*).

Gonçalves de Magalhães (D. J.). A Confederação dos Tomoyos. Poema. Rio de Janeiro, 1856; 4° (*dalla Bibliotheca Nacional*).

Govone (U.). Il generale Giuseppe Govone. Frammenti di memorie. Torino, 1902; 8° (*dall'A.*).

Lilla (V.). Filosofia del diritto. Milano, 1903; 16° (*Id.*).

Maltese (F.). La filosofia in rapporto alla vita sociale. Prolusione. Catania, 1902; 8°.

— Scienza dei poteri. Catania, 1903; 8° (*Id.*).

Manara (U.). Delle Società e delle Associazioni commerciali. Vol. 2ª, sez. 1ª. La pretesa Personalità giuridica delle società commerciali. Torino, 1902; 8° (*Id.*).

Peregrino da Silva (M. C.). Relatorio apresentado ao Sr. Dr. Epitacio da Silva Pessoa Ministro de Estado da Justiça e Negocios Interiores (1900). Rio de Janeiro, 1901 (*dalla Bibliotheca Nacional*).

Polacco (V.). La famiglia del naturalizzato secondo il codice civile del Regno. Padova, 1882; 8°.

— L'obbligo della restituzione dei frutti nella garantia per evizione. Bologna, 1884; 8°.

— Prelezione ad un Corso di Istituzioni di diritto civile letta nella R. Università di Padova. Padova, 1885; 4°.

— Luigi Bellavite. Bologna, 1885; 8°.

— La funzione sociale dell' odierna legislazione civile. Camerino, 1885; 8°.

— Della divisione operata da ascendenti fra discendenti. Verona-Padova, 1885; 1 vol. 8°.

— Ancora sull'apparente antinomia fra l'art. 1400, 1° comma e l'art. 1969, n. 4 del Codice civile. Bologna, 1885; 8°.

— G. P. Chironi. Sociologia e Diritto civile. Recensione. Milano-Torino, 1885; 8°.

— Una questione in materia di subingresso ipotecario legale. Venezia, 1886; 8°.

— Garanzia di evizione nelle espropriazioni forzate. Milano, 1887; 8°.

— E. Cimbali. Della capacità di contrattare secondo il Codice civile e di commercio. Torino, 1887; 8°.

— Sulla misura del contributo dei coniugi ai domestici bisogni secondo l'art. 138, 1° capov., 1423, 1426 Cod. civ. Torino, 1887; 8°.

— Della dazione in pagamento. Vol. 1°. Padova-Verona, 1888; 8°.

— H. Fitting. Die Grundlagen der Beweislast. Bologna, 1889; 8°.

— Il Diritto romano nel recente progetto di codice civile germanico. Padova, 1889; 8° (*dall'A.*).

Polacco V.). Sull'interpretazione della legge e sulle obbligazioni naturali. Milano, 1890; 8°.
— Note ed appunti sulle Istituzioni di Diritto civile italiano. Roma, 1890; 8°.
— La nuova legge sui Probi-Viri e la capacità giuridica delle donne e dei minorenni. Milano, 1893; 8°.
— Leone Bolaffio. Saggio di una teoria generale dei contratti commerciali secondo il Diritto positivo italiano. Milano, 1894; 8°.
— La questione del divorzio e gli Israeliti in Italia. Padova-Verona, 1894; 1 vol. 8°.
— La " culpa in concreto „ nel vigente diritto civile italiano. Padova, 1894; 8°.
— Note ed appunti sul sistema di diritto civile italiano di E. Gianturco. Milano, 1896; 8°.
— Del matrimonio contratto sotto condizione od a termine. Venezia, 1896; 8°
— Di un caso singolare di successione fra coniugi. Padova, 1896; 8°.
— Antonio Pertile. Commemorazione. Venezia, 1897; 8°.
— Le eleggibilità nei Concorsi universitari. Rocca San Casciano, 1897; 8°.
— Pareri e voti sul disegno di legge per la conservazione della Laguna di Venezia. Padova, 1898; 8°.
— L'unicità di stirpe in rapporto al diritto di rappresentazione. Torino, 1898; 8°.
— Le obbligazioni nel diritto civile italiano. Padova-Verona, 1899; 1 vol. 8°.
— Note sulle perizie civili comparate alle penali. Venezia, 1900; 8°.
— Il progetto di legge sull' emigrazione, e l'art. 11, 1° comma, n° 3 del Codice civile. Venezia, 1901; 8°.
— La dispensa dalle tasse nelle Università. Padova, 1902; 8°.
— Sul numero legale dei professori ordinari nella R. Università di Padova. Padova, 1902; 8°.
— Contro il divorzio. Lezione. Padova-Verona, 1902; 8° (*dall'A.*).

Dall'8 al 22 Febbraio 1903.

Castelnau (M.). Nouvelles machines à vapeur à très hautes tensions système Castelnau. Paris, 1903; 8° (*dall'A.*).
Donnadieu (A.-L.). L'œil et l'objectif. Étude comparée de la vision naturelle et de la vision artificielle. Paris; 8°.
— La photographie des objets immergés. Paris; 8° (*Id.*).
Gautier (R.). Résumé des Observations météorologiques faites au fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1901. Genève, 1902; 8°.
— Résumé météorologique de l'année 1901 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. Genève, 1902; 8° (*Id.*).
Grohmann (J. C.). Recueil de dessins d'une exécution peu dispendieuse. Venise, 1805; 4° (*dono dell'Ing. E. Brunati*).
Lebon (E.). Sur un manuscrit d'un Cours de J.-N. Delisle au Collège Royal. Paris, 1902; 8° (*dall'A.*).
Lyon (T. L.). Alfalfa experiences. Lincoln, Nebr., 1902; 8° (*Id.*).

Mannoury (G.). Over de beteenkenis der wiskundige logica voor de philosophie. Rotterdam; 8° (*dall'A.*).

Nöther (M.). Ueber die singulären Elemente der algebraischen Kurven. Leipzig, 1902; 8°.

— Rationale Reduction der Abel'schen integrale. Stockholm, 1902; 4° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Oddone (E.). Sui deflettometri. Modena, 1902: 8°.

— Su di un apparecchio per lo studio sperimentale delle onde meccaniche longitudinali nell'aria, nel suolo e nell'acqua. Modena, 1902; 8°.

— Esiste una periodicità nei fenomeni sismici? Modena, 1902; 8° (*dall'A.*).

Schott (Chas A.). The Eastern oblique arc of the United States and osculating Spheroid. Washington, 1902; 4° (*dal U. S. Coast and Geodetic Survey O. H. Tittmann Superintendent*).

Taramelli (T.). Di alcune condizioni tectoniche nella Lombardia occidentale. Roma, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 15 Febbraio al 1° Marzo 1903.

Benedetti (V.). La pedagogia della volontà. Studii filosofici. Milano, 1900; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Bruchi (A.). Le basi naturali della politica e del diritto. Pitigliano, 1902; 8° (*Id.*).

Cantarelli (L.). La Diocesi Italiciana da Diocleziano alla fine dell'impero occidentale. Roma, 1903; 4° (*dall'A. per il premio Gautieri di Storia*).

* *Catalogo* della Biblioteca del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio; 1 vol. e 1-3 supplemento. Roma, 1889-1902; 4 vol. 8°.

Cocchia (E.). Di una riforma razionale del nostro presente sistema di esami. Napoli, 1902; 4° (*dall'A.*).

D'Alfonso (N. R.). Il re Lear. Roma, 1900; 8°.

— Le anomalie del linguaggio e la loro educabilità. Roma, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

De-Nardi (P.). L'intuito giobertiano esaminato e discusso. Forlì, 1901; 8°.

— Sguardo sintetico alla figura di Vincenzo Gioberti. Forlì, 1901; 8°.

— Vincenzo Gioberti, 28-29 aprile 1901: Genesi, esposizione e varia fortuna della formola suprema Giobertiana. Forlì, 1901; 8°.

— Vincenzo Gioberti ed il panteismo. Forlì, 1901; 8°.

— Della psicologia cerebrale. Tre letture fatte nella Università di Bologna nel marzo 1890. Forlì, 1902; 8°.

— Meriti e demeriti del positivismo nel metodo, nella gnoseologia, logica, psicologica ed etica. Forlì, 1902; 8°.

— Rosmini e Kant. Studio comparativo e critico. Forlì, 1902; 8°.

— La filosofia come scienza nei suoi rapporti col positivismo francese, inglese ed italiano. Forlì, 1902; 8° (*Id.*).

Falchi (A.). Il pensiero giuridico d'Epicuro. Sassari, 1902; 8° (*Id.*).

Martini (A.). Fatti psichici e fatti fisiologici. Spirito e corpo. Ascoli Piceno, 1901-1902; parte I, 3 fasc. 8° (*Id.*).

Pernier (L.). Lavori eseguiti dalla Missione archeologica italiana nel palazzo di Phaestos dal 10 febbraio al 28 maggio 1902. Relazione al prof. L. Pigorini. Roma, 1903; 8° (*dal sig. L. Pigorini, Socio corrispondente*).

Puccini (R.). La morale studiata nei suoi fondamenti. Siena, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Salvadori (G.). Herbert Spencer e l'opera sua. Firenze, 1900; 8°.

— La scienza economica e la teoria dell'evoluzione. Saggio sulle teorie economico-sociali di Herbert Spencer. Firenze, 1901; 8°.

— L'etica evoluzionista. Studio sulla filosofia morale di Herbert Spencer. Torino, 1903; 8° (*Id.*).

Dal 22 Febbraio all'8 Marzo 1903.

Grassi (B.). Documenti risguardanti la storia della scoperta del modo di trasmissione della malaria umana. Milano, 1903; 8° (*dall'A.*).

Groth (H.). Zur Dynamik des Himmels. Hamburg, 1901; 8° (*dall'A. per il premio Vallauri*).

Guidi (C.). Sulla opportunità di una vigilanza del Municipio sulle costruzioni in " Beton „ armato e modo di esercitarla. Torino, 1902; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Haedicke (J.). Die Lösung des Rätsels von der Schwerkraft durch die Versuche von Huyghens. Leipzig, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

Klein (C.). Totalreflectometer mit Fernrohr-Mikroskop. Berlin, 1902; 8°.

— Die Meteoritensammlung der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 5. Februar 1903. Berlin, 1903; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Sars (G. O.). An Account of the Crustacea of Norway. Vol. IV, Copepoda Calandoida, Parts 13ª & 14ª. Bergen, 1903; 8° (*dalla Direzione del Museo di Bergen*).

** **Savoia** (S. A. R. Luigi Amedeo), **Cagni** (U.) e **Cavalli-Molinelli** (A.). La " Stella Polare „ nel mare artico, 1899-1900, 3ª ediz., Vol. 1°. Milano, 1903; 8°.

— Osservazioni scientifiche eseguite durante la spedizione della " Stella Polare „, Vol. 2°, 1899-1900. Milano, 1903; 8°.

Tommasina (Th.). Sur le mode de formation des rayons cathodiques et des rayons de Röntgen. Paris, 1902; 4°.

— Constatation d'un champ tournant électro-magnétique, produit par une modification hélicoïdale des stratifications, dans un tube à air raréfié. Paris, 1903; 4° (*dall'A.*),

* **Year-Book** of the Royal Society of London (1903). London; 8°.

Da 1° al 15 Marzo 1903.

D'Alfonso (N. R.). Elementi di grammatica logica per la 5ª Classe elementare e per la 1ª ginnasiale complementare e tecnica. Roma, 1900; 8° (*dall'A.*).

De Seta (D.). Il fondamento etico del diritto. Girgenti, 1902; 8° (*dall'A. per il premio di Filosofia Gautieri*).

** **Justinian-Augusti**. Digestorum seu Pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. I, fasc. 1, 2. Roma, Danesi editore, 1902; fol.

Martinetti (P.). Introduzione alla Metafisica. Torino, 1902; 8° (*dall'A. per il premio di Filosofia Gautieri*).

Dall' 8 al 22 Marzo 1903.

Fatio (V.). Sur un nouveau Corégone français (*Coregonus Bezola*) du lac du Bourget. Paris, 1888; 4°.

— Distribution, adaptation et variabilité des poissons en Suisse. Paris, 1898; 8°.

— Deux petits vertébrés nouveaux pour la Suisse. Genève, 1900; 8°.

— Trois exemplaires d'une forme particulière de " Tetrao Tetrix famelle „ peut-être femelles de " Tetrao medius „. Paris, 1901; 8°.

— Quelques vertébrés de Poissons provenant des fouilles du Schweizersbild. Zürich, 1901; 4°.

— Nouveautés mammalogiques tessinoises. Genève, 1902; 8°.

Dal 15 al 29 Marzo 1903.

Bonolis (G.). Salvemini Gaetano. La dignità cavalleresca nel Comune di Firenze. Firenze, 1896; 8°.

— Contributo alla storia delle assicurazioni in Firenze. Firenze, 1898; 8°.

— Sull'estrazione dei manoscritti antichi dalla Toscana. Firenze, 1899, 8°.

— Le associazioni in Italia avanti le origini del Comune. Torino, 1899; 8°.

— Sull'uso del " Tocco „ nelle esecuzioni personali dell' antico diritto fiorentino. Firenze, 1901; 8°.

— Intorno all'offerta reale. Notizie storiche. Modena, 1901; 8°.

— La giurisdizione della mercanzia in Firenze nel secolo XIV. Firenze, 1901; 8°.

— Svolgimento storico dell'assicurazione in Italia. Firenze, 1901; 8°.

— Les assurances sur la vie en droit international privé. Ouvrage traduit et annoté par J. Valery et J. Lefort. Paris, 1902; 8°.

— A proposito di alcuni documenti (" Lettres de Foire „) dell'Archivio di Ypres. Firenze, 1902; 8° (*dall'A.*).

Nigra (C.). La rassegna di Novara. Milano, 1903; 4° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Pascal (C.). Studi critici sul poema di Lucrezio. Roma-Milano, 1903; 8° (*dall'A.*).

** **Poole's Index** to periodical literature. Fourth supplement. From January 1 1897 to January 1 1902. London, 1903; 4°.

Tarozzi (G.). Idea di una scienza del bene. Firenze, 1901; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Dal 22 Marzo al 5 Aprile 1903.

Boggio (T.). Sull' integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali. Milano, 1902; 4° (*dall'A.*).

Celani (E.). Sopra un Erbario di Gherardo Cibo conservato nella R. Biblioteca Angelica di Roma. Genova, 1902; 8° (*Id.*).

Gola (G.). Lo zolfo e i suoi composti nell'economia delle piante. Genova, 1902; 8° (*Id.*).

Reynolds (O.). The sub-mechanics of the Universe. Cambridge, 1903; 8° (*Id.*).

Weinek (L.). Definitive Resultate aus den Prager Polhöhen-Messungen von 1899 bis 1892 und von 1895 bis 1899. Prag, 1903 (*Id.*).

Dal 29 Marzo al 19 Aprile 1903.

Alessio (F.). Controversia intorno a San Marziano primo Vescovo di Tortona. Pinerolo, 1903; 8° (*dall'A.*).

Avetta (A.). Di un interessante tema d'esame per aspiranti bibliotecari. Firenze, 1903; 8° (*Id.*).

Carbonelli (G.). Un sigillo medico valdostano del secolo XIV. Pinerolo, 1903; 8°.

— Testina di terracotta romana trovata in Asti. Torino, 1903; 1 c. 8°.

— Orecchino barbarico d'oro trovato a Vignale Monferrato. Torino, 1903; 1 c. 8° (*Id.*).

Gatti (G.). Iscrizione onoraria di Termanzia madre dell'imperatore Teodosio. Roma, 1902; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Graziano (G.). Umberto I di Savoia. Bio-bibliografia con ritratto. Torino, 1902; 8° (*dall'A.*).

Dal 5 al 26 Aprile 1903.

Ahlenius (K.). Ångermanälfivens flodområde. En geomorfologisk-antropogeografisik undersökning. Uppsala, 1903; 8° (*dono del Museo di Bergens*).

Alberti (V.). Riassunto delle osservazioni meteorologiche fatte nella R. Specola di Capodimonte nell'anno 1901 e 1902, Napoli, 1902, 1903; 8°.

— Su la determinazione grafica dell' orbita reale nella teoria delle stelle doppie. Napoli, 1902; 8° (*dal prof. E. Fergola Dirett. dell'Osservatorio*).

Cavani (F.). Biografia del Prof. Ing. Matteo Fiorini. Bologna, 1903; 8° (*dall'A.*).

Contarino (F.). Determinazioni assolute dell' inclinazione magnetica nel R. Osservatorio di Capodimonte eseguite negli anni 1898, 1899 e 1900. Napoli, 1902; 8° (*dal prof. E. Fergola Direttore dell'Osservatorio*).

** **Encyclopaedia** Britannica. Vol. 34. Edinburgh et London; 1903.

Millosevich (E.). Commemorazione del P. Angelo Secchi. Roma, 1903; 8° (*dall'A.*).

Morera (G.). Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton. Roma, 1903; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Peano (F.). Formulaire mathématique. T. IV. Turin, 1903; 8° (*Id.*).

Tedeschi (V.). Variazione della declinazione magnetica osservata nella R. Specola di Capodimonte nell'anno 1901. Napoli, 1902; 8° (*dal prof. Fergola Direttore dell'Osservatorio*).

Taramelli (T.). Di alcune sorgenti nella Garfagnana e presso Gorizia. Milano, 1903; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 19 Aprile al 3 Maggio 1903.

Gallucci (G.). Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche. Caltanissetta, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Garelli (A.). Le imposte nello Stato moderno. Vol. I. L'imposizione personale secondo il diritto finanziario positivo. Milano, 1903; 8° (*dall'A.*).

Levi (A.). Apofonia consonantica. Torino, 1903; 8° (*Id.*).

Mazzarella (G.). L'origine delle ordalie nel diritto Siamese. Roma, 1900; 8°.

— Sulla condizione del marito nella famiglia primitiva. Roma, 1900; 8°.

— L'Esogamia presso i popoli semitici. Roma, 1901; 8°.

— Le istituzioni giuridiche di una tribù dell'America settentrionale. Roma, 1902; 8°.

— Studi di etnologia giuridica. Vol. I, fasc. 1°. Catania, 1903; 8° (*Id.*).

Milesi (G. B.). La riforma positiva del Governo parlamentare. Roma, 1900; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Traglia (A.). Organismo e Coscienza. Ancona, 1902; 8° (*Id.*).

Dal 26 Aprile al 10 Maggio 1903.

Beccari (O.). L'Istituto di Studi Superiori di Firenze, la chiusura del Museo Botanico e le sue peripezie. Osservazioni e critiche. Rocca S. Casciano, 1903; 8° (*dall'A.*).

Bechterew (W. v.). Les voies de conduction du cerveau et de la moelle. Lyon-Paris, 1900; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

Betti (Mario). βenaftossazine e composti affini contenenti radicali aldeidici e chetonici misti. Roma, 1903; 8° (*dal Direttore del Laboratorio di Chimica dell'Istituto di Studi Superiori di Firenze*).

— Reazione generale di condensazione fra βnaftolo, aldeidi e amine. Roma, 1903; 8° (*Id.*).

— Sulla funzione delle basi βnaftolo-aldaminiche. Roma, 1903; 8° (*Id.*).

Ceresole (G.). Della necessità di modificare il sistema di pulizia stradale di Venezia in riguardo all'igiene. Nota critico-sperimentale. Venezia, 1903; 8° (*dall'A.*).

D'Ocagne (M.). Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. Paris, 1903; 4° (*Id.*).

** **Encyclopædia** Britannica. Index vol. 35°. London, 1903; 4°.

Grassi (B.). Studi di un zoologo sulla malaria. 2ª ediz. Roma, 1902; 4°.

— Come si propaga la malaria. Milano, 1903; 8°.

— Documenti riguardanti la storia della scoperta del modo di trasmissione della malaria umana. Milano, 1903; 8° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Notizie biografiche su Roberto Bunsen. Torino, 1903; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Mosso (A.). Mens sana in corpore sano. Milano, 1903; 8° (*Id.*).

Righi (A.). Il moto dei ioni nelle scariche elettriche. Bologna, 1903 (*dall'A. Socio corrispondente*).

Schiff (U.). Separazione delle funzioni basica ed acida della formaldeide. Roma, 1903; 8° (*dall'A. Socio corrispondente, Direttore del Laboratorio Chimico dell'Istituto di Studi Sup. di Firenze*).

Speroni (C.). Di alcuni derivati aldeidici del solfito di anilina. Roma, 1903; 8° (*Id.*).

Dal 3 al 17 Maggio 1903.

Angeli (U.). Due conferenze lette nel R. Convitto Nazionale Cicognini. Amedeo di Savoia, Duca d'Aosta. Vincenzo Gioberti. Prato, 1903; 8°.

Avetta (A.). Contributo di notizie bibliografiche per una bibliografia dei codici mss. della Biblioteca Nazionale di Torino. Leipzig, 1903; 8° (*dall'A.*).

Bosco (A.). La delinquenza in varî Stati d'Europa. Roma, 1903; 8° (*Id.*).

Nadaillac (de). Du Cap au Caire. Paris, 1903; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Fiorini (V.). Dei lavori preparatorî alla nuova edizione dei *Rerum Italicarum Scriptores*. Comunicazione al Congresso internazionale di scienze storiche (Roma, 2-9 aprile 1903). Città di Castello, 1903; 4° (*dall'A.*).

Savio (F.). La pretesa inimicizia del papa Niccolò III contro il Re Carlo d'Angiò. Palermo, 1903; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Dal 10 al 24 Maggio 1903.

Alla memoria del prof. Antonio d'Achiardi XVIII gennaio MCMIII. Pisa, 1903; 8° (*dalla Società Toscana di Scienze naturali*).

Borridan (G.). La legge del sistema planetario o l'armonia del moto dei suoi corpi. Napoli (Ischia), 1903; 8°.

— Dell'attrazione planetaria, forza centripeta o gravitazione universale. Napoli (Ischia), 1903; 8° (*dall'A.*).

Clemm (W. N.). Die Gallensteinkrankheit, ihre Häufigkeit ihre Entstehung, Verhütung und Heilung durch innere Behandlung. Berlin, 1903; 8° (*Id.*).

Colomba (L.). Cloromelanite e pirosseni cloromelanitoidi. Padova, 1903; 8°.

— Zeoliti dell'isola del Principe Rodolfo. Milano, 1903; 8° (*Id.*).

** **Decombe** (L.). La compressibilité des gaz réels. Paris, 1903; 8°.

Morera (G.). Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton. Roma, 1903; 8° (*dall'A.*).

Traschio (G. B.). Un caso di macrosomia. Roma, 1903; 8° (*Id.*).

Dal 17 al 31 Maggio 1903.

Indice-Guida delle tombe e dei monumenti del Giardino del Museo Archeologico, costituenti la nuova sezione architettonica etrusca. Firenze, 1903; f°.

Jandelli (G.). Dell'unità delle scienze pratiche. 2ª ediz. Milano, 1902; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Dal 24 Maggio al 14 Giugno 1903.

Abderhalden (E.). Familiäre Cystindiathese. Berlin, 1903; 8°.

— Zusammensetzung des Kochsalzsurrogates der Eingeborenen von Angoniland (British-Centralafrika). Bonn, 1903; 8° (*dall'A.*).

Articoli generali del Calendario ed effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano e per l'anno 1904. Milano, 1903; 8° (*dal R. Osservatorio di Milano*).

Caracciolo (R.). L'etere formil-monometilbiossibenzina sulla tubercolosi. Messina, 1903; 8° (*dall'A.*).

Carnazzi (P.). Influenza della pressione e della temperatura sul coefficiente di compressibilità del mercurio. Pisa, 1903; 8° (*Id.*).

Guidi (C.). Prove alla compressione sulle murature di granito d'Alzo e gneiss di Borgone. Torino, 1903; 8° (*dall'A. Socio residente*).

In onore di Galileo Ferraris inaugurandosi il monumento in Torino, 17 maggio 1903. Torino; 8° (*Dono della Presidenza del R. Museo Industriale Italiano*).

** **Laurent** (H.). Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie. Paris, 1902; 8°.

Lussana (S.). Proprietà termiche dei solidi e dei liquidi. Parte 1ª e 2ª. Pisa, 1903 (*dall'A.*).

Maluta (G.). Principii di suggestione terapeutica. 2ª ediz. Padova, 1903; 8° (*Id.*).

Memorie di Anatomia e di Embriologia dedicate al prof. Guglielmo Romiti in Pisa. Firenze, 1903; 8° (*dono del Prof. G. Romiti*).

Mottareale (G.). Per la lotta dei viticultori contro le gelate. Portici, 1903; 8°.

— Per combattere la clorosi delle viti americane. Portici, 1903; 8° (*dall'A.*).

Pascal (E.). Resumé de quelques uns de mes récents travaux sur la théorie des groupes de Lie. Wargawa, 1903; 8° (*Id.*).

** **Reichenow** (A.). Die Vögel Afrikas. 2. Bd., 2 Häfl. 4° Halbband. Neudamm, 1903; 4°.

Relazione della Commissione e della Giuria sul Concorso internazionale 1902 pel premio Galileo Ferraris. Torino, 1903; 8°.

Schuyten (M. C.). Over de snelheid der uitstralingswarmte van het lichaam. Kortrijk, 1902; 4° (*dall'A.*).

Dal 31 Maggio al 21 Giugno 1903.

Ambrosoli (S.). Una medaglia poco nota di Papa Pio IV. Milano, 1903; 8°.

— A proposito delle cosidette " restituzioni " di Gallieno o di Filippo. Milano, 1903; 8° (*dall'A.*).

Atti del IV Congresso delle Società Economiche tenutosi in Torino. 1ª Sessione ottobre 1902, 2ª gennaio 1903. Torino; 8° (*dono del Socio* Boselli).

Carta (F.). Bernardino Peyron. Firenze, 1903; 1 c. 8°.

Bosco (A.). I divorzi e le separazioni personali dei coniugi. Roma, 1903; 8°.

* **Coppieters** (H.). Historia textus actorum Apostolorum. Lovanii, 1902; 8° (*dall'Univ. catholique de Louvain*).

* **De Sarlo** (F.). I dati della esperienza psichica. Firenze, 1903; 8° (*Dall'Istituto di Studi Superiori di Firenze*).

* **Gollier** (Th.). Essai sur les Institutions politiques du Japon. Bruxelles, 1903; 8° (*Dall'Univ. catholique de Louvain*).

Gor (N.). Considerazioni preparatorie ad uno studio dei processi di formazione dei vocaboli. Torino, 1900; 8° (*dall'A.*).

Halbherr (F.). Resti dell'età Micenea scoperti ad Haghia Triada presso Phaestos. Rapporto delle ricerche del 1902. Roma, 1903; 4° (*Id.*).

* **Henry** (J.). L'impôt sur les revenus professionnels. Réforme de la législation des patentes en Alsace-Lorraine et à Liège. Louvain et Paris, 1903 (*dall'Univ. catholique de Louvain*).

Massa (C.). Filippo Briganti e le sue dottrine economiche. Trani, 1897; 8°.

— Il prezzo e il commercio degli olii di oliva di Gallipoli e di Bari. Trani, 1897; 8°.

— L'industria della pesca. Trani, 1900; 4°.

— La Marina mercantile e la Società " Puglia „. Trani, 1900; 4°.

— Saggio di bibliografia della provincia di Terra di Bari. Trani, 1900; 4°.

— Venezia e Gallipoli. Notizie e documenti. Trani, 1902; 8°.

— Bari nel secolo XVII. Bari, 1903; 8° (*dall'A.*).

Mathis (A. M.). Gli scrittori braidesi. Bra, 1903; 8°.

Palma di Cesnola (L.). A descriptive Atlas of the Cesnola Collection Cypriote antiquities in the Metropolitan Museum of Art New York. Vol. III. New York, 1903; fol. (*Id.*).

Protocarta Comitale Sabauda. Torino, 1903; 4° (*Dono della Deputazione di Storia Patria di Torino*).

Ramos-Coelho (J.). L'ombra di Carlo Alberto in Campidoglio. Traduzione dal portoghese del sig. Solone Ambrosoli. Milano, 1902; 8° (*dal Traduttore*).

Savignoni (L.). Il vaso di Haghia Triada. Roma, 1903, 4° (*dall'A.*).

Statistica della Emigrazione italiana per l'estero negli anni 1900 e 1901 e Notizie sull'emigrazione in alcuni altri Stati per gli anni dal 1890 in poi. Roma, 1903; 8° (*dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio*).

— dell'Emigrazione italiana per l'estero avvenuta nel 1902 (*Id. Id.*).

Zaccaria (A.). I due primi Re dell'Italia unita. Bologna, 1903; 8° (*dall'A.*).

CLASSI UNITE

Adunanza del 16 Novembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ERMANNO FERRERO
DIRETTORE ANZIANO DI CLASSE

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: SALVADORI, Direttore della Classe, BERRUTI, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO e MORERA;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: ROSSI, GRAF, CIPOLLA, BRUSA, PIZZI e RENIER Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza a Classi Unite del 25 maggio 1902.

Il Presidente annuncia con parole di rimpianto il decesso del Presidente Alfonso COSSA, la cui commemorazione sarà degnamente fatta da qualcuno dei suoi colleghi di Classe; riferisce le onoranze tributate ai suoi resti mortali, e dà conto delle condoglianze di autorità, di corpi scientifici, d'istituti e di private persone pervenute in questa luttuosa occasione all'Accademia. Le parole pronunziate dal Socio D'OVIDIO ai funerali sono inserte negli *Atti*.

Su proposta del Presidente, l'Accademia delibera a voti unanimi:

1° che l'Ufficio di Presidenza mandi una lettera di condoglianza alla famiglia dell'estinto;

2° che in segno di lutto si tolga l'adunanza presente.

Parole pronunziate ai funerali del Presidente A. Cossa

dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Porgo l'estremo saluto alla salma di ALFONSO COSSA, a nome dell'Accademia delle Scienze che egli degnamente presedeva.

Altri, di me più competente, in più tranquilla sede, descriverà le importanti ricerche del COSSA nel campo delle scienze chimiche; ricerche che resero illustre il suo nome e che gli procacciarono l'alta estimazione dei dotti in Italia e fuori, cosicchè i principali sodalizi scientifici nazionali e parecchi stranieri lo vollero loro socio: quali l' Accademia delle Scienze di Torino, quella dei Quaranta, quella dei Lincei, quella di Napoli, quella di Bologna, l'Istituto Lombardo e il Veneto, e più recentemente l'Accademia delle Scienze di Berlino. Tutti codesti sodalizi hanno appreso con vivo dolore la grave perdita che han fatta, e sono qui rappresentati.

Io mi appagherò di porre in rilievo le cospicue doti d'insegnante del compianto estinto. Le sue dense e dotte lezioni erano preparate con la più scrupolosa diligenza, e di tratto in tratto ravvivate da qualcuna delle sue originali ed argute uscite; migliaia di giovani gustarono quelle lezioni e le ricordano con piacere. Egli amò i suoi alunni di affetto paterno: talora potè loro parere burbero, ma era il burbero benefico, ed io posso attestare per lunga esperienza come egli cercasse di agevolarli in tutte le forme compatibili con la serietà degli studî, come della loro buona riuscita fosse orgoglioso, e quanto s'industriasse di cooperare ad essa in tutti i modi. Il laboratorio e la scuola erano i due poli della sua nobile mente; anche poche ore prima di spegnersi, vaneggiando, egli si credeva in iscuola e con interrotte parole richiamava l'attenzione dei giovani sulla lezione che gli pareva d'incominciare. E del resto si può dire che egli sia morto sulla breccia; poichè si pose a letto, per non più rial-

zarsi, non appena ritornato da Roma, ove erasi recato, benchè infermiccio, a giudicare di un concorso, per sentimento di dovere e per generoso desiderio di spingere innanzi i giovani.

Non dimentichino i giovani il loro verace amico. E ricordino pure che molti anni fa egli, già maturo ed illustre, volle tornar loro compagno e confondersi fra loro, assistendo alle mie lezioni universitarie di Geometria analitica, presago della stretta connessione, che si è andata in questi ultimi tempi affermando tra la chimica e la matematica: mesto e pur dolce ricordo questo per me degli anni più belli, nobile esempio a chiunque voti al progresso della scienza le forze del proprio ingegno.

Le prestanti doti di ricercatore e di maestro che spiccavano in Alfonso Cossa furono di buon'ora riconosciute da Quintino Sella, onore della gente subalpina; e quando le provincie venete entrarono a far parte del nuovo regno italico, il Sella confidò al Cossa l'instaurazione dell'Istituto tecnico di Udine, e da allora lo ebbe sempre in gran conto e dimestichezza. Il Cossa andò poi a fondare la Scuola di Agricoltura di Portici, ma non vi rimase che un solo anno. Indi venne a dirigere la Stazione agraria di Torino; nè volle più muoversi da questa città a lui cara, ad onta delle offerte che gli vennero d'altronde. Qui egli esplicò la sua grande operosità, specie quando successe all'insigne Ascanio Sobrero nella cattedra del Valentino.

Nella nostra città l'egregio uomo fu tosto pregiato dai migliori, e l'Accademia delle Scienze lo ascrisse fra i suoi soci, auspice Federigo Sclopis. Ai lavori accademici recò frequente e notevolissimo contributo con le sue importanti ricerche, e intanto con la bella e gioviale franchezza, che era la nota caratteristica della sua bontà, conquistò la stima e la simpatia dei colleghi; i quali gliene diedero solenni prove, eleggendolo prima Direttore di classe, poi Vice-presidente, e da ultimo or son circa due anni Presidente; uffici ai quali attese con fervore e con assiduo studio di affratellare sempre più gli animi dei compagni; le nostre severe adunanze accademiche erano, specialmente per sua iniziativa, sempre seguìte da una gaia conversazione privata.

Oh! la inaspettata, dolorosa dipartita dell'amato Presidente lascia un gran vuoto nelle nostre file, e più nei nostri cuori. Noi non rimpiangiamo soltanto lo scienziato eminente ed autorevole, ma anche l'amico schietto e leale, il collega desidera-

tissimo, il cittadino integerrimo e forte, sempre pronto all'opera quando si trattava di combattere per una giusta causa.

Ed è a nome dei tuoi colleghi, o anima eletta di Alfonso Cossa, che io m'inchino qui riverente innanzi alla tua spoglia mortale; io, che da più di trent'anni ti ebbi fido amico, che ti amai come un fratello maggiore, che ho assistito con l'animo straziato a questa tua estrema settimana, ben sapendo quel che ero per perdere irreparabilmente, mentre tu ti andavi a poco a poco estinguendo, senza sentir dolore, sognando di scuole e di libri, avendo ancora presenti alla mente ed al cuore i tuoi alunni, circondato dalla tua affettuosa e degna famiglia. Oh! la tua fu la morte del giusto; moristi come vivesti.

Addio, amico, addio. La tua cara e venerata memoria rimane scolpita nei nostri cuori, per sempre.

Gli Accademici Segretari
Enrico D'Ovidio.
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Novembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO CONTE TOMMASO SALVADORI

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Berruti, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e il Socio Jadanza, che funge da Segretario in assenza del Socio D'Ovidio Segretario della Classe.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il ff. di Presidente, accennando alla perdita fatta dall'Accademia nella persona del compianto prof. Alfonso Cossa Presidente dell'Accademia, prega la Classe di designare il Socio per la commemorazione dell'illustre estinto.

La Classe incarica il Socio Guareschi, il quale accetta.

I Soci che intendano presentare lavori per gli *Atti* o le *Memorie*, sono pregati di depositarli in Segreteria.

L'adunanza è sciolta in segno di lutto per la morte del Presidente dell'Accademia.

LETTURE

La Geometria basata sulle idee di punto e distanza.

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO.

L'analisi delle idee fondamentali o primitive della Geometria, cioè di quelle che non si possono definire ma che dobbiamo ricavare dal mondo fisico, diede luogo a numerosi lavori, specialmente in questi ultimi tempi.

Il sig. M. Pasch, nelle sue *Vorlesungen über Geometrie* dell'a. 1882, espresse tutte le idee geometriche mediante quattro: *punto*, *segmento*, *piano*, *moto*.

Nel 1889, nell'opuscolo *I principii di Geometria*, io applicai la Logica matematica, allora eretta a sistema, per analizzare i fondamenti della Geometria. Eliminai dal gruppo delle idee primitive quella del piano; scomposi gli assiomi introdotti dal Pasch nei loro elementi. Risultò così che una gran parte della Geometria, cioè quella che si suol chiamare *Geometria di posizione*, si può sviluppare con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *segmento*. In un successivo articolo, comparso nella *Rivista di Matematica*, a. 1894, p. 51, espressi le idee della Geometria metrica colle precedenti e con quella di moto.

Il prof. M. Pieri, in una serie di lavori pubblicati dal 1897 in poi, di cui parecchi nei volumi delle nostre " Memorie ", analizzò dapprima le idee primitive della Geometria projettiva, e in seguito quelle della Geometria elementare. Ed arrivò al risultato, notevole sotto ogni aspetto, che la Geometria si possa costrurre con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *distanza* di due punti. E anzi che questa seconda idea non sia necessario di assumerla come una relazione fra quattro punti a, b, c, d sotto la forma " la distanza da a a b è eguale a quella da c a d ", ma basti assumere come primitiva la relazione fra tre punti a, b, c: " i punti a e b sono equidistanti da c ". Veggansi gli

atti del *Congrès de Philosophie* tenutosi nel 1900 a Parigi, t. 3°, pag. 386. Uno sviluppo completo della idea geniale del prof. Pieri è vivamente a desiderare.

Seguendo un altro indirizzo, nel mio articolo: *Analisi della teoria dei vettori*, pubblicato negli " Atti „ di questa Accademia nel 1898, sviluppai una parte della Geometria colle idee primitive di *punto* e *vettore*; per completarla occorreva un'altra idea primitiva, che assunsi sotto la forma di *prodotto interno di due vettori*. Questo lavoro è riprodotto nel *Formulaire Mathématique*, a. 1902, p. 253 e segg., insieme alle citazioni di altri autori, quali Schur, Moore, Padoa, e altri che si occuparono dello stesso soggetto.

Qui mi propongo di collegare il sistema di idee primitive del Pieri con quello della mia teoria dei vettori.

Continuerò a far uso delle notazioni della Logica matematica, le quali vanno sempre più diffondendosi, e recentemente per opera dei sigg. Russell e Whitehead furono applicate alle più astruse teorie matematiche (" American Journal of Mathematics „, a. 1902, fascicolo 4°).

Idee primitive.

p si legge " punto „.

Essendo a, b, c dei punti, $\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)$ si legge " la distanza da a a c è eguale a quella da b a c „.

Queste idee si assumono come primitive.

La relazione $\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)$ si può risolvere rispetto ad uno qualunque dei punti che contiene, e si ha:

$b, c \in \mathrm{p} \,.\supset.\, \mathrm{p} \cap a \ni [\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)] =$ (sfera di centro c passante per b).

" Dati due punti b e c, il luogo dei punti a che soddisfano alla relazione considerata, è la sfera indicata „.

$a, b \in \mathrm{p} \,.\supset.\, \mathrm{p} \cap c \ni [\mathrm{d}(a, c) = \mathrm{d}(b, c)] =$ (piano normale al segmento ab nel suo punto medio).

Quindi la relazione primitiva considerata si può sostituire con quella sfera o con questo piano. Sono diverse forme di una stessa idea.

Definizioni della retta per due punti e del piano per tre punti.

Queste definizioni devonsi a Leibniz, che ne vide l'importanza, e parlando della seconda dice esplicitamente: " Haec definitio mihi est " (Veggasi il *Formulaire*, p. 265). Esse sono:

$$a, b \in \mathrm{p} \,.\, a \sim= b \,.\supset.\, \mathrm{recta}(a, b) = \mathrm{p} \cap x \ni [y \in \mathrm{p} \,.\, \mathrm{d}(y, a) = \mathrm{d}(x, a) \,.\, \mathrm{d}(y, b) = \mathrm{d}(x, b) \,.\supset_y .\, y = x] \qquad \mathrm{Df}$$

" Essendo a e b due punti distinti fra loro, per retta (a, b) si intende l'insieme dei punti x tali che, comunque si prenda il punto y che disti da a quanto x, e da b pure quanto x, necessariamente questo y coincida con x ".

Si può anche dire che la retta (a, b) è il luogo dei punti di contatto delle sfere di centri a e b.

$$a \in \mathrm{p} \,.\, b \in \mathrm{p} \sim \iota a \,.\, c \in \mathrm{p} \sim \mathrm{recta}(a, b) \,.\supset.\, \mathrm{plan}(a, b, c) = \mathrm{p} \cap x \ni [y \in \mathrm{p} \,.\, \mathrm{d}(y, a) = \mathrm{d}(x, a) \,.\, \mathrm{d}(y, b) = \mathrm{d}(x, b) \,.\, \mathrm{d}(y, c) = \mathrm{d}(x, c) \,.\supset_y .\, y = x]. \qquad \mathrm{Df}$$

" Dato un punto a, un punto b distinto da a, e un punto c non sulla retta (a, b), per piano (a, b, c) si intende l'insieme dei punti x aventi la proprietà che ogni punto y che disti da a, b, c quanto x, necessariamente coincida con x.

Definizione del punto medio di due punti e dell'eguaglianza di due vettori.

Il punto medio dei punti a e b si indica con $(a + b)/2$, secondo Möbius, Grassmann e altri. Esso si definisce:

$$a, b \in \mathrm{p} \,.\, a \sim= b \,.\supset.\, (a + b)/2 = \iota\, \mathrm{recta}(a, b) \cap x \ni [\mathrm{d}(x, a) = \mathrm{d}(x, b)] \qquad \mathrm{Df}$$

$$a \in \mathrm{p} \,.\supset.\, (a + a)/2 = a. \qquad \mathrm{Df}$$

" Dati due punti a, b, se essi sono distinti, il loro punto medio è per definizione quell'elemento (punto) della retta (a, b) equidistante da a e da b. Se essi coincidono, il loro punto medio è la loro posizione comune ".

$$a, b, c, d \in \mathrm{p} . \supset : a - b = c - d . = . (a + d)/2 = (b + c)/2.$$

" Dati quattro punti a, b, c, d, si dice che il vettore che va da a a b è eguale al vettore che va da c a d, quando il punto medio di a e d coincide col punto medio di b e c ".

Così, partendo dall'idea di distanza, essendo giunti a definire l'eguaglianza dei vettori, che nel *Formulaire* era assunta come idea primitiva, possiamo supporre trascritte le definizioni successive contenute nel *Formulaire*, e basate su quella sola idea (p. 255-259); e precisamente il simbolo v per indicare " vettore ", il vettore nullo (§ vct P3·0·1), la somma d'un punto con un vettore (P4·0), la somma di due vettori (P5·0), il prodotto d'un vettore per un numero razionale (P6 — 9), e il baricentro di più punti con masse razionali (P10).

Per procedere oltre senza introdurre alcuna altra idea primitiva (quale quella di prodotto interno, assunta nel *Formulaire* a p. 260), occorre costrurre una nuova via.

Definizione dell'eguaglianza dei valori assoluti o moduli di due vettori.

$$u, v \in \mathrm{v} . \supset \therefore \mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v . = : a \in \mathrm{p} . \supset_a . \mathrm{d}(a, a + u) = \mathrm{d}(a, a + v).$$

" Dati due vettori u e v, diremo che essi hanno egual lunghezza, se, comunque si prenda il punto a, la sua distanza dal punto $a + u$ eguagli quella da $a + v$ ".

La Prop (§ vct P 22·1)

$$a, b \in \mathrm{p} . \supset . \mathrm{d}(a, b) = \mathrm{mod}(b - a) \qquad \mathrm{Df}$$

unita colla precedente, ci dà il significato della relazione " la distanza da a a b eguaglia quella da c a d ", che non si è assunta come primitiva.

Definizione della perpendicolarità fra due vettori.

Per non introdurre simboli nuovi, consideriamo la scrittura $u \times v = 0$ (seguendo le notazioni del Calcolo geometrico), come un simbolo per dire che i vettori u e v sono perpendicolari; lo si definisce come segue:

$u, v \in \mathrm{v} . \supset \therefore u \times v = 0 . = : a \in \mathrm{p} . \supset_a . \mathrm{d}(a+u, a+v) = \mathrm{d}(a+u, a-v).$

" Due vettori u e v diconsi perpendicolari, quando comunque si prenda il punto a, il punto $a+u$ è equidistante da $a+v$ e da $a-v$ ".

Relazione > fra lunghezze.

$u, v \in \mathrm{v} . \supset : \mathrm{mod}\, u > \mathrm{mod}\, v . = . \exists \mathrm{v} \cap w \ni [w \times v = 0 . \mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}(v+w)]$ Df

" Dati due vettori u e v, dire che la lunghezza del primo è maggiore o eguale a quella del secondo, equivale a dire che si può determinare un vettore w tale che esso sia normale a v, e tale che la lunghezza di u eguagli quella di $v+w$ ".

Definita la relazione $\geqq$, risulta definita la relazione $>$, escludendo l'eguaglianza.

In altri termini, la proprietà che la perpendicolare abbassata da un punto su d'una retta è minore dell'obliqua, opportunamente trasformata, acquista la forma d'una definizione.

Se a e b sono punti, si può definire l'insieme dei punti interni alla sfera di centro a e passante per b come

$$= \mathrm{p} \cap c \ni [\mathrm{d}(c, a) < \mathrm{d}(c, b)],$$

e il segmento di retta compreso fra a e b come la parte della retta interna alla sfera di centro a passante per b e alla sfera di centro b e passante per a.

È per noi interessante l'osservare che colla relazione $<$ fra distanze risulta senz'altro definita la figura limite d'una data figura o complesso di punti, e quindi il prodotto d'un vettore per un numero reale, anche irrazionale (§ vct P 25-26), e le coordinate cartesiane dei punti e dei vettori (P 33), sicchè si può continuare colla Geometria analitica.

Del resto sussistono inalterate le definizioni, contenute nel *Formulaire*, della projezione d'un punto su d'una retta, o su di un piano (§ vct P 43), delle simmetrie centrali, assiali, ecc. e infine quella del Movimento (P 67), risultando distinta la congruenza diretta di due figure dalla congruenza inversa o specchiamento.

L'Accademico Segretario
ENRICO D'OVIDIO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 23 Novembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ERMANNO FERRERO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Carle, Cipolla, Brusa, Allievo, Chironi e Renier Segretario.

È approvato l' atto verbale dell' adunanza antecedente, 22 giugno 1902.

Dopo aver informata la Classe intorno alla salute del Vicepresidente Peyron, che continua a migliorare, il Presidente partecipa con parole di rimpianto la morte del prof. Gian Giacomo Reymond, Socio nazionale non residente dell'Accademia, seguìta il 27 settembre 1902. Indi il Presidente comunica:

1°, una lettera del Socio corrispondente Michele Bréal, che invitato a rappresentare l'Accademia al Congresso internazionale degli Orientalisti di Hanoï (Tonchino), declina l'incarico non potendovisi recare e scrive d'aver fatto noto il desiderio dell'Accademia agli organizzatori del Congresso;

2°, una lettera del Presidente della Scuola di Archeologia della R. Università di Roma, con la quale accompagna due nuove relazioni sugli scavi praticati nell' isola di Creta dalla Missione archeologica italiana.

Sono presentate le pubblicazioni seguenti pervenute in dono all'Ufficio di Presidenza:

1°, da parte di S. M. il Re, i volumi 18, 19, 20 (con Atlante) dell'opera: *Campagne del principe Eugenio di Savoia*;

2°, da Soci corrispondenti:

a) Giuseppe Dalla Vedova, *Annibale Ferrero, cenno necrologico*; Gotha, 1902;

b) Vittorio Poggi, *Gli antichi statuti di Carpasio,* Torino, 1902;

c) Marchese de Nadaillac, *Voyage du Duc et de la Duchesse d'York à travers les colonies anglaises,* Paris, 1902, e *L'âge de cuivre,* Louvain, 1902.

Il Segretario fa noto che durante le ferie accademiche l'Ateneo di Brescia invitò l'Accademia a farsi rappresentare alla solennità del centenario dell'Ateneo, celebratasi nel passato settembre. Il rimpianto Presidente nostro designò a tale rappresentanza il Presidente dell'Ateneo. Ora il Segretario presenta il suntuoso volume pubblicatosi in questa congiuntura col titolo: *Il primo secolo dell'Ateneo di Brescia (1802-1902),* Brescia, 1902, con la targhetta in bronzo da cui fu accompagnato il dono di quel volume.

Seguono altre presentazioni di libri.

Il Socio Manno offre con lodi:

1°, Roger Peyre, *Une princesse de la Renaissance, Marguerite de France duchesse de Berry,* Paris, 1902;

2°, opuscoli di Isidoro Del Lungo, *San Francesco alla Verna,* Prato, 1902; *Il Tommaseo a Firenze* e *Tommaseo e Capponi,* Roma, 1902.

Il Socio Chironi fa omaggio, con parole d'encomio, di due volumi giuridici: Carlo Toesca di Castellazzo, *L'offerta al pubblico, contributo alla teoria dell'offerta contrattuale,* Torino, 1903, e Riccardo Fubini, *La dottrina dell'errore in diritto civile italiano,* Torino, 1902.

Il Socio Brusa presenta il libro di Dionisio Anzilotti, *Teoria generale della responsabilità dello Stato nel diritto internazionale,* Firenze, 1902, dandone giudizio favorevole con una nota che è pubblicata negli *Atti.* — Il Socio Chironi si associa

al parere favorevole sull'opera dell'Anzilotti, pronunciato dal Socio Brusa, ma si propone di esporre in seguito alcune sue osservazioni e riserve, rispetto alla teoria propugnata dall'autore.

Il Presidente Ferrero offre:

1°, Domenico Tordi, *Il codice autografo di rime e prose di Bernardo Tasso,* Firenze, 1902;

2°, P. R. Trojano, *La filosofia morale e i suoi problemi fondamentali,* Torino-Napoli, 1902;

3°, Arthur Macdonald, *A plan for the Study of man,* Washington, 1902. — Su quest'ultimo volume si trattiene, avvertendo che il sig. Macdonald ne ha inviato altra copia al defunto Presidente Cossa, ed ha mostrato il desiderio d'avere il parere dell'Accademia nostra, intorno al disegno da lui escogitato d'instituire in America uno speciale laboratorio per lo studio della delinquenza, particolarmente nelle classi misere. Dopo qualche discussione, alla quale prendono parte i Soci Brusa e Renier, il Presidente conclude che è più prudente tenersi sulle generali e rispondere al sig. Macdonald ringraziandolo del dono e riconoscendo in modo generico l'utilità e la importanza delle osservazioni ed indagini di cui egli si è fatto promotore.

È inserita negli *Atti* una nota che presenta il Socio Allievo: *Il testamento filosofico di Herbert Spencer.*

Il Socio Allievo espone pure il contenuto di un altro suo scritto più ampio: *La pedagogica di Emanuele Kant.* Appartatosi il Socio proponente, la Classe accoglie unanime, con votazione segreta, il suo scritto per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Negli *Atti* è accolta una nota del Socio Chironi, che ha il titolo: *D'una petizione intorno al divorzio presentata alla Camera francese.*

Il Socio Brusa dà notizia della prima sentenza che, in base al compromesso stipulato il 22 maggio 1902 a Washington fra gli Stati Uniti d'America e gli Stati Uniti messicani, fu proferita testè, e precisamente il 14 ottobre di quest' anno, da un tribunale d'arbitrato costituito in conformità della *Convenzione*

per il regolamento pacifico dei conflitti internazionali firmata all'Aja il 20 luglio 1899 in seguito alle deliberazioni della Conferenza detta della pace, riunita colà sulla ben nota iniziativa dell'imperatore delle Russie.

L'importanza di questa sentenza arbitrale non consiste tanto nell'avere essa il privilegio d'inaugurare l'attività della Corte permanente d'arbitrato fondata all'Aja a termini della detta Convenzione, quanto ancora nel suo stesso valore intrinseco per la felice e logicamente esatta applicazione ch'essa fece del principio della regiudicata alla controversia sottoposta al giudizio degli arbitri.

Tutti giureconsulti di alti meriti e di universale reputazione, questi erano: designati dal presidente degli Stati Uniti d'America, Edwin Fry, membro del Consiglio privato di S. M. britannica, e De Martens, Consigliere nel Ministero degli esteri di Russia; designati dal presidente degli Stati Uniti messicani, T. M. C. Asser, Consigliere di Stato dei Paesi Bassi, e A. F. Savornin Lohman, già Ministro dell'Interno dei Paesi Bassi, e quale superarbitro dai medesimi eletto e presidente di diritto del tribunale d'arbitrato, Henning Matzen, Presidente del Landsthing danese.

La controversia era nata per il rifiuto del Messico a corrispondere un'annua rendita perpetua gravante il suo tesoro a favore di una fondazione pia dell'Alta California (America settentrionale), cui era devoluta per effetto del trattato di Guadalupa Hidalgo del 30 maggio 1848, che aveva fatto passare l'Alta California sotto la dominazione della bandiera stellata conservando al Messico la Bassa California, alla quale una parte soltanto di tale fondazione pia doveva rimanere attribuita.

Lunga fu la discussione e l'onore di essa è in particolare toccato al valoroso professore belga Descamps, rappresentante della parte richiedente, gli Stati Uniti d'America, il quale fu prima, qual relatore sulla citata Convenzione per il regolamento pacifico dei conflitti internazionali, uno dei più cospicui cooperatori della Conferenza dell'Aja. La sua arringa pubblicata col titolo: *Les fondations californiennes et la question de la chose jugée en droit international* (Bruxelles, Guyot, 1902, pp. 50) è un modello di scienza, di precisione e di abilità oratoria. La que-

stione della cosa giudicata ebbe occasione dalla decisione emessa dal superarbitro Edw. Thornton, l'11 novembre 1875, con la quale la controversia era già, secondo la parte attrice, stata risolta definitivamente.

Il tribunale arbitrale, premesso doversi la controversia, per il suo carattere eminentemente internazionale, decidere sulla base dei trattati internazionali e dei principii del diritto internazionale; premesso inoltre che tutte le parti di una sentenza sui punti discussi nella causa si schiariscono e si completano a vicenda, servendo tutte a precisare il senso e i termini del dispositivo e a fissare i punti sui quali evvi cosa giudicata, onde non potrebbero essere rimessi in questione; afferma con testuali parole " che questa regola non si applica solamente alle sentenze dei tribunali istituiti dallo Stato, ma del pari a quelle arbitrali proferite nei limiti delle competenze fissate dal compromesso ", e " che questo stesso principio deve *a più forte ragione (à plus forte raison)* essere applicato agli arbitrati internazionali ".

I cultori del diritto delle genti che aspirano seriamente ai suoi sempre più notevoli progressi, si rallegrino e si confortino nelle loro speranze. Lunge dall' esser dubbia l' estensione del principio della regiudicata alle controversie internazionali sottoposte al giudizio degli arbitri, in questa specie di conflitti tale principio acquista invece un titolo più gagliardo alla sua piena e indefettibile osservanza. Già il sagace oratore per gli Stati Uniti dell'America settentrionale aveva con molta benevolenza ricordato una osservazione che il Socio Brusa riconosce per sua (p. 27). L'osservazione si esprime così: " Quelque con-
" troverse que l'on puisse soulever dans les divers pays, quelque
" subtilité que l'on puisse invoquer, la présomption dans les
" arbitrages internationaux doit toujours être que les États en
" cause ont engagé la question et que le juge l'a résolue dans
" des conditions qui permettent d'en finir. Toute autre suppo-
" sition est inadmissible en matière de procédure arbitrale in-
" ternationale ".

Lode ai sapienti arbitri del Tribunale permanente dell'Aja, i quali hanno per tal modo mostrato quanto debba tenersi alto l'interesse di prevenire fra Stati diversi ogni specie di dissensi, conflitti, pericoli di rappresaglie e peggio nel consorzio pacifico delle genti.

LETTURE

Sulla responsabilità dello Stato nel diritto internazionale.

Nota del Socio EMILIO BRUSA.

Sulla responsabilità dello Stato nel diritto interno le ricerche degli studiosi abbondano, non così invece su quella che sorge nel diritto internazionale. Non già che le occasioni manchino o scarseggino; ma sino ad ora le empiriche e oscillanti regole della politica hanno in generale tenuto luogo delle dottrine maturate per l'opera critica dei giuristi. Però cominciano adesso i più acuti e solerti a metter mano all'aspra materia sforzandosi di elaborarla scientificamente. Fra costoro va segnalato a titolo d'onore l'italiano Dionisio Anzilotti, professore di diritto internazionale privato nella Scuola Cesare Alfieri di scienze sociali in Firenze e ben noto scrittore di opere lodate nella scienza che insegna e nella filosofia giuridico-sociale che pure ha insegnato. Sono assai lodati i suoi scritti: *Studi critici di diritto internazionale privato* (Rocca San Casciano, Cappelli, 1898); *I mutamenti dei rapporti patrimoniali fra coniugi nel diritto internazionale privato* (Firenze, tip. Bonducciana, 1900); *La filosofia del diritto e la sociologia* (ib., id., 1892).

Nella parte prima della sua *Teoria generale della responsabilità dello Stato nel diritto internazionale*, testè pubblicata a Firenze (F. Lumachi, 1902), egli affronta il grave e fondamentale problema della responsabilità in diritto internazionale, riservandosi nelle parti successive, che è desiderabile abbiano a non tardare, di svolgerne poi le svariate e molteplici applicazioni al soggetto responsabile, alle cause che diminuiscono o tolgono la responsabilità, e agli effetti che ne derivano.

Avendo questa pubblicazione influito molto nel giudizio del concorso alla cattedra di diritto internazionale di Palermo, nel quale l'autore ha riportato la vittoria sopra altri valenti pro-

fessori, come il Diena e il Fedozzi, sembra particolarmente opportuno richiamare su di essa l'attenzione degli studiosi.

Si tratta di questioni che sorgono frequenti non solo fra gli Stati per gli atti da essi in tale qualità compiuti e per quelli dei loro funzionari, ma altresì per gli atti dei loro appartenenti, individui o enti collettivi del diritto privato. L'Anzilotti in questa prima parte si limita a porre ed esaminare il problema ne' suoi elementi fondamentali, cioè nelle norme giuridiche internazionali, negli effetti della violazione di queste norme implicanti la responsabilità, e nei due estremi della responsabilità di diritto internazionale che sono la violazione ingiusta del diritto altrui e la imputabilità della medesima.

A un tale lavoro di carattere generale egli si è visto condotto dalle difficoltà di risolvere, nell'attuale mancanza di una base giuridica sicura, alcuni problemi speciali di responsabilità internazionale, sopratutto quella conseguente dai danni recati a privati stranieri, della quale chi scrive la presente nota si era pure occupato, prima da solo in un rapporto all'Istituto di diritto internazionale (*Annuaire de l'Institut de droit international*, t. 17, an. 1898, pp. 96-137), poi insieme al collega von Bar di Gottinga, nella sessione di Neuchâtel di quell'Istituto (op. cit., t. 18, an. 1900, pp. 233-256). Data codesta origine, si spiega come il processo logico abbia invitato l'Anzilotti a saggiare in applicazioni concrete il valore delle linee fondamentali e direttive della sua costruzione generale. Per siffatta guisa egli è anche riuscito a dare alla trattazione una forma sistematica e veramente più rigorosa di quella che si riscontra nei lavori de' suoi precursori.

L'indirizzo seguìto è prettamente giuridico e positivo, quale si conviene in particolar modo alle teorie di diritto internazionale, che l'esperienza dimostra quanto facilmente si smarriscano nelle pure astrazioni filosofiche quando non rifuggano dalle concezioni meramente soggettive delle norme da osservarsi e farsi osservare. " Vi sono „, com'egli formula subito (p. 26) la questione fondamentale, " vi sono norme regolatrici dei rapporti fra gli Stati che sieno venute assumendo caratteri tali da non doverle più confondere con l'etica e col costume? „. " Il momento essenziale per l'esistenza di una norma giuridica sta in ciò, ch'essa è la manifestazione di una volontà capace d'imporsi alle

singole volontà a cui si rivolge, imprimendo alla norma un carattere obbligatorio „. Ciò posto, come nè la scienza nè la così detta coscienza giuridica universale potrebbero imporre autoritativamente agli Stati le regole della loro condotta, così soltanto la volontà degli Stati stessi ha il potere di dar vita a norme giuridiche regolatrici dei rapporti interstatali; la volontà di uno Stato ben può dar vita a norme di diritto pubblico esterno dello Stato medesimo, non però a norme di diritto internazionale. Il diritto interno è quindi incapace di limitare le obbligazioni internazionali degli Stati, come viceversa il diritto internazionale nel riferirsi talora al diritto interno lasciando allo Stato una certa libertà di statuizioni, non può con le proprie obbligazioni infirmare le dette statuizioni.

Or come si forma e si manifesta la volontà collettiva di più Stati?

Respinta l'opinione secondo la quale esisterebbe una volontà superiore creatrice del diritto, perchè implicherebbe un potere supernazionale, l'autore si attiene al concetto tradizionale, ma, sulle orme delle profonde analisi germaniche, spogliandolo di ciò che ha di vago, di estraneo e di trascendentale. La norma giuridica si forma dunque nel momento stesso nel quale la volontà collettiva si manifesta nella sua pienezza. Sol questa volontà è capace di formare il diritto fra gli Stati. Data la comunanza internazionale, un diritto che la regoli è senza dubbio necessario, ma questa necessità non basta di per sè a farla esistere. La distinzione dei critici alemanni fra volontà contrattuale e volontà normativa in forma di ciò che dicesi accordo, viene qui spontaneamente in aiuto del pubblicista. Perocchè, ritenuto per inconcusso il principio che il fondamento di ogni diritto subiettivo sia riposto nel diritto oggettivo che a quello preesiste e che da potere fisico lo trasforma in diritto, se ne deduce in diritto internazionale, che gli Stati ora operano come semplici soggetti di diritto e ora invece come organi per la formazione della volontà normativa che presiede e dirige la condotta della comunanza. Nel primo caso essi si propongono soltanto di conciliare e appagare bisogni o interessi particolari, nel secondo invece intendono a conseguire un comune fine identico mercè un'unica volontà comune. Mentre là basta l'accordo delle volontà rispetto al fine propostosi, qua occorre la loro unione nella identica cosa

voluta: là abbiamo il contratto che lega le sole parti contraenti, qua l'accordo di membri di una vera e propria comunità; e mentre le paci, le alleanze, le successioni, le servitù internazionali, le mutazioni di territorio, e similmente, si attuano sulla base di volontà contrattuali, generando diritti e obblighi subiettivi, per contro per dare norma al diritto di guerra, ai diritti e doveri dei neutri, all'estradizione, alla protezione internazionale dei diritti di autore, al protettorato collettivo, alle comunioni fluviali, alle garanzie collettive, alle unioni politiche o amministrative (blocco pacifico, intervento collettivo, ecc.) e, in generale, a ogni attività giuridica che oltrepassi la cerchia dei paciscenti, si provvede mediante convenzioni nelle quali una volontà unica comune è aggiunta o sostituita alle volontà particolari degl'interessati.

Resta dopo ciò a vedersi se la volontà comune possa realmente dar vita a regole di diritto, qual sia il fondamento della loro obbligazione e quali i caratteri di codesto diritto fra gli Stati. Un semplice contratto non possederebbe di certo quella virtù creatrice, ma un accordo normativo sì. Infatti, se ogni diritto soggettivo in ultima analisi si risolve in una potestà concessa o riconosciuta dal diritto oggettivo e, d'altro canto, se gli accordi normativi mirano soltanto a regolare la condotta, non evvi una necessità assoluta che porti a confondere insieme questi accordi col diritto oggettivo inteso nel senso più rigorosamente preciso di legge. Mancherebbe sempre l'autorità superiore, sola capace di trasformare quelli in questo o sostituirveli: se fosse vera legge nel senso ordinario della parola, sarebbe munita delle sanzioni ordinarie e applicata con le consuete garanzie di giurisdizione e di esecuzione. E qui sta pertanto il motivo che spiega come dagli accordi normativi non sempre discendano diritti subiettivi. Onde, " mentre è inconcepibile ", come testualmente si esprime l'Anzilotti (p. 62), " una manifestazione di volontà diretta a creare diritti subiettivi, la quale non dipenda dal diritto oggettivo, non è affatto inconcepibile, nelle stesse condizioni, una manifestazione di volontà diretta alla formazione di una norma giuridica ".

Questa distinzione fu combattuta dal Nippold, il quale crede che qualunque trattato internazionale crei, al pari di ogni negozio giuridico, diritti e doveri reciproci dei contraenti, per modo che

a ciascuno di questi ne derivino diritti soggettivi di pretendere dagli altri una prestazione, e che nei cosidetti accordi normativi la prestazione consista nell'uniformare la propria condotta alle regole stabilite.

Non entra nel disegno della presente nota il discutere la distinzione accolta dal giurista italiano e le obiezioni contro di essa sollevate. Coloro che delle differenze caratteristiche che contradistinguono il diritto pubblico dal privato in generale, e specialmente il diritto internazionale dal diritto interno, hanno fatto oggetto di studî accurati e profondi, non esiteranno a riconoscervi la materia più spinosa per difficoltà di sottile analisi e più feconda di larghe applicazioni nel campo delle costruzioni dottrinali e delle deduzioni pratiche. In questo luogo sembra sufficiente dire che l'Anzilotti si giova del suo consueto acume e sicuro criterio giuridico, segnatamente dimostrando che le norme di condotta stabilite nei trattati internazionali il più delle volte limitano la libertà di azione dei singoli Stati nell'interesse generale, senza che al tempo stesso creino una potestà determinata a vantaggio di alcuno di essi in particolare. E opportunamente cita quale esempio le regole stabilite nella dichiarazione di Parigi del 1856 circa la guerra marittima. Se il divieto della corsa ivi proclamato implicasse un diritto subiettivo di uno Stato a che gli altri si astengano da questo mezzo di difesa, tutto quanto il diritto internazionale si risolverebbe in una somma di diritti e di doveri subiettivi a cui mancherebbe ogni fondamento di diritto oggettivo (p. 67).

Ma la difficoltà si ripresenta per trovare il fondamento dell'obbligazione contenuta negli accordi normativi. Risalendo oltre la fonte diretta dell'obbligazione giuridica si giunge sempre in definitiva a un'idea etica: ciò è inerente alla natura stessa del diritto; e d'altra parte sembra avvolgersi in un cerchio vizioso quella fonte dell'obbligazione che non esca dal soggetto che si obbliga verso di un altro col puro e semplice rivolgere a se medesimo un comando. Fra i due scogli l'autore fa prova di grande virtuosità d'ingegno osservando che l'auto-obbligazione morale si esaurisce subito nel soggetto che se la impone da sè, perchè lo Stato non trova poi dinanzi a sè per obbligarlo quella stessa volontà, quel comando che si era rivolto di riconoscere codesta obbligazione; una volontà egli si vede

dinanzi, ma diversa e quindi un comando diverso. L'auto-obbligazione ha esistito nel momento iniziale, pre-giuridico, e non più. Solo la volontà collettiva degli Stati, nella quale si confonde e scompare la volontà del singolo Stato, spiega la forza obbligatoria del diritto internazionale senza che vi sia bisogno di ricorrere alla auto-obbligazione. Rincalzando aggiunge che questa è *condizione* perchè lo Stato sia tenuto all' osservanza di certe regole di condotta verso gli altri Stati, ma non *causa* della obbligatorietà di queste regole. Lo Stato poteva non ammettere quelle regole e così non limitare la sua libertà; ma una volta che le ha ammesse, l'obbligo di osservarle deriva dalla natura stessa delle regole, *che esprimono una volontà superiore a quella dello Stato* (p. 71). Insomma aveva ragione Aristotele di riporre nella comunanza del fine o del bene agognato dai singoli nella consociazione la trasformazione delle volontà particolari per modo, che in tanto esse vengano manifestandosi in quanto cospirino al fine o bene comune. Così il diritto internazionale rimane bensì quello che è, un diritto fra Stati da essi formato per via di contratto nei loro particolari interessi e costituito di facoltà soggettive, ma anche obbiettivo perchè superiore agli Stati per la volontà collettiva di questi d' imporsi norme per la loro condotta reciproca in considerazione dell' interesse collettivo. Manifestata che sia tale volontà, non è più lecito a nessuno di essi di sciogliersi dal vincolo di quelle norme.

Mentre da un canto per le facoltà subiettive derivanti dal contratto si possono in qualche modo invocare le regole del diritto privato, però, in difetto di giurisdizione e per il conseguente ricorso ai mezzi del diritto internazionale, in via meramente analogica, d'altro canto al diritto obiettivo nascente da accordi o consuetudini normative, gli Stati si uniformano col reagire per la riparazione delle offese da essi in particolare risentite, salvo da parte loro spiegare, come singoli o collettività, un'azione fondata nell'interesse comune per far rispettare i principii del diritto internazionale. Nel far valere questo interesse il giudizio rigorosamente giuridico sarebbe fuor di luogo, e decisivo è invece un giudizio discrezionale e di opportunità, similmente a ciò che accade in tema d' interesse nei rapporti con la pubblica amministrazione.

La fallace giustificazione offerta dalla famosa dottrina del

diritto naturale esula del tutto ormai dalla ragione del diritto internazionale; pur nondimeno se un pregio essa aveva, ed ebbe di certo, quello si fu appunto di avere affermato questo diritto quale un'autorità, un potere sopra gli Stati: autorità e potere astratti e determinati dal criterio soggettivo, variabile e arbitrario, di coloro che erano assunti all'ufficio di suoi interpreti; autorità e potere che ora qui, mediante un lavoro indefesso di critica giuridica, appariscono nella loro realtà salda, concreta e oggettiva. E tali sono i caratteri che lo distinguono e ne precisano la natura.

Sarebbe lungo seguire il valente giurista nelle severe indagini che tengono dietro nei tre ultimi paragrafi sulla responsabilità per le violazioni delle norme giuridiche internazionali. Quello che si è accennato dell'opera sua è sufficiente a porre in rilievo l'importanza e le asperità del tema, e a far intravedere il valore delle discussioni e dottrine contenute negli altri paragrafi.

Il testamento filosofico di Herbert Spencer.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

Fatti e Commenti: con questo titolo lo Spencer pubblicava testè a Londra l'ultimo de' suoi volumi. Solenne, commovente spettacolo è questo di un vegliardo più che ottantenne, che tenendo rivolto lo sguardo sui grandi volumi, dove ha raccolto tutto il suo lavoro mentale proseguito per più di mezzo secolo con infaticabile lena, scrive e fa di pubblica ragione il suo testamento filosofico. Anche la vita mentale del genio nel suo successivo esplicamento percorre un duplice periodo di espansione e di concentrazione. Durante la gioventù e la virilità il pensiero fiorisce, matura, scopre, inventa, crea le sue sublimi teoriche nel campo immenso del sapere: nella vecchiaia si ritira dalla realtà esteriore, si raccoglie in se stesso, rivede il suo lavoro e lo suggella colla propria impronta. Però non a tutti i grandi pensatori la sorte concede una longeva esistenza, e nel finale raccoglimento delle idee vi ha chi sconfessa l'opera propria continuata per

anni ed anni vedendo lampeggiare la luce della verità da altri orizzonti, quasi operaio, che avendo compiuta la sua giornata si accorge di aver fallito il lavoro e si conforta colla speranza di un giorno migliore. Così sappiamo di Augusto Comte, che coll'originalità del suo genio creava in Francia la nuova dottrina del positivismo, ma presso il fine di sua vita ne rinnegava il dogma fondamentale sostenendo che lo spirito umano è necessariamente teologico e non positivistico (1). Ed ora noi assistiamo alla solenne metamorfosi mentale del principe dei positivisti contemporanei, Herbert Spencer, che solleva il suo pensiero più in alto, e ripete le parole di Goethe morente: *Luce! più luce!*

Il suo nuovo volume non possiede un organismo logico, per manco di un concetto unificatore supremo. È un lavoro frammentario, composto di note svariatissime e di idee, che non gli era riuscito di incorporare nel suo vasto sistema positivistico. Lo Spencer nasconde in sè due sorta di pensatori, che non potendo convivere insieme *per la contradizion, che nol consente*, si contendono l'uno all'altro il dominio della sua mente, il metafisico ed il positivista. In sull'esordire della sua vita scientifica lo Spencer metafisico riconosce l'esistenza dell'Assoluto, che infinitamente sovrasta a tutto il mondo della realtà sensibile, non percepito dalla facoltà dell'esperienza, ma intuito dalla ragione. Poi il positivista sopraggiunge a tenere il campo e si adopera intorno l'ardita impresa di raccogliere in una vasta sintesi scientifica tutto quanto apparisce sulla superficie dell'immenso mare dell'essere. Giunto alla sua tarda età, lo Spencer ridiventa metafisico. Le idee, che gli erano spuntate su' suoi passi durante il suo fervido lavorìo positivistico, e che aveva notate a parte, perchè non potevano entrare logicamente nella compagine del suo sistema, ora risorgono davanti al suo pensiero e lo illuminano di nuova luce. Egli raccoglie quelle pagine qua e là sparse

---

(1) " Ne' suoi concepimenti presso al fine di sua vita il Comte confessa apertamente, che lo spirito umano non può passarsi dal credere a volontà indipendenti, le quali intervengono negli eventi mondiali. Se ciò è vero, lo spirito umano è necessariamente teologico. Ma allora non mai colpo più mortale fu menato alla filosofia positiva. Essa riposa su questo dato, che lo spirito umano non è necessariamente nè teologico, nè metafisico, ma solo transitoriamente " (E. Littré, *Aug. Comte et le positivisme*, pag. 578-79). Anche in Italia Ausonio Franchi sconfessava il suo razionalismo.

e ne compone il suo ultimo volume facendolo di pubblica ragione. Così i *Fatti e Commenti* vengono non già a coronare il suo splendido edificio positivistico, bensì a scrollarne le fondamenta: sono il canto del cigno, che manda la flebile nota della sua ora estrema e rinasce dalle sue ceneri. La sua intelligenza era troppo potente, troppo vasta, perchè potesse starsene rinchiusa nella bassa e nuda cerchia dell'esperienza sensibile senza innalzarsi più su. Il mondo positivistico, da cui ora risorge a vita novella, ci ricorda la caverna da Platone (1) immaginata, dove gli uomini rinchiusi sin dall'infanzia e stretti fra le catene vedevano scorrere sulle pareti le ombre dei corpi riflesse da uno spiraglio di luce, che brillava alle loro spalle, poi ne uscirono a contemplare la realtà sussistente, illuminata dal sole della verità.

Non è mio animo discorrere in tutte le sue parti questo rilevantissimo volume del pensatore inglese, bensì rilevare il nuovo spirito, che lo informa, notandone i punti più salienti e riscontrandoli coi principii fondamentali del suo sistema positivistico. La società umana abbrutisce e ritorna alla primitiva barbarie: ecco il gran fatto, che colpisce la mente osservatrice del nostro autore e dà alle sue pagine l'impronta di una profonda tristezza. Davanti a questo deplorabile fatto egli si arresta confuso e sfiduciato, vedendo crollare d'un colpo il principio dell'evoluzione progressiva indefinita, da lui posto a caposaldo di tutto il suo maestoso sistema scientifico. Quando egli dettava i suoi *Principii di Psicologia*, mostrava una fede incrollabile nel graduale progresso umano da lui riposto nella " sempre crescente corrispondenza tra i cangiamenti psichici interni e le circostanze esterne, corrispondenza che debbe divenire sempre più compiuta e precisa coll'acconciare di continuo l'attività vitale all'attività del mondo circostante..... La vita deve diventare più elevata e la felicità più perfetta: ciò *debb' essere*, perchè le relazioni interne sono determinate dalle esterne „ (§ 220). Egli salutava con entusiasmo " questo gran movimento progressivo, che ora conduce l' umanità verso un' intelligenza più elevata, verso un carattere più nobile „, e tanta era la sua fede in questo principio dell'evoluzione, che rigettava ricisamente la libertà dello

(1) *La Repubblica*, libro settimo.

spirito umano, siccome quella, che " sarebbe in aperta contraddizione con la benefica necessità manifestata nel progressivo sviluppo della corrispondenza tra l'organismo ed il suo mezzo circostante „ (§ 220). Ed ora la libera potenza da lui fieramente scongiurata gli si affaccia inesorabile come l'ombra di Banco spezzando quell'armonica e progressiva corrispondenza tra la vita psichica interiore e la vita cosmica esteriore, che egli reputava *indestruttibile* come la ferrea necessità. Poichè gli è appunto all'arcana, ma *indestruttibile* libertà del volere, che l'umanità nel suo secolare cammino deve le sue glorie e le sue infamie, i suoi trionfi e le sue sconfitte, gli splendori della sua civiltà e le tristizie della sua barbarie: gli è in virtù di questa libertà che l'io individuo è fatto arbitro delle sue sorti, spezza e ricompone la catena dei fenomeni, che lo avvolgono, ed ora si innalza, ora si abbassa fra i due estremi della santità e della colpa.

Con una profonda e spassionata analisi l'autore va delineando le forme diverse, sotto cui si manifesta il rimbarbarimento sociale contemporaneo e risale alle sue origini, rispondendo così al titolo del suo libro: *Fatti e Commenti*. Studiando la società inglese in particolare, egli manda un potente e nobile grido di protesta contro il militarismo e l'imperialismo di quella nazione, la quale colle armi in pugno e col diritto della forza intima ai Boeri: " Sottomettetevi: i dominatori siamo noi e ve lo faremo riconoscere „. Questa esaltazione della forza bruta egli non la riscontra soltanto nelle sterminate falangi degli eserciti permanenti e nella prepotenza soldatesca, dominanti in tutti gli Stati d'Europa, ma altresì nella smania signoreggiante dell'educazione fisica, e della ginnastica, la quale rasenta il delirio ed accusa una certa quale idolatria dell'organismo corporeo. " Un valente atleta (sono sue parole) è più onorato nelle Università, che il più erudito sapiente. L'Università di Londra ha scelto, per essere rappresentata in Parlamento, quello dei candidati, che meglio giuoca al cricket „. A canto del militarismo e del culto della forza egli colloca, altro sintomo del decadimento sociale, la statolatria, la crescente fede nell'onnipotenza dello Stato, il quale nell'ordine sociale gravita su tutte le esplicazioni della vita pubblica assorbendo in sè le singole attività individuali, nell'ordine pedagogico poi imprime a tutte

le menti un procedimento monotono, meccanico, uniforme, foggiandole sul medesimo stampo e comprimendo l'elaterio dello spirito. Ma la piaga più profonda, che ammorba e consuma la società contemporanea, sta ai suoi occhi, nel delirio della scienza, nella smania dell'istruzione, alla quale viene sacrificata la coltura di tutte quante le altre attività e potenze umane. Da per tutto si grida: istruite, studiate, meditate. Da per tutto si va ripetendo, che le scuole aprono davanti al pensiero nuovi e sublimi orizzonti, e che a volere ed operare il bene basta conoscerlo, sebbene la quotidiana esperienza protesti in contrario, ed ancora di recente nell' America si è sentito solennemente proclamare che solo moltiplicando le scuole si riesce a scemare il numero dei delitti. Questa prepotente invasione dell'enciclopedismo nel campo pedagogico, questa smodata ed esorbitante coltura dell'intelligenza ci ha condotti ad identificare lo spirito col pensiero, a rompere il necessario equilibrio fra la potenza conoscente e la potenza affettiva e morale, fra la vita speculativa e la operativa. Secondo l'autore, la facoltà del sentimento, dell'affetto, della moralità è dessa l'arbitra e suprema moderatrice della vita umana: l'intelligenza non è che la sua ancella. È sovratutto il sentimento, che va potentemente coltivato e svolto colla massima possibile accuratezza, perchè è desso che forma gli uomini forti, virtuosi, felici.

Intorno a questo gravissimo punto non posso rimanermi dal notare le due opposte e contrarie correnti, che agitano il campo della pubblica educazione contemporanea, voglio dire la duplice smania dell'enciclopedismo e dell'educazione fisica. La società non si avvede che lo studio intemperante, sconfinato, faticoso, imposto alla puerizia ed all'adolescenza sciupa l'organo cerebrale, sfibra il sistema nervoso nel suo progressivo sviluppo e manda a male tutto il còmpito dell'educazione fisica, e che per altra parte la coltura eccessiva dell'organismo corporeo comprime e soffoca la vitalità del pensiero. Si direbbe che la società corra dietro a questo ideale pedagogico: fare del pensiero di ciascun fanciullo un Apollo, che tutto conosce, e del corpicciuolo di lui un Ercole, che sulle robuste sue spalle sostiene il cielo.

Uopo è riconoscere, che questa critica sociale dello Spencer, per quantunque possa parere rigida ed alquanto severa, è tut-

tavia irrepugnabile e conforme a verità. A questo riguardo a me sia concesso di avvertire che tutte le censure da lui ora mosse alla civiltà contemporanea, già erano state da me ripetutamente fatte parecchi anni or sono alloraquando la sua dottrina positivistica da me combattuta era menata in trionfo. Già nel 1873 io notava, che la civiltà verace di un popolo mal si estima dal numero delle sue falangi o dal rombo de' suoi cannoni, e che il vedere la civiltà dell'Europa puntellarsi sopra una spaventevol caterva di armi e di armati, non porge argomento del suo felice avvenire (1). Sei anni dopo io faceva di pubblica ragione il mio opuscolo: *La riforma dell'educazione mediante la riforma dello Stato*, col fermo proposito di combattere a tutt'uomo l'enciclopedismo e la statolatria. " L'enciclopedismo (io scriveva) è il verme roditore delle nostre scuole, il cancro dell'educazione moderna..... Sacrificata al passivo meccanismo la libera attività del pensiero. Prostrata e conquisa sotto il cumulo delle materie scolastiche l'intelligenza, epperò non arbitra e donna di sè, ma dominata, trascinata, rapita in vorticoso giro dall'incalzarsi delle lezioni. Inaridita la vena del sentimento e della immaginativa, che fecondano ed avvivano le idee della severa riflessione... Insieme colla vita intellettiva anche la vita fisica e la operativa patiscono naufragio nell'attuale ordinamento dei nostri studi. Il peso dell'enciclopedismo gravita tutto quanto sul cervello giovanile, che affaticato dalla soverchia applicatezza di mente, viene dalle troppe e troppo disparate materie posto a sì terribil pressura da rimanerne scosso e svigorito il sistema nervoso (pagine 10-12) „ (2). Passando poi alla statolatria, io deplorava che lo Stato odierno, rompendo la sua orbita, intenda ogni dì più ad assorbire in sè la libertà collettiva della nazione e l'autonomia personale de' singoli individui, proclamandosi il supremo ed assoluto educatore de' cittadini, la forma più sintetica e più

---

(1) *La scuola e la famiglia*, Torino, 1873, pag. 8. Il generale Ferrero, Ministro della Guerra, in un suo discorso pronunciato al Senato nel giugno 1894 e pubblicato nel giornale " L'Esercito Italiano „, disse: " Nessuna migliore educazione può essere data all'infuori dell'esercito „. Bisogna ben dire che queste parole gli siano uscite fuori dalla punta della spada, anzichè dalle pieghe del suo cervello.

(2) Vedi pure la mia opera *Del positivismo*, pag. 237, ed. 2ª.

perfetta dell'umanità. Contro questa mania enciclopedica io insorgeva nuovamente nella mia Prolusione universitaria del 1881, *La scienza e la vita*, dove io avvertiva che a' dì nostri la scienza attrasse dentro la sua orbita l'arte, la religione e la morale; deploravo che l'indirizzo de' nostri istituti educativi fosse tutto quanto rivolto alla coltura esclusiva del pensiero sino ad assorbire nell'istruzione ogn'altra attività dello spirito, mentre l'uomo non vive di sola conoscenza, ma altresì di virtù e di amore, e la scienza è sibbene una splendida manifestazione dell'umana essenza, ma non è punto l'umanità tutta quanta.

Quanto alla educazione fisica in particolare, già da qualche tempo io segnalava alla pubblica considerazione (1) l'attività febbrile, con cui i nostri novatori si adoprano a propagarla al di là de' suoi naturali confini, esaltandola fuor di misura e proclamandola quale un oggetto di una disciplina nuova e distinta, che si regge da sè, come se le altre parti dell'umana educazione, la intellettiva, la estetica, la morale e la religiosa non potessero reggere al suo paragone o contassero poco meno che nulla. Nel che costoro si mostrano per certo conseguenti al loro principio positivistico, secondo cui dall'organismo fisiologico germina ed irraggia la vita umana sotto tutte le sue forme, in tutte le sue manifestazioni; ma insieme colla logica dovrebbero pure rispettare la verità storica, e non immaginarsi di avere essi introdotto in Italia il concetto e l'arte dell'educazione fisica, come se prima di loro nulla di buono e di commendevole si fosse fra di noi nè pensato, nè fatto intorno a questo punto (2).

Io ho accompagnato fin qui il nostro autore nella successiva esposizione dei fatti e dei commenti, che formano l'oggetto del suo volume. A questo punto viene spontanea una domanda: A quale conclusione mette capo la critica sociale dello Spencer? Se gli è vero, che l'esaltazione della forza bruta, il militarismo, la statolatria, la mania dell'istruzione, la coltura smodata dell'organismo fisico accusano un decadimento di civiltà ed un

(1) *Dell'educazione umana in generale e dell'educazione fisica in particolare.* Asti, tip. Brignolo, 1898, pag. 14-18.

(2) Un intelligente e fervido cultore della storia della pedagogia italiana, G. B. Gerini, sta appunto raccogliendo i pensamenti de' nostri sommi pedagogisti intorno l'educazione fisica.

ritorno alla barbarie, quale sarà il concetto tipico, su cui deve modellarsi la civiltà vera, quale il principio supremo informatore del perfezionamento umano? Da quale fonte provengono tutti questi elementi morbosi e corrompitori della social convivenza, a qual nuovo ideale occorre risalire per venirne al riparo? Disaminiamo per bene i pervertimenti sociali da lui deplorati e saremo condotti a riconoscere, che essi hanno la loro ragione spiegativa nel suo sistema positivistico: egli stesso mostra di essersene accorto, sebbene non ne faccia una confessione esplicita ed aperta. E veramente se, giusta il determinismo dell'autore, i fenomeni psichici interni ed i fenomeni cosmici esterni, quasi anelli di una catena indissolubile, si succedono e si corrispondono con tale irrefrenabile necessità, che nessuna forza vale ad arrestarli o mutarne l'indirizzo, ne consegue che tutti e quali che siano i fatti della vita umana individua e sociale avvengono a tenore delle leggi della natura, e quindi tutti hanno lo stesso valore e vanno apprezzati ad un modo: quindi cade ogni differenza intrinseca ed essenziale tra l'onesto ed il turpe, tra l'incivilimento e la barbarie. Tutto è quale debb'essere, tutto è a suo posto: impotente, anzi insensato ogni conato di rigenerazione personale e sociale: non evvi più ragione di maledire la tirannide della spada o dello scettro ed esaltare l'eroismo del martire, che muore per il trionfo della giustizia. Dacchè l'io umano conscio e libero di sè è un'illusione, dacchè non ha niente di suo, che gli appartenga, non possiede una sostanzialità sua propria individua ed incomunicabile (1), epperò i suoi fenomeni interni, i pensieri, i desiderii, i sentimenti non sono veramente cosa sua, essendo egli medesimo niente più che una successione di fenomeni, ne consegue che non ha diritto ad una sfera di attività sua propria, trascinato nel vortice del fenomenismo universale; epperò non si ha ragione di detestare e combattere la statolatria la quale invade ed assorbe la cerchia di attività riservata alla personalità individua de' singoli cittadini. Nel suo

(1) " Per quantunque la credenza nella realtà dello spirito individuale sia inevitabile, e benchè sia raffermata non solo dall'unanime consenso del genere umano ed adottata da tanti filosofi, ma ben anco dal suicidio dell'argomento scettico, tuttavia non può per nulla venir giustificata dalla ragione „ (Spencer, *Primi Principii*, § 20).

volume: *Educazione intellettuale, morale e fisica*, lo Spencer fa sua la sentenza, che a riuscire nella vita occorre *primamente* essere *un buon animale*, e delineando il concetto organico dell'educazione ripone il sommo problema pedagogico nel determinare il valore relativo dei diversi ordini di cognizioni, e quindi riguarda il sapere come la norma direttiva della vita, riguarda la scienza siccome essenzialmente religiosa e maestra di moralità. Questo concetto già lo aveva espresso ne' suoi *Primi Principii*, dove scrisse: " Sapere è prevedere: ogni conoscenza ci giova in ultimo più o meno ad acquistare il bene e scansare il male „ (§ 5). Ed ora egli deplora la smania dell'educazione fisica, la quale intende appunto a fare dell'alunno *un buon animale*, e protesta contro il grido universale *istruite, studiate,* proclamando che conoscere il bene è altra cosa dal volerlo e dall'operarlo, e che la maestra suprema della vita è la facoltà affettiva e volontaria, maestra di cui l'intelligenza conoscente non è che un'ancella.

Gli accennati *Commenti* dell'autore riguardati nel loro intrinseco significato mettono capo a questa conclusione: bando al positivismo fenomenistico, ritorno allo spiritualismo temperato. Il soggetto umano è mente sostanziale informante un organismo corporeo, ossia è persona individua, che mediante la virtù intellettiva ha coscienza di sè e conoscenza della realtà esteriore, mediante la libertà del volere aspira ad un ideale divino di perfezione, da cui ha diritto di non essere deviata. Su questo principio fondamentale posa la dottrina dello spiritualismo, e solo in virtù di questo principio la società può venire al riparo dei mali dall'autore deplorati e risorgere dalla barbarie alla civiltà. Infatti l'incivilimento essendo un lavorìo dello spirito collettivo, libero e conscio di sè e rivolto ad un ideale preconosciuto di perfezione, può soltanto fiorire da soggetti dotati di personalità. La persona ha un valore assoluto e divino, perchè appartiene anzi tutto a sè medesima ed ha diritto alla libertà ed al rispetto; epperò apparisce detestabile la statolatria, che toglie ai singoli cittadini quell'autonomia personale, a cui hanno diritto, convertendoli in altrettanti mancipii del potere governativo. Nel fanciullo medesimo già rifulge la dignità e l'eccellenza propria della persona umana, e su questa personalità si regge e si muove tutta la scienza e l'arte educativa. In lui la mente personale sovrasta all'organismo corporeo infor-

mandolo di sè ed atteggiandolo in ordine al suo ideale di perfezione; dunque male adoperano quei novatori, che esaltano fuor di modo l'educazione fisica come se potesse reggersi da sè soverchiando tutte le altre parti più elevate dell'umana coltura, e peggio adoperano i fautori del militarismo, i quali alla forza bruta, che viene dall'addestrato e robusto organismo, sommettono il diritto, che vien dalla ragione. L'io umano personale è una sintesi vivente di mente e di cuore, di pensiero e di azione, di ragione e di affetto insieme contemperati con tale armonia, che la sovrana facoltà del libero volere attinge dal sentimento l'energia, dall'intelletto la conoscenza per assorgere all'ideale della vita; epperciò nulla vi ha di più contrario all'ordine intrinseco della natura umana quanto l'idolatria dell'enciclopedismo e dell'istruzione, che fa dell'uomo una mera intelligenza e sacrifica al culto della scienza il principio della vita affettiva, morale e religiosa.

L'uomo non vive solo del Vero conosciuto, ma altresì ed assai più del giusto e dell'onesto rispecchiato nelle sue libere azioni. Il nostro filosofo tiene in altissimo conto la moralità della vita, ma ad un tempo reputa la coltura intellettuale impotente a generarla; quindi vede affacciarsi al suo pensiero il gravissimo problema: su quale altro fondamento, che non sia la scienza, potremo noi edificare l'educazione morale e religiosa? Anche su questo rilevantissimo punto la mente dell'autore si innalza ad un nuovo ordine di idee, che trascende il suo sistema positivistico. Ricisamente egli pronuncia, che nessuna dottrina morale foggiata dalla pura ragione e posata sulla mera natura può tanto valere sulle anime da sostituire l'antica morale religiosa fondata sulla rivelazione e sulla fede positiva. Nessun codice naturale può somministrare all'universale degli uomini una sicura ed efficace norma direttiva della vita. Egli deplora siccome insana e crudele l'opera di que' pensatori, che colle loro scettiche discussioni perturbano e spengono la credenza di certe anime nella felicità avvenire, unico e supremo conforto nelle sventure e nelle lotte dolorose della loro vita.

Qui ci troviamo condotti all'ultimo capitolo del volume, che porta per titolo: *Questioni supreme*. E sono davvero supreme le questioni ivi discusse. Leggendo queste ultime pagine vi si sente il soffio di una nuova vita, il risveglio di una sublime intelli-

genza, che s'innalza alla intuizione di nuovi cieli e nuova terra, l'anelito di una grand'anima, che sente pesare sopra di sè il mistero della vita e cerca la luce che lo riveli.

Il grande pensatore, stanco del lungo e profondo meditare, prossimo al tramonto de' giorni suoi, contempla lo scioglimento del dramma della sua longeva esistenza ed interroga la propria coscienza intorno l'ora estrema, che lo attende. *Essere o no*: ecco il sommo problema. Chi mi dirà l'ultima parola intorno al grande mistero? La fede o la ragione? La religione o la scienza? Il cuore o la mente? Che sarà di me al di là di questo mondo, che va scomparendo da' miei occhi? Se l'io umano fosse niente più che una fantasmagoria di fenomeni, che spuntano e scompaiono come i flutti del mare, che si inseguono e svaniscono, la sua esistenza oltremondana non avrebbe ragione di essere. Ma chi sente di essere una realtà vivente, conscia e libera di sè, e nota le sue infinite aspirazioni, chi riconosce il valore assoluto della vita umana fondata sulla dignità della persona, costui scorge che al di là dei confini della vita presente si stendono nuovi e più sublimi orizzonti. Ed in questo *al di là* lo Spencer spinge il suo sguardo, sente la vanità del suo fenomenismo positivistico e riconosce che nell'intimo fondo di questo universo, in cui ci muoviamo e siamo, vive non già un Assoluto inconoscibile ed inpensabile, quale lo aveva concepito ne' suoi *Primi Principii,* una specie di *caput mortuum* estraneo al mondo reale, bensì l'Infinito sussistente, motore supremo ed intelligente di quanto esiste. Il nostro Leopardi aveva immaginato l'Infinito siccome un oceano senza riva e senza fondo, dove sarebbe andato ad annegarsi il suo pensiero, e conchiudeva:

...E il naufragar m'è dolce in questo mare (1).

Lo Spencer impaurisce davanti al naufragio della sua esistenza, e confessa che da parecchi anni l'idea dello spazio infinito ed eterno suscita in lui un'impressione di brivido e di sgomento, ripugnandogli che in quella indefinibile immensità

(1) La poesia intitolata *L'Infinito.*

vada a smarrirsi l'individualità del suo io. Un altro poeta italiano ricordando il trapasso della sua compagna, cantava:

.....sotto a qual sembianza, e in quai contrade
Dell'universo nuotino disgiunti
Quegli atomi, ond'Elisa era composta,
Riuniransi e torneranno Elisa?
Chi seppe tesser pria dell'uom la tela,
Ritesserla saprà (1).

Io mando un riverente saluto ad Herbert Spencer, che nei *Fatti e Commenti* illuminò di nuova, splendida luce il lungo e glorioso suo lavorìo scientifico e lo coronò col presentimento di una vita, che non conosce tramonto.

Di una petizione intorno al divorzio presentata alla Camera francese.

Nota del Socio GIAMPIETRO CHIRONI.

A chiunque abbia pensato con sincerità intorno l'argomento del divorzio, s'è certo addimostrata in tutta la vanità sua la considerazione che si fa dell'essere questo istituto eccezione dolorosa sì, ma necessario correttivo al concetto della indissolubilità del matrimonio. Or s'intende che tale riflesso sia usato, e molto, nel dibattito puramente dottrinale tra chi al divorzio asserisce così grande virtù da levare l'ordinamento famigliare a quell'altezza d'ideale che vorrebbe la società odierna, e chi lo avversa quale offesa al sentimento morale del nostro paese, qual pericolo minacciante d'immane rovina le ancor salde istituzioni famigliari nostre, s'intende; nella lotta, anche l'infingersi può parere buon accorgimento: può parere, diciamo, non essere, perchè l'indagine condotta a servigio di preconcetti onde sia già occupata la mente di chi la move, e con l'animo fatto di

(1) Ippolito Pindemonte, *I Sepolcri, a Ugo Foscolo.*

voler dimostrare che il preconcetto è verità, non è ricerca onesta, nè buona. Ma che quel riflesso sia con serietà esposto in lavori legislativi vôlti a procacciare sollievo alle cosidette " vittime dell'indissolubilità matrimoniale „ (e più vero sarebbe dirle vittime di lor condannevole imprudenza, o dei loro vizî), non s'intende, non si giustifica: l'opera legislativa non dev'essere opera di parte disserente di questioni teoretiche, e deve svolgersi, a ragion del fine suo, secondo criterî obbiettivi, fissati con l'osservazione profonda, sicura, dei bisogni della collettività.

Or come si può, con severa maturità di convinzione, dire del divorzio ch'è soltanto mezzo di temperare il principio dell'indissolubilità, il quale riman sempre elemento essenziale, costitutivo, del matrimonio? Ma certo, a parole si riesce a coordinare i due concetti, ponendoli nel rapporto di eccezione a regola: in realtà, se l'eccezione si riferisce alla regola, nel senso che in riguardo di speciali condizioni si hanno stati o momenti dell'oggetto regolato ai quali non si può senza danno applicare la regola nella sua interezza, altrimenti avviene quando quel che si dice eccezione contiene invece un concetto al tutto opposto alla presunta regola. Allora s' ha un principio contrastante ad altro principio: e se nel regolare il medesimo obbietto penetri dapprima con la veste bugiarda dell' eccezione, in seguito, per necessità di cose, e in specie per la resistenza del mezzo in cui o su cui opera, può rimanere confinato nel breve termine concessogli: ma può anche per la modificazione che rechi al mezzo, render questo così consenziente a sè, da rimanerne scosso ed eliminato l' altro principio di cui pur avrebbe dovuto soltanto limitare la virtù. Nè altra è, e nel fatto può essere, la relazione tra i due concetti dell' *indissolubilità* e della *dissolubilità* del vincolo matrimoniale: il primo non è eccezione in riguardo al secondo, contenendo essi due affermazioni opposte, contraddicentisi nell' essenza loro, due principî contrarî cioè, i quali si potranno ben trovare e tenere in equilibrio nella legge, per matura sapienza di governanti e per virtù di governati; ma quest'armonia formata dall'arte di governo, non toglie l'incompatibilità che ne separa la natura. E per tale intima ragione di disparità, l'equilibrio artificiosamente mantenuto è sempre gravemente minacciato da qualunque agente esterno che per poco vi operi su; e frutto com' è della *politica*, di quella, s' intende,

che si riduce ad essere *arte* di governo, ogni mutazione che ne cangi la instabile direzione, può romperlo.

Quest'urto, questa lotta è tra i due concetti su ricordati: non è possibile, secondo la logica ch'è nei fatti, tenere la dissolubilità qual rimedio a *certi* casi in cui, per triste necessità di cose, pel profondo dissidio tra i coniugi, pare che alla società matrimoniale non si possa dar altro risanamento che sopprimendola; non si pensa che la ragione stessa cui s'informa la pretesa eccezione, l'ampiezza della finalità sociale che vi si contiene, imporrà che non pel *dissidio* tra i coniugi secondo apparisce in *date circostanze*, ma ogni volta che questo *profondo dissidio* sia constatato, la dissolubilità s'impone. Quando si consideri che il carattere essenziale dell'indissolubilità data al matrimonio significa, con alto fine di etica sociale, educazione dei coniugi a quell'intimità di vita onde le facoltà loro s'integrano, e si confondono poi in servigio della società famigliare constituita secondo l'intento della civile convivenza: necessariamente si dovrà escludere che, pur com'eccezione, il vincolo matrimoniale sia dissolubile. Ma quando invece si pensi, che la società famigliare è determinata dal reciproco affetto, vivo e profondo così, da indurre l'intima *consuetudo* tra i coniugi; che tal sentimento, come cosa umana, può essere non perenne, e che mancando, per qualsivoglia causa venga meno, toglie la ragion della comunanza; dove ciò si affermi, si potrà dir cosa che lascia un'istituzione di così grande importanza sociale com'è il matrimonio, in balìa allo spensierato capriccio, al freddo egoismo degl'individui, ma si dirà certo cosa ch'è illazione giusta, perchè diretta e necessaria, del concetto onde l'istituto del matrimonio trarrebbe la sua ragion di essere. Si potrà e dovrà condannare tal modo d'intendere la società coniugale, ridotta per esso a semplice unione secondo lo stato di natura; si potrà opporre, che la volontà sociale ha in sè il potere di regolare secondo il generale interesse la famiglia, e quindi il matrimonio per cui vien constituita; e sia: ma dicendo così, non si può impedire che accolto quel concetto non si cerchi di estenderlo giusta la natura intima sua, che non si combatta per esso, e pel rispetto maggiore alla libertà individuale, l'artifiziosità di ogni limite imposto a frenarlo, e non s'insorga a proclamare la cessazione dell'affetto reciproco qual fine necessario della società coniugale, qual causa di divorzio.

Onde a chi scrive avvenne già di pensare (1), che il giustificare il divorzio ristringendolo a pochi casi, sia argomento errato, se prodotto onestamente, e peggio, se messo avanti ad arte. E se ne avea già prova nel fatto, che in occasione della formazione del Codice civile germanico, ogni accenno a limitare il novero dei casi determinanti lo scioglimento del matrimonio per divorzio, suscitò gravissime ire, d'indole a mezzo tra religiosa-storica e sociale; miglior dimostrazione se n'ha ora, per quel che avviene in Francia. Dove un giudice, già noto pel suo atteggiamento curioso di vindice dell'equità naturale contro la legge positiva, che pur dovrebbe applicare, il Magnaud, pensò potersi, in contrario alla legge, provvedere il divorzio per mutuo consenso; e adesso è una petizione che, specialmente a cura dei fratelli Margueritte, letterati di noto valore, vien presentata alla Camera francese: con la qual si chiede si possa pronunziare il divorzio non soltanto per mutuo consenso dei coniugi, ma per la unilaterale volontà di ognun di essi.

Sarà accolta la petizione? Non pare: e ha sollevato anche tra i fautori del divorzio a termini ristretti, preoccupazioni gravi, e critiche acerbe. E, affrettiamoci a dirlo, in queste tarde paure, in queste postume resipiscenze, il torto è loro: la petizione è pur troppo lo sviluppo necessario del concetto della *dissolubilità*, e mostra ch'è inganno il considerarla qual breve eccezione, con l'estesa virtù che ha di principio presiedente alla costituzione del matrimonio. Ed è fatto storico che insegna ed ammonisce: chi ha finora tenuto per vero che il divorzio ben possa conciliarsi al concetto della indissolubilità, cui sarebbe sempre serbata generalità e dignità di regola, non può più illudersi, nè illudere: non v'è artificio di frase o elocuzione studiata che tolga il pericolo di agitazioni o di petizioni chiedenti sia riconosciuta la intera libertà di divorziare. Pericolo non vano, e che si svolge con la logica fatale che s'osserva nello svolgersi d'ogni errore iniziale: insito com'è nel principio stesso, che pur s'asconde sotto le apparenze insidiose di semplice eccezione.

Or la speciale gravità della question del divorzio, esige

---

(1) V. in " Memorie della R. Acc. delle Sc. „, s. II, vol. LII, sed. 16 febbraio 1902.

s'eviti di porla su termini equivoci: i quali potrebbero giovare non poco a far accogliere una riforma (chè tale, e non eccezione è il divorzio) contro di cui invano con grande difficoltà si tenterebbe d'insorgere poi. Perchè la ripugnanza a mutar leggi come questa, è alimentata da due forti considerazioni dedotte dalla natura della legge, e dal carattere speciale che a tal riforma s'attribuisce: la legge, come freno all'arbitrio individuale, quando abbia allentato la sua stretta non può senza scosse e senza reazione della libertà, cui allargò il dominio, riprendere l'antica virtù: la riforma poi del divorzio, assunse, e male, il carattere di questione politica, quando è soltanto di etica sociale.

Ai quali due ostacoli or s'abbatte il movimento che vorrebbe insorgere in Francia contro di essa: eccitato dai lavori del maggior istituto scientifico francese (1) e dalle considerazioni che intorno all'applicazione della legge del 1884 son fatte da alti magistrati (2), richiamanti i giudici a tener l'istituto entro quei netti termini che il legislatore volle. Ed è bene che in Italia a questo grave movimento s'avverta, poichè vi passa inosservato, o quasi, e si sappia che mentre da noi si cita, tra gli altri, l'esempio della Francia per dire che anche nella sua legislazione civile venne introdotto il rimedio del divorzio, non si tien poi conto delle ricerche recentissime che appunto in Francia si fanno intorno ai risultati della riforma: risultati tutt'altro che favorevoli, e sconsiglianti dall'introdurla i paesi che ancor non l'avessero.

Lo studio sul delicato argomento venne condotto dall'Accademia di scienze morali e politiche con metodo rigorosamente obbiettivo, col raffronto cioè dei motivi che nella formazione della legge del 1884 s'esponevano in favore della riforma, alle statistiche dal 1884 al 1900, rivelanti se in realtà quelle considerazioni avessero buona consistenza: e l'esperienza ne dimostra ora l'intera ed assoluta fallacia. Si credeva, come si crede da

---

(1) " Acad. des Sc. mor. et polit. „, séances 17 et 24 mai 1902. Commun. de Mr Légrand et observ. de Glasson, in " Compt. rend. „, 62e année, 1902, p. 335 et suiv.

(2) " La Réforme soc. „, 16 déc. 1895; Morizot-Thibault, *La femme et le divorce* (" Congr. d'écon. soc. „, séance 8 juin 1901); in " Compt. rend. „ cit., pp. 352, 353.

quanti reclamano la riforma in Italia, che il divorzio avrebbe e terrebbe sempre la natura di rimedio all'imperfezione della separazione, nè si cangierebbe mai in deplorevole abuso perturbante l'ordine delle famiglie; si diceva, con espressioni che si leggono ripetute, pressochè alla lettera, nei documenti parlamentari accompagnanti la presentazione del progetto sul divorzio alla Camera italiana, essere il provvedimento " *stato di eccezione indispensabile sebbene dolorosa* "; si riteneva che i magistrati influissero coi loro giudizî a fissare negli animi l'eccezionalità e la severità del penoso, ma salutare rimedio; si sperava, s'avea certezza, che il divorzio non avrebbe aumentato sensibilmente il numero delle separazioni coniugali. Parole e speranze vane! Le cifre mostrano come l'assai doloroso e niente salutare rimedio operò: le domande di divorzio da 1773 nel 1884 salirono nel 1900 a 9309; le domande accolte da 1657 nel 1884 si accrebbero a 7820 nel 1900. Vero è che una leggerissima diminuzione s'avvertì nel confronto di questa cifra a quella riferentesi all'anno precedente, ma s'osserva a ragione, che il fenomeno nulla di costante può significare davanti ad un fatto nuovo: che, cioè, se diminuì il numero dei divorzi nella provincia della Senna, aumentò invece in tutte le altre provincie della Francia, dove, tenendolo in rapporto ad ogni 10.000 abitanti, dal 3,8 ch'era nel 1885, si elevò al 5,3 per la popolazione urbana, e dal 0,70 al 2,02 per la rurale. Ed altro fatto, socialmente gravissimo, è pure posto in risalto: che in confronto alle altre classi della popolazione, il numero dei divorzi si è considerevolmente accresciuto nella classe operaia, elevandosi da 1,666 ch'era nel 1885 a 4,890 nel 1899, e in quella dei coltivatori della terra, che da 397 ch'era nel 1885 s'innalzò a 837 nel 1891.

Al qual fenomeno pauroso ch'è la facile dissoluzione delle famiglie degli operai e dei coltivatori, che dalla saldezza loro attingono i mezzi più efficaci per resistere alle strettezze e difficoltà che le premono, altri risultati s'aggiungono, dimostranti come i rimedi attesi dal divorzio all'assetto dell'ordine famigliare, abbian fallito ad ogni speranza: per esso non aumentò, secondo si credeva, il numero dei matrimonî e delle nascite legittime; non diminuì il numero delle nascite dei figli naturali; non diminuì il numero delle condanne per adulterio, che anzi s'accrebbe da 371 ch'era nel 1883 a 1175 nel 1900; non di-

minuì il numero dei suicidi (pensandosi avrebbe il divorzio dato rimedio ai dolori famigliari), chè anzi s'elevò da 7,267 ch'era nel 1883 a 8,926 nel 1900. Ed è notevole che questo numero aumenta, dove è in aumento il numero dei divorzi (1).

Nè meno grave è poi il fatto dell'esser venuto meno quel che s'era sperato fosse il miglior presidio vòlto ad impedire la degenerazione del divorzio da rimedio (!) in abuso: il contegno cioè dei Tribunali, che applicando severissimamente la legge, avrebbero fatto rilevare quanto penoso fosse l'estremo provvedimento del divorzio. In realtà, questo " *rimedio* „ penetrò talmente nei costumi, che i Tribunali vennero indotti ad applicare la legge non interpretandola, ma *estendendola* a casi che pur non v'erano compresi: e trascorrendo a sentenziare il divorzio con così grande facilità, e quasi indifferenza, da parer cosa strana allo stesso Guardasigilli. Al qual riguardo, non si può trascurare la testimonianza, autorevolissima, di Morizot-Thibault (2), che per più anni tenne officio di pubblico ministero alla IV sez. del Tribunale civile della Senna, ove in una sola udienza vennero pronunziati 294 divorzi (3): osserva egli, che i Magistrati accolgono quasi con fretta le domande di divorzio, e *respingono* facilmente quelle di semplice separazione: e del procedimento giudiziale nelle cause di divorzio, e dell'importanza grave che dovrebbe avere, dice, che se nel discutere di muri comuni i patrocinanti sviluppano a lungo le proprie ragioni di contesa, altrimenti avviene delle cause di divorzio, dov'è semplicemente question di rompere un'unione, e di sciogliere una famiglia (4).

Dinanzi ai quali risultati, così fatali all'ordine famigliare ed alla civil comunanza, parrebbe condannevole esitanza quella di non chiedere senz'altro l'abrogazione della legge del divorzio: eppure si constata che quest'abrogazione non è possibile, e s'osserva " che uno tra i maggiori mali del divorzio è questo *del non* " *poter un paese liberarsene quando lo si è inoculato nella legge,* " *ed è poi passato nel costume* „ (5).

---

(1) Légrand, Commun. cit.
(2) Morizot-Thibault, Commun. cit.
(3) Ibid.
(4) Ibid.
(5) Légrand, Commun. cit.

Gioverà la conoscenza di questi studî e voti al paese nostro, dove la questione del divorzio è discussa nei lavori legislativi iniziati su di essa, coi medesimi termini che valsero alla Francia la legge del 1884, dimostrata, dopo un ventennio di prova, esizialissima? Speriamolo: e speriamo pure, per giusta estimazione nostra, che conoscendoli si smetta di sostenere come buona la riforma del divorzio con gli argomenti retoricamente falsi del trattarsi di una “ *mera eccezione* „, di un “ *rimedio doloroso, ma salutare* „: nè s'asserisca più, secondo da qualcuno s'è fatto, che nei paesi dov' è in vigore il divorzio, mai s' è pensato a reclamarne l'abolizione. E dire, che ben facilmente si potrebbe conoscere perchè ciò non s'è fatto e non si può fare in Francia, e come tuttavia gli studiosi francesi pensino e propongano mezzi di riparo: e che si potrebbe pur inferire dalle statistiche della Germania, dell'Inghilterra, della Svizzera, e ancor del Belgio e dell'Austria, che il numero dei divorzi vi è in continuo aumento: basterebbe a ciò, potere e saper studiare con animo scevro da preoccupazioni politiche.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Novembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO CONTE TOMMASO SALVADORI

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Morera e D'Ovidio Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Segretario comunica una lettera del Socio non residente Volterra, che accettò l'incarico di rappresentare l'Accademia alle feste centenarie in onore di Henrik Abel in Cristiania, e che infatti ivi si recò all'uopo dal 5 al 7 settembre u. s.

Indi partecipa la morte del Socio non residente prof. Riccardo Felici, avvenuta il 23 luglio u. s.; del Socio straniero Rodolfo Virchow, avvenuta il 5 settembre u. s.; e del Socio corrispondente Agostino Alessio Damour, avvenuta il 22 settembre u. s. Questi insigni scienziati appartenevano all'Accademia rispettivamente dal 1896, dal 1889 e dal 1898.

Pervennero in omaggio all'Accademia:

dal Socio Mattirolo un opuscolo: *In memoria di Giuseppe Gibelli;*

dal Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi, il secondo volume delle *Opere matematiche* di esso Brioschi;

dal Socio corrispondente Celoria un discorso: *Il concetto del mondo nell'astronomia moderna;*

dal Socio corrispondente Righi una memoria: *Sui fenomeni acustici dei condensatori;*

e dal Socio corrispondente VERONESE una nota: *Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement.*

Il Socio FOÀ, avendone avuto invito dalla Presidenza, presenta e legge la commemorazione di Rodolfo VIRCHOW da lui scritta, e che sarà pubblicata nel volume delle *Memorie.*

Il Socio SEGRE offre, a nome dell' autore prof. E. PASCAL, il manuale: *I gruppi continui di trasformazioni: parte generale della teoria,* e ne discorre.

Lo stesso fa il Socio FOÀ della nota: *Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien,* di A. KÖLLIKER, Socio straniero dell'Accademia.

Ed il Socio GUARESCHI fa omaggio del suo scritto: *Faustino Malaguti e le sue opere,* ricordando che MALAGUTI fu Socio dell'Accademia di Torino. Fa notare l'importanza di alcune lettere di MALAGUTI a GERHARDT, che ora egli pubblica per la prima volta; rileva inoltre l' importanza dei lavori di MALAGUTI sugli equilibrii chimici, e come in questo campo di studii, che ora ha assunto fondamentale importanza, il MALAGUTI abbia precorso i tempi. Questo nostro connazionale ha esercitato una notevole influenza sui progressi della Chimica dal 1835 al 1860.

Il Segretario comunica che dopo l' adunanza precedente, tolta in segno di lutto per la morte del compianto Presidente COSSA, furono consegnate alla Segreteria:

una nota del Socio PEANO: *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza;*

una memoria del Socio FOÀ: *Sulla produzione cellulare nell'infiammazione e in altri processi analoghi;*

una memoria del Socio GUIDI: *L'arco elastico senza cerniere;*

ed una memoria del Socio MORERA: *Sull'integrazione delle equazioni ai differenziali totali del secondo ordine.*

La Classe accoglie a voti unanimi queste tre Memorie nelle sue pubblicazioni.

Finalmente viene accolta per l'inserzione negli *Atti* la nota: *Sulla rappresentazione delle forme, ed in particolare della cubica quinaria, con una somma di potenze di forme lineari,* del professore Fr. PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

LETTURE

Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria con la somma di potenze di forme lineari.

Nota del Prof. FRANCESCO PALATINI.

Della generalizzazione del pentaedro di Sylvester nello spazio a quattro dimensioni si è occupato il prof. E. Ascione (*), il quale trova che il luogo dei punti di S_4, la cui quadrica polare rispetto ad una data varietà cubica U di dimensione 3 degenera in un 1-cono, è una curva γ di ordine 20 (**) doppia per la Hessiana della varietà, e che gli assi degli ∞^1 1-coni così risultanti sono quadrisecanti della γ e formano una rigata R appartenente alla Steineriana, che nel nostro caso coincide con la Hessiana. Per ogni punto di γ passano quattro rette di R. Nella presente Nota, premesse alcune considerazioni generali, che potrebbero servire di base a più ampie ricerche sulla rappresentazione delle forme con la somma di potenze di forme lineari, e fatto notare come il metodo qui esposto si presti comodamente alla trattazione dei casi finora risolti relativamente a questo argomento, mi propongo in ispecial modo di esaminare quale sia il minimo numero di cubi con la somma dei quali possa rappresentarsi la cubica quinaria generica.

1. — Nello spazio S_r si considerino le varietà V di dimensione $r-1$ ed ordine n, le quali formano un sistema lineare di

(*) *Sulla Hessiana di una varietà nello spazio a quattro dimensioni*, " Giorn. di mat. „, vol. XXXI, 1893.

(**) Cfr. anche Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, " Atti Acc. Lincei „, 1900.

dimensione $m = \frac{(n+1)\ldots\ldots(n+r)}{r!} - 1$, e si rappresentino linearmente coi punti di S_m. Allora i punti di S_m che corrispondono alle ∞^r varietà che si riducono ognuna ad un iperpiano di S_r contato n volte, formano una varietà (normale, razionale) di dimensione r e ordine n^r, che indicheremo con M, la quale altro non è che la varietà di S_m rappresentata in S_r da tutte le varietà di dimensione $r-1$ e ordine n di questo spazio (cioè la varietà le cui sezioni iperpiane hanno per corrispondenti in S_r le varietà di dimensione $r-1$ ed ordine n). Ora l'equazione di una V generica si potrà porre sotto la forma

$$(1) \qquad a_1 A_1^n + a_2 A_2^n + \ldots + a_k A_k^n = 0$$

dove le A sono forme lineari di dimensione r (cioè di $r+1$ variabili) fra loro indipendenti, quando (e solo allora) considerando tutti i sistemi lineari della forma

$$(2) \qquad \lambda_1 X_1^n + \lambda_2 X_2^n + \ldots + \lambda_k X_k^n = 0$$

essi comprendono tutte le V. Riferendoci alla rappresentazione, menzionata in principio, delle forme V coi punti di S_m, al sistema (2) corrisponde in S_m uno spazio di dimensione $k-1$ determinato dai k punti della M corrispondenti alle varietà $X_1^n = 0, \ldots, X_k^n = 0$, ed al fatto che considerando tutti i sistemi della forma (2) essi comprendono tutte le V, corrisponde il fatto che gli spazi di dimensione $k-1$, ognuno dei quali è determinato da k punti della M, riempiono l'S_m; dunque l'equazione di una V generica si potrà porre sotto la forma (1) quando (e solo quando) per ogni punto di S_m passa almeno un S_{k-1} che sia secante della M (*).

Il metodo qui esposto conduce nel caso delle forme binarie subito alle note conclusioni, come si vede applicando il teorema sugli spazi secanti delle curve razionali normali. " Per un punto di un S_p passano ∞^{p-2s+1} spazi S_{p-s} secanti di una C^p normale; ciascuno di questi spazi è determinato da $p-2s+1$ delle sue

(*) In questo scritto per spazio di dimensione l *secante* una data varietà qualsiasi intenderemo sempre uno spazio che abbia con questa $l+1$ punti in comune.

intersezioni con C^p, essendo $2s - 1 \leq p$ „ (*). Per far vedere poi come esso si presti comodamente alla trattazione dei casi fin qui risolti della possibilità di esprimere una forma generica di ordine n come somma di un dato numero di n^{me} potenze, mi limiterò ad accennare al caso che apparisce meno facile. Si faccia $r = 3$, $n = 4$, quindi $m = 34$; la M è dell'ordine 64. Consideriamo la rappresentazione univoca dei punti di M con quelli di S_3. Ad una superficie del 4° ordine di S_3 corrisponde allora una sezione iperpiana di M; se quella superficie si scinde in due quadriche Q, Q', aventi perciò in comune una C^4 di prima specie, la corrispondente sezione iperpiana di M si scinde in due superficie F, F' di ordine 32 e aventi in comune una C^{16} ellittica normale appartenente ad un S_{15}. Se sono di dimensione x gli spazi cui appartengono F, F', dev'essere $2x - 33 = 15$ e quindi $x = 24$. Ora presi sulla M nove punti generici, essi individuano in questa una F^{32} corrispondente ad una quadrica di S_3 e appartenente ad un S_{24}. Ne viene che gli spazi ad 8 dimensioni che sono secanti della M, essendo situati negli ∞^9 spazi S_{24} che contengono le F^{32} corrispondenti alle quadriche di S_3 e che complessivamente hanno ∞^{33} punti, non riempiono S_{34}, e perciò ne segue che la forma biquadratica quaternaria generica non è rappresentabile con la somma di 9 quarte potenze (quantunque questa somma contenga una costante di più di quelle che entrano nella espressione di una forma biquadratica quaternaria generica), come per altra via ha dimostrato il Reye. Non mi fermo poi qui a considerare il caso della quartica ternaria, giacchè questo si tratta in modo identico a quello che ora seguiremo per la cubica quinaria.

2. — Prendiamo adesso il caso, che forma l'oggetto principale di questa Nota, di $r = 4$, $n = 3$, quindi $m = 34$; la M è dell'ordine 81. Parrebbe che la forma cubica quinaria generica fosse rappresentabile con la somma di 7 cubi (stantechè sono 35 le costanti arbitrarie che entrano in questa somma, come appunto nell'espressione d'una cubica quinaria generica), come la

(*) Castelnuovo, *Studio dell' involuzione generale, ecc.*, " Atti Ist. Ven. „, 1886. V. anche F. Deruyts, *Sur la théorie de l'involution*, " Bull. de l'Ac. royale de Belgique „; 1887.

cubica quaternaria generica lo è con la somma di 5 cubi; vedremo però tosto che ciò non avviene. Considerando la rappresentazione univoca dei punti della M con quelli di S_4, e preso in S_{34} un S_6 determinato da 7 punti generici di M, questi 7 punti individuano sulla M una curva normale di ordine 12 corrispondente alla quartica determinata in S_4 dai 7 punti che corrispondono a quelli sopra fissati. Ne segue che gli S_6 che sono secanti di M trovansi contenuti negli ∞^{21} spazi di dimensione 12 cui appartengono le curve normali di ordine 12 di M corrispondenti alle ∞^{21} quartiche normali di S_4. Si vede adunque che gli S_6 in discorso riempiendo soltanto quegli ∞^{21} S_{12} (per ogni punto di uno di questi passano ∞^1 S_6 seganti la C^{12} che gli appartiene), i quali contengono complessivamente ∞^{33} punti, non riempiono S_{34}. Possiamo così concludere che *la forma cubica quinaria generica non è rappresentabile con la somma di sette cubi.*

Preso un punto dell'S_{12} in cui è immersa una delle ∞^{21} C^{12} sopra considerate, per esso passano rispettivamente ∞^1, ∞^3, ∞^5, ..., ∞^{11} spazi S_6, S_7, S_8, ..., S_{11} secanti di quella C^{12}, e gli ∞^1, ∞^3, ... gruppi di 7, 8, ... punti che così risultano sulla C^{12} formano involuzioni dei ranghi 1, 3, ..., come tosto risulta dal teorema sugli spazi secanti delle curve razionali normali menzionato poco sopra. Interpretando ciò in S_4, considerando i punti di M come corrispondenti alle cubiche ridotte a iperpiani tripli, si ha che la varietà cubica

$$a_1A_1^3 + a_2A_2^3 + \ldots + a_7A_7^3 = 0 \tag{3}$$

si può rappresentare rispettivamente in ∞^1, ∞^3, ..., ∞^{11} modi con un'equazione il cui primo membro sia somma di 7, 8, ..., 12 cubi di forme lineari che uguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori alla curva del quarto ordine a cui sono osculatori gli iperpiani rappresentati dalle equazioni $A_1=0$, $A_2=0$, ..., $A_7=0$ (*).

(*) Chi volesse fare su questo argomento uno studio analitico non ha che da seguire la via tenuta dal prof. Beltrami nella Nota: *Sull'equazione pentaedrale della superficie di terz'ordine,* " Rend. Ist. Lombardo ", serie 2ª, vol. 12, 1879, via che può anche seguirsi per la quartica ternaria. I risultati poi che abbiamo ottenuto per la cubica quaternaria rappresentabile con la somma di 7 cubi sono suscettibili di una generalizzazione immediata, giacchè applicando senza modificazioni di sorta la via da noi seguita, si

Il caso di $r = 2$, $n = 4$ si tratta in modo completamente analogo, arrivando tosto alla nota conclusione che la forma quartica ternaria non è rappresentabile con la somma di 5 biquadrati (*). Si ha poi che la quartica per la quale si annulla l'invariante B di Clebsch, si può rappresentare rispettivamente in ∞^1, ∞^3, ∞^5 ∞^7 modi con un'equazione il cui primo membro sia la somma di 5, 6, 7, 8 biquadrati di forme lineari, le quali eguagliate a zero rappresentano rette di un medesimo inviluppo di seconda classe, ecc. (**).

Tornando al caso della cubica quinaria abbiamo che la (3) ha per Hessiana una varietà H del quinto ordine passante per i 35 spigoli dell'ettaedro $A_1 = 0$, $A_2 = 0, \ldots, A_7 = 0$, spigoli che

---

giunge subito alla conclusione: Nello spazio S_d si considerino le varietà F^n_{d-1} di dimensione $d-1$ e ordine n; allora: 1° se nd è pari ogni F^n_{d-1} che sia rappresentabile con la somma di $\frac{nd}{2}+1$ potenze n^{me} di forme lineari che eguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori ad una data C^d, è rappresentabile rispettivamente in $\infty^1, \infty^3, \ldots, \infty^{nd-1}$ modi con un'equazione il cui primo membro sia la somma di $\frac{nd}{2}+1, \frac{nd}{2}+2, \ldots, nd$ potenze n^{me} di forme lineari tali che eguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori a quella C^d, ed i gruppi di $\frac{nd}{2}+1, \ldots, nd$ iperpiani che così risultano formano rispettivamente involuzioni di rango $1, 3, \ldots, nd-1$; inoltre questa F^n_{d-1} è rappresentabile mediante la somma delle n^{me} potenze di un gruppo di qualsiansi forme lineari che eguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori alla C^d, quando questo gruppo si componga di più di nd forme; 2° se nd è dispari, ogni F^n_{d-1} che sia rappresentabile con la somma delle potenze n^{me} di $\frac{nd+1}{2}$ forme lineari che eguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori ad una C^d, è pure rappresentabile rispettivamente in $\infty^2, \infty^4, \ldots, \infty^{nd-1}$ modi con la somma delle n^{me} potenze di $\frac{nd+1}{2}+1, \frac{nd+1}{2}+2, \ldots, nd$ forme che eguagliate a zero rappresentino iperpiani osculatori alla C^d; ecc. Come si vede siamo nel caso contemplato dal teor. delle pag. 378-79 della *Apolarität und Rationale Curven* di F. Meyer.

(*) Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung*, " Crelle ", vol. 59; Lüroth, *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung*, " Math. Ann. ", I; Scherrer, *Ueber tern. biq. Formen*, " Ann. di mat. ", serie 2ª, vol. 10.

(**) Lüroth, l. c.

sono rette della superficie R, nella quale sono inscritti, allo stesso modo di quello, ∞^1 ettaedri le cui facce inviluppano una curva normale del quarto ordine, formando un'involuzione di grado 7 e rango 1, per cui mai due di quegli ettaedri hanno una faccia comune. I vertici di tutti questi ettaedri sono punti della γ nella quale dunque questi trovansi tutti inscritti (*). Fissata una faccia piana dell'ettaedro $A_1 = 0, \ldots, A_7 = 0$ (comune a due suoi iperpiani), o di uno qualsiasi degli ∞^1 sopra trovati, i rimanenti cinque iperpiani la segano in un pentalatero completo; dunque le rette di R trovansi distribuite 5 a 5 in ∞^1 piani; le 5 rette poste in uno di questi costituiscono la completa intersezione di esso con la H, la quale ammette quindi ∞^1 piani decatangenti coi punti di contatto vertici di un pentalatero completo. Uno degli iperpiani dei nostri ettaedri contiene 20 vertici (in conformità col fatto che la γ è di ordine 20), per un vertice passano 4 spigoli (in conformità col fatto che per ogni punto di γ passano quattro rette di R) e ogni spigolo contiene 4 vertici (in conformità col fatto che ogni retta di R è quadrisecante di γ).

Dopo queste considerazioni è facile vedere che soltanto gli ∞^1 ettaedri sopra trovati esistono analoghi ad $A_1 = 0, \ldots, A_7 = 0$, giacchè altrimenti per ogni punto generico di γ verrebbero a passare più di 4 quadriseganti della medesima; cosicchè risulta che ad ogni varietà cubica del tipo (3) riesce associata un'unica quartica normale, e che tutte le varietà di quel tipo che sono associate ad una data C^4 formano un sistema lineare di dimensione 12 (corrispondente all' S_{12} cui appartiene la C^{12} che su M rappresenta quella C^4). Di qui deriva ancora che per ogni punto generico di uno dei nostri ∞^{21} S_{12} non passano altri di siffatti S_{12} (altrimenti alla cubica del tipo (3) corrispondente a

---

(*) Tutto ciò discende dalle considerazioni precedenti insieme al fatto che la quadrica polare di un vertice dell'ettaedro $A_1 = 0, \ldots, A_7 = 0$ rispetto alla $a_1 A^3_1 + \ldots + a_7 A^3_7 = 0$ è un 1-cono avente per asse lo spigolo opposto. Difatti la quadrica polare di un punto x'_i ha per equazione $a_1 A'_1 A^2_1 + \ldots + a_7 A'_7 A^2_7 = 0$, indicando con A'_h il valore che prende A_h per $x_i = x'_i$. Prendendo per punto x'_i quello comune ad $A_1 = 0, \ldots, A_4 = 0$, la quadrica polare di esso ha per equazione $a_5 A'_5 A^2_5 + a_6 A'_6 A^2_6 + a_7 A'_7 A^2_7 = 0$, che rappresenta appunto un cono di seconda specie avente per asse la retta comune ad $A_5 = 0$, $A_6 = 0$, $A_7 = 0$.

quel punto riuscirebbero associate più quartiche), il che prova che gli ∞^{33} punti di tutti questi S_{12} formano una varietà K di dimensione 33.

3. — Si abbia ora un punto generico X della M, al quale corrisponderà dunque in S_4 una varietà $X_1^3 = 0$, essendo X_1 una forma lineare, ed un punto generico A della K, a cui corrisponde quindi una varietà l'equazione della quale può porsi sotto la forma $a_1 A_1^3 + \ldots + a_7 A_7^3 = 0$; ed alla retta XA corrisponde il fascio

$$a_1 A_1^3 + \ldots + a_7 A_7^3 + \lambda X_1^3 = 0 \tag{4}$$

essendo λ un parametro. Affinchè una varietà di questo fascio, diversa da quella che si ha per $\lambda = 0$, sia tale che la sua equazione possa ridursi sotto la forma $b_1 B_1^3 + \ldots + b_7 B_7^3 = 0$, bisogna che gli iperpiani $A_1 = 0, \ldots, A_7 = 0$, $X_1 = 0$ siano osculatori ad una medesima quartica normale, cioè che i punti corrispondenti ad $A_1^3 = 0, \ldots, A_7^3 = 0$, $X_1^3 = 0$ appartengano alla C^{12} che corrisponde a quella quartica, e che quindi il punto di S_{34} che rappresenta l'anzidetta varietà si trovi nell' S_{12} cui quella C^{12} appartiene; allora in questo S_{12} trovasi la retta XA. Dunque se la retta XA ha, oltre ad X, A, un altro punto sulla K, essa appartiene a questa. Ne segue che ogni retta generica uscente da un punto della M incontra la K ulteriormente in un solo punto.

Data ora una varietà cubica generica $U_1 = 0$, sia U il punto che le corrisponde in S_{34} e sulla M si fissi ad arbitrio un punto generico X; allora la retta XU incontra K in un solo punto A, cioè incontra in un punto A uno solo dei nostri S_{12} cui appartiene una determinata C^{12}. Se per A si conduce uno degli ∞^1 S_6 secanti di questa C^{12}, esso con X determina un S_7 passante per U, cosicchè la $U_1 = 0$ è rappresentabile con un'equazione del tipo

$$a_1 A_1^3 + \ldots + a_7 A_7^3 + m X_1^3 = 0 \tag{5}$$

essendo $A_1^3 = 0, \ldots, A_7^3 = 0$, $X_1^3 = 0$ le forme corrispondenti ai 7 punti d'incontro del detto S_6 con C^{12} ed al punto X. Dopo

ciò si può raccogliere immediatamente la conclusione: *Una cubica generica di* S_4 *è rappresentabile con un'equazione della forma* (5); *uno degli* 8 *iperpiani, p. e.* $X_1 = 0$ *dell'ottaedro di riferimento può esser preso ad arbitrio* (in modo generico), *dopo di che resta determinata la forma* X_1^3 *che deve entrare nell'equazione ed una quartica normale alla quale devono essere osculatori gli altri* 7 *iperpiani* (i quali possono esser fissati in ∞^1 maniere, cosicchè gli ∞^1 gruppi che in tal guisa si ottengono formano un'involuzione), *e fissato uno di questi, p. e.* $A_7 = 0$, *restano pure determinati gli altri sei* $A_6 = 0$, $A_5 = 0$, ..., $A_1 = 0$ *ed anche i coefficienti che devono avere nell'equazione* A_7^3, A_6^3, ..., A_1^3, *quando siasi fissato quello che vuolsi attribuire alla* X_1^3 (*).

Se poi non è fissato nessuno degli iperpiani $A_1 = 0$, ..., $A_7 = 0$, $X_1 = 0$, allora una data cubica generica può rappresentarsi in ∞^5 modi con un'equazione della forma (5). Ognuno degli ottaedri di riferimento è inscritto nella Hessiana per guisa che questa passa per i suoi vertici, poichè la quadrica polare di ognuno di questi è un cono di prima specie il cui punto doppio è il vertice dell'ottaedro opposto a quello considerato.

Finirò col notare che il metodo seguito in questa Nota, sull'argomento principale della quale attirò la mia attenzione il prof. Segre, fa sperare, data la speditezza con la quale conduce alle conclusioni ottenute, di poter raggiungere risultati di una qualche generalità sul numero di potenze n^{me} necessario e sufficiente per esprimere una forma generica di ordine n. Al conseguimento di questo scopo non mancherò di rivolgere qualche tentativo.

Torino, novembre 1902.

(*) Si noti l'analogia di questo risultato con quello cui arriva il Reye per la forma quaternaria biquadratica (*Darstellung quat. biq. Form*, ecc., " Crelle ", vol. 78). Di più si osservi che risultato affatto analogo vale per la forma ternaria biquadratica nel senso spiegato nel n° 2. A questo riguardo si confronti Scherrer, l. c.

L'Accademico Segretario
Enrico D'Ovidio.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 7 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ERMANNO FERRERO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Carle, Brusa, Chironi e Renier Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 23 novembre 1902.

Il Presidente è lieto di annunciare che il Vice-presidente Peyron può dirsi ristabilito in salute e che ha solo bisogno di tenersi riguardato in casa ancora per qualche giorno a motivo della stagione inclemente.

Il Socio Chironi chiede che dall'ufficio di Segreteria dell'Accademia sia richiesta al Ministero di Grazia e Giustizia la relazione sul progetto di legge riguardante il contratto di lavoro ed i contratti agrari. — Il Presidente accoglie la domanda.

Il Socio Brusa, informato che il Dr. Dionisio Anzilotti fece omaggio all'Accademia del libro: *I mutamenti nei rapporti patrimoniali fra coniugi nel diritto internazionale privato* (Firenze, tip. Bonducciana, 1900, pp. xii, 196), stima opportuno dirne le seguenti parole.

Anche in questa opera l'autore fa prova del suo acuto ingegno, della sua coltura giuridica e del rigore logico de' suoi ragionamenti. In sostanza egli si propose di sottoporre a una revisione critica i principii o criterii fondamentali della competenza legislativa, specialmente in tema di mutamenti nei rapporti patrimoniali fra coniugi, ponendo mente a che giammai

le idee e i criterii del diritto privato interno s'intromettano nel diritto internazionale privato, intromissione abituale ancora e nella dottrina e nella pratica, nelle quali genera confusioni e presupposti contrari a una giustificazione veramente giuridica della regola della immutabilità del regime patrimoniale legale nei cangiamenti che tengano dietro alla celebrazione del matrimonio, sia nella cittadinanza de' coniugi oppure nel loro domicilio.

Questa regola non può dunque trovar base nè nella teoria del contratto tacito, nè in quella che considera i rapporti patrimoniali legali fra coniugi, quale un effetto immediato e necessario della legge: le sono teorie prese a prestito dal diritto interno e inette alla giustificazione di una regola di diritto internazionale. Ben è vero che una parte notevole dei contemporanei giuristi italiani (e l'autore ne fa richiamo a loro onore) hanno utilmente preso questa seconda teoria, come punto di partenza per un criterio fondamentale di competenza legislativa vero e fecondo, qual è quello dell'unità organica e indissolubile della famiglia. Ma ciò non basta ai bisogni scientifici e pratici, ove non siano invocate in appoggio della tesi anche le ragioni storiche e teoretiche della formazione di codesto criterio, e sopratutto ove non siano impedite le indebite filtrazioni del diritto interno nel diritto internazionale.

Bandita la teoria contrattuale e quella della volontà imperativa della legge, e del pari messi in disparte i sistemi misti o intermedii, ripudiata tanto la pretesa di applicare la legge regolatrice della forma del contratto matrimoniale, quanto l'opinione che riduce la questione a un caso di capacità personale, l'autore passa a dimostrare l'efficacia esterritoriale delle leggi che permettono o vietano le modificazioni convenzionali dei rapporti patrimoniali fra coniugi, tenendo conto delle disposizioni del diritto italiano, e discorre poscia degli effetti del cambiamento di cittadinanza dei coniugi sulla mutabilità convenzionale di tali rapporti, e più specialmente del valore che va attribuito non alla sola teoria contrattuale posta a giustificazione della immutabilità del regime patrimoniale nonostante quei cambiamenti, ma altresì alle ragioni di ordine pratico addotte spesso in difetto di profonde indagini scientifiche.

Giunto per tal modo a conchiudere negativamente sui fondamenti giuridici razionali che alla regola dell'immutabilità ven-

nero e vengono dati dalle teorie della sottoposizione volontaria e della presunta volontà della legge, l'autore con sottile e sicura analisi dimostra che la regola stessa non ha valore scientifico di per sè, ma unicamente alla condizione di tradursi in quest'altra: " dovere la legge posteriormente acquistata dai coniugi rispettare i diritti acquisiti in conformità della legge, o delle leggi, a cui i coniugi stessi furono soggetti nel tempo anteriore, secondo i principii del diritto internazionale „ (p. 106).

Tale conclusione racchiude a un tempo quel concetto che è l'essenza vera della immutabilità e il limite giuridico entro cui questa va contenuta affinchè non degeneri in un rigido formalismo. Infatti fra i suoi effetti l'impero di una legge implica pur quello di attribuire agli individui taluni diritti il cui disconoscimento è poi vietato alla legge stessa, dal momento ch'essi si sono tradotti in realtà pratica; da quel momento per ragione di giustizia essi vengono considerati come irrevocabili di fronte ai subietti che ne furono investiti. Sono diritti che la legge dello Stato del quale i coniugi sono diventati cittadini, deve rispettare quali diritti ormai acquisiti, e ciò non solamente perchè altrimenti agendo violerebbe il diritto subiettivo dei privati, quanto piuttosto perchè ne verrebbe offesa a quello stesso diritto internazionale, il quale affermando la competenza della legge anteriore, impone altresì di riconoscere tutti gli effetti giuridici che legalmente ne derivarono. Ed è la legge dello Stato al quale i coniugi appartengono o in cui sono domiciliati al tempo in cui sorge la questione circa l'esistenza o meno del diritto acquisito, quella appunto che ne deciderà, senza che per questo abbia da escludersi la possibilità che in uno svolgimento ulteriore del diritto internazionale abbia questo stesso diritto a determinare direttamente quali debbano dirsi diritti acquisiti.

È una conclusione semplice che sembra intuitiva, tanto è chiaramente dedotta dalla natura e funzione del diritto internazionale. Pur nondimeno l'autore nel pervenirvi fu costretto ad allontanarsi ben di frequente da opinioni quasi universalmente accolte; ciò che spiega quella stessa apparenza d'incontentabilità ipercritica che taluni vollero scorgere ne' suoi ragionamenti rigorosi e serrati.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSI UNITE

Adunanza del 14 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ERMANNO FERRERO
DIRETTORE ANZIANO DI CLASSE

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Salvadori, Direttore della Classe, Berruti, D'Ovidio, Naccari, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e Grassi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Rossi, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Carle, Graf, Cipolla, Pizzi, Chironi e Renier Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 16 novembre 1902.

Il Vice Presidente Peyron si scusa di non poter intervenire per motivi di salute all'adunanza ed invia un saluto ai colleghi.

È comunicata la lettera di condoglianza che in nome dell'Accademia fu fatta pervenire alla famiglia del rimpianto Presidente Alfonso Cossa, e la lettera con cui la signora Gina Cossa Panizza, vedova del defunto, ringraziò l'Accademia. Sono pure comunicate altre condoglianze per la perdita del Presidente Cossa, pervenute dopo l'ultima adunanza plenaria.

Il Socio Graf legge la relazione della Commissione per il premio Gautieri di Letteratura (triennio 1899-1901). La relazione, che è inserita negli *Atti*, propone la divisione del premio

in due parti uguali, di cui l'una sia conferita a Francesco D'Ovidio per gli *Studii sulla Divina Commedia* e l'altra ad Antonio Belloni per il volume: *Il Seicento.*

Il rimpianto Presidente Cossa, giusta il R. Decreto 24 gennaio 1901, che lo nominava a quella carica, avrebbe terminato il triennio della sua Presidenza il 3 febbraio 1904. A norma dell'art. 13 dello Statuto, l'Accademia deve procedere alla elezione del nuovo Presidente, che giunga al compimento di detto periodo. Si procede alla votazione e riesce eletto, salvo l'approvazione Sovrana, il Socio prof. comm. Enrico D'Ovidio, Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Relazione della Commissione per il premio Gautieri di Letteratura (triennio 1999-1901).

Onorevoli Colleghi,

La Commissione chiamata a farvi proposte pel conferimento del premio Gautieri di letteratura, assegnato al triennio 1899-1901, avendo compiuto l'opera sua di esame e di giudizio, viene ora a darvene conto. Ma essa vuole sia mandata innanzi un'avvertenza, la quale dissipi, sin dal principio, se non tutti i dubbii che possono nascere in sì fatta materia, almeno taluno di essi. Generalmente parlando, e astraendo da ogni particolare considerazione di merito, la Commissione fu d'avviso che le opere aventi più risoluto e pieno carattere letterario dovessero essere anteposte a quelle nelle quali sì fatto carattere fosse reso vacillante e perplesso dalla commistione, oltre certa misura, con la materia più propriamente letteraria, di una materia, sia filosofica, sia di storia civile.

Ciò premesso, la Commissione dichiara che parecchie furono le opere ravvisate da essa come degne d'encomio, ma che l'attenzion sua ebbe a fermarsi più particolarmente su due, le quali sono:

1° *Studii sulla Divina Commedia,* di Francesco D'Ovidio, Palermo-Milano, Remo Sandron, 1901;

2° *Il Seicento,* di Antonio Belloni, Milano, Casa editrice Dottor Francesco Vallardi, s. a., ma 1899.

Il nome di Francesco d'Ovidio è così universalmente noto, in Italia e fuori, tra quanti sono cultori della filologia romanza, e della classica ancora, che qui non accade di doverne fare altro ricordo. Nel volume testè indicato, e di cui discorriamo, è raccolto il frutto degli studii intorno a Dante, iniziati dall'autore ora è un terzo di secolo, e da lui con perseverante amore maturati e non mai pretermessi. Porgere di tali studii una precisa e particolareggiata notizia; dire quali ragioni di assenso o di

dissenso essi, a volta a volta, suscitino nell'animo del lettore; fare, sia pure in iscarsa misura, una critica di tutta quella critica, non sarebbe, nella presente occasione, per nessun modo opportuno, nè possibile. Ciò che ora importa e deve farsi, è rilevare il carattere del libro, e il suo valore, e il beneficio che per esso è recato agli studii.

Innumerevoli sono, per così dire, le questioni di ermeneutica ed esegesi dantesca ventilate e discusse in quelle secento pagine; alcune da gran tempo vessate, altre quasi o del tutto nuove. Nessuno certo dirà che tutte vi sieno solute; nè il pretende l'autore, il quale anzi (possa giovare l'esempio!) è, con liberalissimo animo, sempre disposto ad esaminar l'obbiezione, a fornir le seconde prove a chi non s'appaghi delle prime, a rettificare il proprio asserto, e, dove occorra, a ricredersi; nè poi è da dissimulare che alcune, se non molte questioni dantesche, sono forse destinate a rimanere insolute in perpetuo. Quella che Giovanni Boccacci chiamò Minerva oscura non diverrà del tutto chiara giammai.

Ma checchè sia o abbia ad essere di ciò, gli è certo che Francesco D' Ovidio molte cose definisce e chiarisce, perch' ei s'addentra, oltrechè nella sostanza del poema, anche nell'animo del poeta; e non sarà nessuno che dopo aver letto e meditato il suo volume, non senta d'intendere e conoscere meglio così l'uno come l' altro. A intender Dante per davvero si richiede, non solo molta e ben fondata coltura, e senso vivo d'innumerevoli cose, ma ancora molta pieghevolezza e acuità d'ingegno, e un pensiero agile e vigilante, che sappia volgersi tutto intorno, e continuamente elevarsi dal fatto all'idea e ridiscendere da questa a quello, essendo il poeta, com' egli stesso ebbe a dire di sè, trasmutabile per tutte guise, ed essendo la ragion sua, nel poema e altrove, non solo meravigliosamente profonda, ma ancora singolarmente complicata.

Cotali doti e attitudini Francesco D'Ovidio possiede in alto grado. Egli speditamente si muove per tutti i meandri di quel duplice mondo, reale e fantastico, sensibile e soprassensibile, e per tutti i meandri ancora di quella vasta e multiforme coscienza. La critica ch'egli sperimenta è critica in massima parte congetturale; e se l'uso di tale critica è legittimo e approvabile ogni qual volta non sia possibile altra, bisogna poi riconoscere,

nel presente caso, che essa non può fare meglio di così, e che assai difficilmente anzi può riuscire a fare altrettanto. Il metodo che egli adopera è un metodo nel tempo stesso rigoroso e disinvolto, circospetto e intraprendente; agevole a lui; non agevole ad altri: e consiste, si può dire, nel far convergere sul punto controverso tutti i possibili elementi di conoscenza e di giudizio, e nel gittar quasi sul dubbio una viva rete di accertamenti, di congetture e di ragioni, dalla quale se il dubbio in ultimo sguizza fuori senza lasciarsi risolvere, ne sguizza, non perchè le maglie non siano abbastanza serrate, ma perchè esso il dubbio è di troppo sottile e fluida, per non dire volatile essenza. Il frutto, che di quella critica e di quel metodo si coglie, è, oltre al notato di sopra, di veder fatte molto probabili e accettevoli alcune opinioni, raddrizzati molti storti giudizii, dissipati molti preconcetti. Per giunta il libro di Francesco D'Ovidio è scritto con rara lucidità ed eleganza di pensiero e di parola; e gli va innanzi una prefazione la cui lettura dovrebbe essere raccomandata a quanti giovani, e anche non giovani, si affaticano negli studii. Ivi è, tra l'altre, questa salutare avvertenza, che senza equanimità, come non si fa nessun'altra cosa buona nel mondo, così non si fa neanche buona critica.

In tanta colluvie di scritti danteschi, dei quali troppi arruffano e intorbidano, anzichè giovare, lo studio del nostro massimo poeta, il volume di Francesco D'Ovidio dev'essere accolto con riconoscenza e con plauso, e additato con orgoglio agli stranieri, i quali gareggiando con noi anche in questo studio, ch'è nostro prima d'essere loro, tentano di vincerci, e qualche volta ci vincono.

Gli *Studii sulla Divina Commedia* sono l'opera di un insigne maestro; il *Seicento* è l'opera di un giovane erudito di molto valore, titolare di lettere italiane nel R. Liceo di Verona, libero docente di letteratura italiana nell'Istituto di studii superiori e di perfezionamento di Firenze, e fattosi conoscere assai favorevolmente sin da quando, nel 1893, pubblicò il suo primo lavoro, dal titolo *Gli Epigoni della Gerusalemme Liberata*.

Per lungo tempo usò in Italia, fra gli stessi storiografi della nostra letteratura, anzi più particolarmente fra di essi, di guardare al secolo XVII come a secolo di massima e quasi totale depravazione, nel quale pressochè nulla fosse di sano e di buono,

e troppo di deforme e di reo, e di cui convenisse, per l'onor nostro, parlare il meno possibile e solo con indignazione e disgusto. Lo stesso temperante e sensato Tiraboschi, sebbene giudicasse in proposito assai rettamente, pur costringeva, all'atto pratico, entro termini molto angusti il discorso di quel secolo; così che, mentre nella edizion milanese della monumentale sua *Storia* il discorso del secolo XVI occupa non meno di 2498 pagine, quello del secolo XVII ne occupa solamente 974. Dopo lui le cose, per questo rispetto, non fecero se non peggiorare. Si ripeterono, come se fossero passati in giudicato inappellabile, gli antichi giudizii; si rinnovarono, innasprendole ancora, le antiche accuse, e fu stimato superfluo ogni nuovo esame ed ogni nuova discussione. Onde, se il libro che Bernardo Morsolin compose intorno a quel secolo tanto disdegnato, e pubblicò nel 1880, riuscì così manchevole come sanno i cultori della nostra storia letteraria, non è da meravigliarsene troppo, nè se ne deve fare troppo gran carico a chi lo scrisse.

Da parecchi anni s'è preso anche in ciò migliore avviamento. Alla sdegnosa negligenza succedette una curiosità operosa. Si disprezzò un po' meno e si studiò assai più. Si moltiplicarono le indagini e le trattazioni particolari, si discusse e si disputò. Molte e diverse cose apparvero spiccatamente colà dove non se n'era veduta, troppo in confuso, se non una sola. Il lavoro, che richiede assai tempo e pazienza, è lunge dall' esser compiuto, ma continua e si fa più intenso. I frutti che esso aveva dati ora è un lustro, erano già tali da inanimare, chi avesse la preparazion necessaria, a comporre un nuovo libro di trattazione ordinata e generale. Antonio Belloni compose tale libro.

Intorno al quale non è ora da entrare in particolari. Basterà avvertire che esso è tutt'altro che una compilazione meccanica; che nei dodici nodriti capitoli in cui la copiosa materia è spartita e ordinata l'autore reca, non solo una conoscenza amplissima di quanto era già stato fatto da altri, ma ancora, frutto di lunghe, laboriose e ben condotte ricerche, una non meno ampia informazione propria e diretta, e una severità di metodo e una rettitudine di giudizio meritevoli di ogni lode. Certo il libro non è senza mende; e come potrebb'essere, se la elaborazione particolare e minuta che per fatto di molti deve precedere e preparare l'opera sintetica, è ancora così inadeguata al bisogno?

Facilmente si può notare in esso qualche omissione: facilmente ancora qualche sproporzione. È nelle singole parti miglior compagine che nel tutto. Quello che chiamiam secentismo vi è descritto, ma non definito. E il problema delle origini e delle cause di questo medesimo secentismo non si può dire che vi sia risoluto. Ma riman dubbio se del fatto, oltre ogni dire complesso, sia possibile una definizione; e se del tanto contrastato problema, psicologico, storico ed estetico insieme, sia possibile una soluzione.

Se di chi ha condotto a termine un libro si può dir con ragione ch'egli è il maestro di colui che lo cominciò, altrettanto, con più ragione ancora, può dirsi di chi faccia del proprio libro una seconda edizione. Antonio Belloni migliorerà di molto, quando gli avvenga di ristamparlo, il suo libro: sia perchè gli saran cresciuti tutto intorno gli ajuti; sia perchè, durando nello studio e nella meditazione, egli avrà fatta sempre più sua quella vasta e riluttante materia. Egli promise, è già più tempo, un saggio sulla psicologia del secentismo, e in certi suoi *Frammenti di critica letteraria,* pubblicati testè, è anche la prova ch'egli persevera in quello studio e in quella meditazione. Tale qual esso è, il libro di cui abbiamo discorso è, in argomento difficilissimo, un libro eccellente.

Onorevoli Colleghi,

La Commissione vi propone di onorare un maestro e di premiare e incoraggiare un valoroso. La Commissione vi propone di dividere il terzo premio Gautieri per la Letteratura in due parti eguali, e di conferire la prima a Francesco D'Ovidio per gli *Studii sulla Divina Commedia*, e di conferire la seconda ad Antonio Belloni per il *Seicento.*

B. Peyron,
R. Renier,
A. Graf, *relatore.*

Gli Accademici Segretari
Enrico D'Ovidio
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. CONTE TOMMASO SALVADORI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e D'Ovidio Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Si dà partecipazione del decesso del Socio corrispondente nella Sezione di Chimica Giovanni Wislicenus, il quale apparteneva all'Accademia dal 1900, e delle condoglianze inviate alla famiglia di lui.

È fatto omaggio dal Socio Spezia, a nome dell'autore Dr. Luigi Colomba, dell'opuscolo: *Sulla presenza della dispersione nei pirosseni giadeitoidi in rapporto colla loro composizione chimica.*

Con voto unanime viene accolta nei volumi accademici la Memoria del Socio Salvadori: *Contribuzioni alla ornitologia delle Isole del golfo di Guinea; uccelli dell'Isola del Principe.*

Ed alla inserzione negli *Atti* vengono ammesse le tre seguenti note:

Passaggi dei lembi della Luna, e determinazione dell'ascensione retta del cratere Mösting A., osservato al circolo meridiano

di Torino negli anni 1901 e 1902, di Vittorio Balbi e Luigi Volta, presentata dal Socio Jadanza (1);

Sul calore di dissociazione elettrolitica, del Dr. Adolfo Campetti, presentata dal Socio Naccari;

Sulla costituzione dei cosidetti dinitroidrocarburi primarî $R.CHN_2O_4$, del Dr. Giacomo Ponzio, presentata dal Socio Fileti.

In seduta privata si addiviene alla votazione per eleggere un membro della Giunta per la Biblioteca, avendo il Socio Segre compiuto il triennio in tale qualità; e riesce nominato il Socio prof. Icilio Guareschi.

---

(1) Questa Nota comparirà in un prossimo fascicolo.

LETTURE

Sul calore di dissociazione elettrolitica.

Nota del Dr ADOLFO CAMPETTI.

1. — È noto che la dissociazione elettrolitica in una soluzione è, in alcuni casi, accompagnata da sviluppo di calore; e poichè tale dissociazione è, in fondo, un fenomeno di scomposizione delle molecole in atomi (sebbene una speciale decomposizione), un tal fatto sembra senz' altro in contradizione col principio dell'equivalenza, dovendosi, ad eseguire una tale decomposizione, fornire una certa quantità di lavoro.

È mia intenzione di esaminare qui la questione in modo un po' più esatto di quel che di solito si faccia, partendo, in fondo, dalle idee del Nernst relative al legame tra la costante dielettrica di un solvente ed il suo potere dissociante: e più specialmente sarà mio scopo il ricercare come il lavoro corrispondente alla dissociazione di un dato elettrolito in un determinato solvente dipenda dal valore che assumono la costante dielettrica del solvente e dell'elettrolito disciolto stesso.

2. — Senza occuparci qui della nuova teoria degli elettroni, formulata in prima dal Drude, prenderemo il modello della dissociazione elettrolitica sotto la forma semplice e schematica data in origine dall'Arrhenius. Osserveremo anche che, secondo le idee di Helmholtz, le forze che agiscono tra i due atomi di una molecola, ad esempio di un elettrolito binario, devono ridursi, almeno come prima approssimazione, alla forza attrattiva che, secondo la legge di Coulomb, esercitano tra di loro i due ioni costituenti la molecola stessa e il cui valore è dato da:

$$\frac{m^2}{K'\epsilon}$$

se indichiamo con m la massa elettrica concentrata in ciascun ione, con ϵ la loro distanza (costante o media) e con K' il valore della costante dielettrica per la molecola stessa.

Sul valore di questa costante dielettrica niente possiamo dire per ora; sia che si ammetta per il valore della costante dielettrica del mezzo che separa i due atomi nella molecola un valore poco differente da quello del vuoto, sia che, come ha dedotto il Reiff (*) con considerazioni teoriche, partendo dalla teoria di Helmholtz sulla polarizzazione dei dielettrici, la costante dielettrica di una sostanza dipenda dal mezzo in cui si trova e possa quindi assumere, a seconda dei casi, valori molto diversi ed in certi casi anche assai elevati.

3. — Ad ogni modo, indicando con K la costante dielettrica dal mezzo nel quale la dissociazione ha luogo, supponiamo che una soluzione avente la concentrazione c_1 e contenente un grammo-molecola di elettrolito disciolto passi alla concentrazione $c_2 < c_1$, venga cioè diluita da c_1 a c_2.

Per questo fatto una parte delle molecole ancora indecomposte si dissocia, vale a dire passa da un mezzo di costante dielettrica K' ad un mezzo di costante dielettrica K_2 (essendo K_2 il valore della costante dielettrica della soluzione alla concentrazione c_2); in secondo luogo tutti gli ioni, che già prima erano presenti nella soluzione di concentrazione c_1, passano da un mezzo di costante dielettrica K_1 a un mezzo di costante dielettrica K_2, essendo generalmente (e sempre se si tratta di soluzioni diluite) $K_2 < K_1$.

È dunque prima di tutto importante per noi il saper calcolare il lavoro consumato o fornito, allorquando due ioni, l'uno positivo e l'altro negativo, carichi rispettivamente delle quantità di elettricità $+m$ e $-m$ e situati alla distanza ϵ, passano da un mezzo di costante dielettrica K_1 in un mezzo di costante dielettrica K_2.

Fra i varii modi con cui si può immaginare che questo passaggio si effettui, consideriamo un caso speciale e precisamente, se A e B (Fig. 1) sono i due ioni situati sul mezzo di costante dielettrica K_1 e a tal distanza dalla superficie di separazione dei due mezzi (PQ) che si possano (relativamente alla loro distanza ϵ) considerare come immersi in un mezzo indefinito di costante dielettrica K_1, supponiamo dapprima che essi ven-

(*) Reiff, " Wied. Annalen ", 1895.

gano allontanati in questo mezzo a tale distanza che sia trascurabile la loro mutua azione (per il calcolo da eseguire, a distanza infinita) e poi così separati vengano introdotti nel mezzo di costante dielettrica K_2, ove mantengono la loro distanza e quindi la loro azione mutua si considera come nulla.

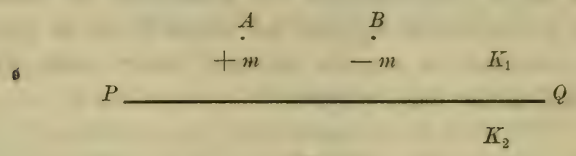


Fig. 1.

Per la prima operazione si deve fare dunque (approssimativamente) contro le forze elettriche il lavoro $\frac{m^2}{K_1{}^2}$, essendo ϵ l'originaria distanza degli ioni nella molecola; per la seconda operazione il lavoro consumato o fornito sarà il doppio del lavoro che corrisponde al passaggio di una particella carica della quantità di elettricità $+ m$ dal mezzo di costante K_1 a quello di costante K_2.

Per calcolare un tale lavoro, e nel modo più elementare e semplice, ricordiamo (Vedasi ad es.: Drude, *Physik des Aethers*, pag. 266) alcune proprietà del potenziale delle forze elettriche, allorquando il mezzo nel quale si trovano i punti elettrizzati non è continuo. In tal caso si sa che il potenziale si può calcolare come se il mezzo fosse continuo, con questo però che non esistessero soltanto le masse elettriche nei punti che supponiamo dati come carichi di elettricità, ma si avesse anche una distribuzione superficiale di elettricità sulle superficie limitanti i diversi mezzi. Ed in particolare (Vedi Drude, l. c.) la presenza di un dielettrico in un mezzo di costante dielettrica più bassa della sua, agisce come se la sua superficie fosse carica di elettricità negativa in quei punti in cui la forza elettrica è diretta verso l'interno del dielettrico stesso, e viceversa.

Una *carica apparente* di nome contrario si manifesta, se l'isolatore ha una costante dielettrica inferiore a quella del mezzo in cui si trova; e si sa che l'azione di queste cariche apparenti spiega analiticamente il modo di agire dei condensatori.

Per studiare la distribuzione di questa carica apparente, supponiamo di considerare dapprima un punto M a distanza finita δ da un piano indefinito AB, che rappresenti la superficie di separazione tra l'aria (o meglio il vuoto) e un mezzo indefinito conduttore e nel punto M sia concentrata la quantità di elettricità $+m$ (Fig. 2).

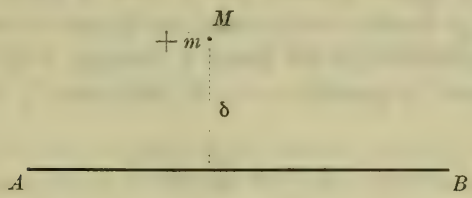


Fig. 2.

La distribuzione dell'elettricità in equilibrio indotta sul piano dal punto M è un problema comune di elettrostatica e può facilmente essere dedotta dalla distribuzione dell'elettricità indotta da un punto sopra una sfera (*). In quest'ultimo caso, se si indica con m_1 la carica data ad una sfera isolata di raggio A, sottoposta inoltre all'azione di un punto elettrizzato di massa elettrica $+m$, sulla superficie della sfera avrà luogo una distribuzione di elettricità, di cui la densità è data da:

$$\rho = \frac{1}{4\pi A}\left(\frac{m_1}{A} + \frac{m}{A_1}\right) - \frac{m}{4\pi A}\,(A_1^2 - A^2)\,.\,\frac{1}{R^3}$$

mentre se la sfera è in comunicazione col suolo

$$\rho = -\frac{m}{4\pi A}\,(A_1^2 - A^2)\,\frac{1}{R^3}$$

essendo A_1 la distanza del punto elettrizzato dal centro della sfera ed R la distanza di questo stesso punto da quel punto della superficie sferica per cui si calcola ρ.

Se indichiamo con δ la distanza del punto elettrizzato della superficie sferica, siccome allora $A_1 = A + \delta$ le due formule precedenti divengono

(*) F. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Potentials*, pag. 180.

$$\rho = \frac{1}{4\pi A}\left(\frac{m_1}{A} + \frac{m}{A+\delta}\right) - \frac{m}{4\pi A}(2A\delta + \delta^2)\frac{1}{R^3}$$

e

$$\rho = -\frac{m}{4\pi A}(2A\delta + \delta^2)\frac{1}{R^3}.$$

Ambedue queste formule per $A = \infty$ ci dànno il medesimo limite: cioè la densità della elettricità indotta sopra un piano conduttore indefinito da un punto a distanza δ da esso, in cui sia concentrata la quantità $+m$ di elettricità, è data da

$$\rho = -\frac{\delta m}{2\pi}\frac{1}{R^3}.$$

Perciò, se indichiamo con r la distanza di un punto Q del piano da P (Fig. 3) e con θ l'angolo che la retta PQ fa con

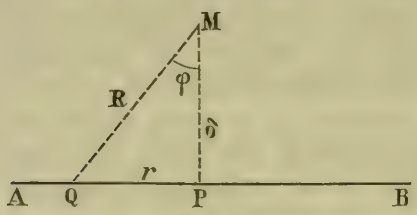


Fig. 3.

una posizione fissa della retta stessa, la quantità di elettricità che si trova sopra l'elemento $d\sigma$ di superficie che ha il suo centro in Q, sarà

$$\rho\, d\sigma = -\frac{m\delta}{2\pi}\frac{1}{R^3}\, r\, dr\, d\theta\,,$$

la forza che essa quantità eserciterà sul punto m

$$df = \frac{m^2\delta}{2\pi}\frac{1}{R^5}\, r\, dr\, d\theta$$

e la sua componente secondo MP normale al piano

$$dF = \frac{m^2\delta}{2\pi}\frac{1}{R^5}\, r\, dr\, d\theta$$

e supposto $\delta \gtrless 0$

$$R = \frac{\delta}{\cos\varphi} \qquad r = \delta \operatorname{tang} \varphi$$

per cui

$$dF = \frac{m^2}{2\pi\delta^2} \cos^3\varphi \,.\, \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

onde

$$F = \frac{m^2}{2\pi\delta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \frac{m^2}{4\delta^2}.$$

Si trova così (Vedasi anche Betti: *Teorica delle forze Newtoniane*, pag. 220) che l'azione del piano indefinito è la stessa di quella che si avrebbe, se nel punto fosse concentrata la massa $+\frac{m}{2}$ ed una massa uguale e di segno contrario fosse concentrata nel piede della perpendicolare condotta dal punto sul piano. Se supponiamo allora che il punto, partendo da distanza infinita, si porti a distanza ϵ dal piano, il lavoro fatto dalle forze elettriche sarà

$$L = \frac{m^2}{4\epsilon}.$$

Noi supponiamo ora (e qui sta l'arbitrarietà del nostro calcolo) che quando il piano AB in luogo di separare l'aria (o meglio il vuoto) da un conduttore indefinito, divide invece lo spazio occupato da un dielettrico di costante dielettrica K_1 dallo spazio occupato da un dielettrico di costante K_2, la densità elettrica superficiale di quella carica apparente di cui abbiamo parlato si possa dedurre da quella ρ ora trovata, moltiplicando ρ per una funzione molto semplice $f(K_1, K_2)$, delle due costanti dielettriche. Siccome per queste considerazioni si sa che un conduttore può riguardarsi come un dielettrico di costante dielettrica infinitamente grande, così questa funzione dovrà essere uguale ad 1 per $K_2 = \infty$, ed essere poi evidentemente nulla per $K_1 = K_2$. Noi prenderemo $f(K_1, K_2) = \frac{K_2 - K_1}{K_2}$ e in tale ipotesi il lavoro che sarà compiuto dalle forze elettriche, mentre un punto in cui sia concentrata la quantità $+m$ di elettricità (e lo stesso anche se la quantità di elettricità è $-m$) viene

portato da distanza infinita a distanza ϵ dal piano AB, sarà dato da

$$L = \frac{m^2}{4\epsilon} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_1 K_2} \tag{1}$$

Questa formula è applicabile, non solo ad un punto in cui sia concentrata la massa $+m$ di elettricità, ma anche ad una sferetta conduttrice, sin che il rapporto tra il raggio della sfera e la sua distanza dal piano è tale che se ne possano trascurare le potenze superiori alla terza. E del resto per $\epsilon = 0$ la (1) ci darebbe per L un valore infinito, mentre sappiamo che la forza e il lavoro devono restare finiti; noi possiamo però girare la difficoltà in questo modo. La carica superficiale sul piano AB non dobbiamo effettivamente pensarla distribuita in modo continuo, bensì sulle particelle (molecole od atomi) del mezzo cui il punto si avvicina; e potremo dire che il punto M è giunto nel mezzo di costante K_2, quando la sua distanza dalle particelle del mezzo stesso sia divenuta la minima possibile. Ora la minima distanza di due molecole assume valori differenti da sostanza a sostanza; per considerare un caso particolare potremo supporre di calcolare il lavoro dalla (1), prendendo, ad esempio, per ϵ il valore

$$\epsilon = 1{,}1 \times 10^{-9} \text{ centimetri}$$

che è quello assegnato da Rutherford (*) per la distanza delle cariche degli ioni in una molecola, senza escludere per altro che il valore di ϵ nella molecola del corpo che si dissocia possa essere differente da quello di ϵ esprimente le distanze tra gli ioni nel mezzo di costante K_2 e le molecole od ioni del mezzo stesso.

Indicando per ora quest'ultimo valore di ϵ con ϵ_1, se si moltiplica per 2 l'espressione (1) avremo il lavoro corrispondente al passaggio di un solo ione dal mezzo di costante K_1 a quello di costante K_2; e se moltiplichiamo ancora per 2, il lavoro corrispondente al passaggio dei due ioni, l'uno positivo, l'altro negativo, costituenti la molecola che si dissocia.

(*) Rutherford, " Proceeding of the R. S. of London ", 1900, T. LXVII.

Riassumendo dunque, allorquando una molecola, per la quale il valore della costante dielettrica nello spazio occupato dalla molecola stessa è K', si dissocia in un mezzo di costante dielettrica K secondo il processo da principio indicato, viene consumato il lavoro

$$(a) \qquad \frac{m^2}{K^1\epsilon}$$

corrispondente ad allontanare i due ioni a distanza infinita e viene invece fornito il lavoro

$$(b) \qquad \frac{m^2}{\epsilon_1}\,\frac{K-K'}{KK'} = \frac{m^2}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{K'} - \frac{1}{K}\right)$$

e sarà quindi infine consumato il lavoro

$$(c) \qquad m^2\left\{\frac{1}{\epsilon K'} - \frac{1}{\epsilon_1 K'} + \frac{1}{\epsilon_1 K}\right\}$$

il cui segno dipende dai valori di ϵ, ϵ_1, K, K'.

La quantità di calore q espressa in piccole calorie equivalente al lavoro (c) sarà quindi

$$q = \frac{m^2}{4{,}17 \,.\, 10^7}\left\{\frac{1}{\epsilon K'} - \frac{1}{\epsilon_1 K'} + \frac{1}{\epsilon_1 K}\right\}$$

e per conseguenza il calore Q corrispondente alla dissociazione di un grammo-molecola si otterrà moltiplicando per il numero N di molecole contenute in un grammo-molecola: onde

$$Q = \frac{N \,.\, m^2}{4{,}17 \,.\, 10^7}\left\{\frac{1}{\epsilon K'} - \frac{1}{\epsilon_1 K'} + \frac{1}{\epsilon_1 K}\right\}.$$

Occupiamoci intanto di calcolare il coefficiente numerico $\frac{Nm^2}{4{,}17 \,.\, 10^7}$ e per questo basiamoci sui dati seguenti. Un millimetro cubo di un gas a 0° e 760 contiene

$$5{,}4 \times 10^{16}$$

molecole e quindi un litro

$$5{,}4 \times 10^{22}$$

molecole; e poichè un grammo-molecola di gas occupa in quelle condizioni litri 22,4 sarà

$$N = 22{,}4 \times 5{,}4 \times 10^{22} = 12{,}1 \times 10^{23}.$$

D'altra parte in unità elettromagnetiche assolute

$$m = 8 \times 10^{-21}$$

e perciò in elettrostatiche

$$m = 8 \times 10^{-21} \times 3 \times 10^{10} = 24 \times 10^{-11}$$

e per conseguenza infine il valore di quel coefficiente sarà

$$\frac{\overline{24}^2 \times 10^{-22} \times 12{,}1 \times 10^{23}}{4{,}17 \times 10^{7}} = \frac{\overline{24}^2 \times 12{,}1}{4{,}17} \,.\, 10^{-6} = 167 \,.\, 10^{-5}$$

e quindi

$$(2) \qquad Q = 167 \times 10^{-6} \left\{ \frac{1}{\epsilon K'} - \frac{1}{\epsilon_1 K'} + \frac{1}{\epsilon K} \right\}$$

ci rappresenterà il lavoro che si deve impiegare per la dissociazione di un grammo-molecola, supposto che questa dissociazione avvenga in una quantità tanto grande di solvente che la sua costante dielettrica resti costante; nel caso particolare di $\epsilon = \epsilon_1$

$$(3) \qquad Q = 167 \times 10^{-6} \frac{1}{\epsilon K}.$$

4. — Prendiamo ora a considerare una soluzione contenente un grammo-molecola di sostanza disciolta e supponiamo che la sua concentrazione varii da c_1 a c_2 essendo $c_2 < c_1$.

Per tale diluizione avverrà un continuo aumento nel grado di dissociazione e precisamente, se mentre la concentrazione varierà di dc il grado di dissociazione varierà di $d\alpha$, il lavoro corrispondente espresso in piccole calorie sarà dato da

$$dq = Q \,.\, \frac{d\alpha}{dc} \,.\, dc$$

e se ammettiamo l'ipotesi corrispondente all'equazione (3)

$$dq = \frac{167 \times 10^{-6}}{\epsilon K} \frac{d\alpha}{dc} dc$$

essendo K la costante dielettrica del liquido nel quale la dissociazione ha luogo. Se si suppone che le concentrazioni c_1 e c_2 non siano troppo grandi e principalmente non troppo distanti, di guisa che si possa ritenere che in quell'intervallo α e K si possano rappresentare come funzioni lineari di c, sia cioè:

$$\alpha = 1 - \lambda c \qquad K = K_0 + bc$$

ove K_0 è la costante dielettrica del solvente puro, sarà

$$dq = -\frac{167 \cdot 10^{-6}}{\epsilon(K_0 + bc)} \lambda dc$$

onde integrando

$$q = \frac{167 \cdot 10^{-6}}{\epsilon b} \lambda \log \frac{K_0 + bc_1}{K_0 + bc_2}.$$

5. — D'altra parte conviene tener conto del fatto che, mentre la dissociazione cresce per il crescere della diluizione, la costante dielettrica della soluzione va diminuendo e tende ad accostarsi a quella del solvente puro; onde tutti gli ioni che già in un dato istante si trovano nella soluzione passano da un mezzo ad un altro di costante dielettrica minore. Se ammettiamo che sia applicabile anche a questo caso la formula prima trovata per il calore corrispondente ad un tale passaggio e cioè

$$C = \frac{167 \times 10^{-6}}{\epsilon K' K''} (K'' - K')$$

relativamente a un grammo-molecola e K' e K'' rappresentino le costanti dielettriche dei due mezzi, nel nostro caso, per una variazione dK di costante dialettrica, il calore corrispondente al lavoro impiegato sarà

$$dc = \frac{167 \times 10^{-6}}{\epsilon K^2} \alpha dK$$

e colle solite ipotesi sulle espressioni valevoli per α e K

$$dc = -\frac{167 \times 10^{-6}(1-\lambda c)bdc}{\epsilon(K_0+bc)^2}$$

e integrando fra c_1 e c_2

$$C = \frac{167 \times 10^{-6}}{\epsilon}\left\{\frac{b+K_0\lambda}{b(K_0+bc)} + \frac{\lambda}{b}\log(K_0+bc)\right\}_{c_1}^{c_2}.$$

Per conseguenza la quantità di calore consumato nella diluizione da c_1 a c_2 sarà data da

$$Q_1 = q + C = \frac{167 \times 10^{-6}}{\epsilon}\,\frac{(b+K_0\lambda)(c_1-c_2)}{(K_0+bc_1)(K_0+bc_2)}$$

e se per ϵ poniamo il valore $1{,}1 \times 10^{-9}$ e indichiamo con K_1 e K_2 i valori delle costanti dielettriche alle concentrazioni c_1 e c_2

$$(4) \qquad Q_1 = 1{,}52 \times 10^5\,\frac{(b+K_0\lambda)(c_1-c_2)}{K_1K_2}.$$

6. — Vediamo ora di trarre da ciò che precede alcune conseguenze. Intanto osserviamo che per il calcolo della (4) converrebbe conoscere come varia la costante dielettrica col variare della concentrazione, al qual riguardo non abbiamo per ora dati sufficienti.

Ad ogni modo (sempre nell'ipotesi di $\epsilon = \epsilon_1$, con cui sono state dedotte le (3) e (4)) alla dissociazione corrisponde sempre un consumo di lavoro e perciò si avrà nella soluzione un assorbimento di calore: con questo però che mentre il calore di dissociazione per un grammo-molecola, quando la dissociazione avvenisse in un mezzo di dielettricità costante e per esempio $= 1$, sarebbe dato da

$$Q = 1{,}52 \times 10^5 = 152000 \text{ piccole calorie,}$$

quando avviene invece in un mezzo di costante dielettrica elevata, per e.: l'acqua (per cui approssimativamente $K = 80$), si riduce a:

$$Q = \frac{1{,}52 \times 10^5}{80} = 1900 \text{ piccole calorie.}$$

L'esame delle formule (2) e (3) ci dice che Q è sempre positivo quando $\epsilon_1 = \epsilon$, vale a dire che nella dissociazione viene assorbito calore: ed è questo infatti il caso più comune: per es., per le soluzioni saline nell'acqua; Q potrà essere negativo, cioè la dissociazione sarà accompagnata da sviluppo di calore, solo quando sia ϵ_1 differente da ϵ e propriamente sia

$$\epsilon_1 < \epsilon \cdot \frac{K - K'}{K} .$$

Per conseguenza nei casi nei quali il procedere della dissociazione è accompagnato da sviluppo di calore, non si può anche dal nostro punto di vista, fare a meno di ammettere una azione particolare delle particelle (molecole od ioni) del solvente sugli ioni della sostanza disciolta, dando, per es., luogo a nuove molecole o ioni più complessi, come si ammette in alcuni casi.

7. — I risultati ottenuti sono stati dedotti con ipotesi molto particolari, scelte tali appunto per rendere il problema più semplice e naturalmente le formule ottenute sono legate al modo particolare col quale noi abbiamo supposto avvenire il passaggio di una molecola allo stato di dissociazione: per conseguenza non si può asserire che il nostro modo di rappresentazione ci dia il modello più conveniente o corrispondente del fenomeno che ha effettivamente luogo.

Tuttavia quello che mi sembra essere il punto fondamentale della discussione fatta sta nell'avere stabilito *esistere un legame tra il calore di dissociazione elettrolitica e i valori delle costanti dielettriche del solvente e della molecola che si dissocia e di avere introdotto, nel calcolo relativo al calore di dissociazione, la considerazione del lavoro corrispondente al passaggio del sistema dei due ioni costituenti la molecola da un mezzo ad un altro di diversa costante dielettrica.*

Torino, Istituto di Fisica dell'Università.
Dicembre 1902.

Sulla costituzione dei cosidetti dinitroidrocarburi primarî $R.CHN_2O_4$ (1).

Nota del Dott. GIACOMO PONZIO.

I risultati delle esperienze che formano oggetto della presente Nota dimostrano che per azione dell'acqua sui sali potassici dei cosidetti *dinitroidrocarburi primarî* $R.CHN_2O_4$ si formano ammoniaca, nitrito potassico ed il sale di potassio dell'acido R.COOH.

D'altra parte nei miei precedenti lavori avevo già dimo-

(1) R. Scholl (Journ. für Prakt. Chemie (2), *66*, 206 (1902)) trova infondati i dubbi che io avevo espresso nella mia nota *Sulla riduzione dei dinitroidrocarburi primarî* $RCHN_2O_4$ *con amalgama d'alluminio* (Gazzetta Chim. *32*, I, 461 (1902)) riguardo alla formola $R.CH\begin{smallmatrix}NO_2\\NO_2\end{smallmatrix}$ generalmente usata pei cosidetti dinitroidrocarburi primarî, dubbi che io avevo già manifestato da oltre un anno anche nel mio lavoro *Sul fenildinitrometano* (Gazzetta Chim. *31*, II, 133 (1901)).

Egli in sostanza dice che, siccome i dinitroidrocarburi *secondarî* contengono due gruppi NO_2, perchè risultano come prodotto di ossidazione dei pseudonitroli:

$$R_2.C\begin{smallmatrix}NO_2\\NO\end{smallmatrix} \xrightarrow{O} R_2.C\begin{smallmatrix}NO_2\\NO_2\end{smallmatrix},$$

così anche i dinitroidrocarburi *primarî* devono contenere due nitrogruppi. Questa conclusione è assolutamente infondata, perchè, quando anche si volesse ammettere (cosa che io non voglio qui discutere), che i dinitroidrocarburi *secondarî* contengano due gruppi NO_2, non ci sarebbe motivo per attribuire una analoga formola di struttura ai *primarî*, i quali non hanno alcun rapporto coi pseudonitroli. Inoltre la formazione di aldossime nella riduzione dei dinitroidrocarburi primarî si può spiegare con diverse formole di struttura, senza che sia necessario di ammettere la presenza di due nitrogruppi; ed infine, l'analogia di comportamento fra i dinitroidrocarburi secondarî e quelli primarî non è in realtà così completa da portare una conseguenza anche ad una analogia di struttura: basterebbe il fatto, che soltanto i secondi sono capaci di formare dei sali, per dimostrarne la diversa costituzione.

strato, mediante l'impiego di una soluzione titolata di cloruro stannoso (1), che nei cosidetti dinitroidrocarburi primarî (come anche nei loro sali) esiste un solo gruppo NO_2 e che per riduzione con amalgama di alluminio, in mezzo neutro (2), essi danno le monoamine $R.CH_2NH_2$ passando, come prodotto intermedio, per le aldossime $R.CH(NOH)$.

Inoltre dal fenildinitrometano $C_6H_5.CHN_2O_4$ avevo ottenuto benzaldeide per la semplice azione del calore ed acido benzoico per azione dell'acido solforico concentrato (loc. cit.).

Tutti questi fatti permettono di conchiudere che i cosidetti *dinitroidrocarburi primarî* contengono:

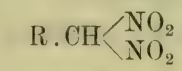
1° *un solo nitrogruppo*, dosabile con una soluzione titolata di cloruro stannoso,

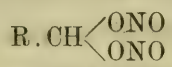
2° *un solo atomo di azoto legato direttamente al carbonio*, come appare dalla formazione delle amine primarie per riduzione,

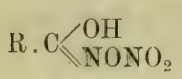
3° *un atomo di ossigeno unito direttamente al carbonio*, come appare dalla formazione di aldeidi per azione del calore o di acidi per azione degli acidi minerali,

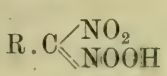
4° *un gruppo ossimico* $>NOH$, dal quale deriva l'ammoniaca che si forma nella reazione coll'acqua.

Le formole di costituzione finora proposte da ter Meer (3), Chancel (4), V. Meyer (5) e Nef (6) pei cosidetti dinitroidrocarburi primarî:


ter Meer


Chancel


V. Meyer


Nef

non si accordano troppo colle conclusioni alle quali mi hanno portato i risultati delle mie esperienze, le quali invece si spie-

(1) " Gazz. Chim. „ *31*, II, 133 (1901).
(2) " Gazz. Chim. „ *32*, I, 461 (1902).
(3) " Annalen „ *181*, 1 (1876).
(4) " Comptes Rendus „, *86*, 1407 (1878).
(5) " Lehrbuch „, I, 623 (1893).
(6) " Annalen „, *280*, 282 (1894).

gherebbero bene ammettendo che i cosidetti dinitroidrocarburi primarî siano *acidi nitroidrossamici*:

$$R.CH\begin{cases}ONO_2\\NOH.\end{cases}$$

Anche V. Meyer (loc. cit.) riteneva che i cosidetti dinitroidrocarburi primarî fossero derivati degli acidi idrossamici $R.CH\begin{cases}OH\\NOH\end{cases}$ ma era d'opinione che il gruppo NO_2 sostituisse l'idrogeno del gruppo ossimico, con formazione di eteri nitrici di acidi idrossamici, mentre a me sembra invece più probabile che il nitrogruppo si trovi al posto dell'idrogeno dell'ossidride alcoolico.

Dinitropropanpotassio $CH_3 . CH_2 . CKN_2O_4$. — Gr. 5 di sale purissimo si scaldano per un'ora a 105°-110° in tubo chiuso con 10 cc. di acqua distillata, per il che si origina nell'interno una discreta pressione. La soluzione limpida ottenuta si lava ripetutamente con etere (il quale asporta un po' di acido propionico ed una piccolissima quantità di una sostanza azotata, probabilmente propionaldossima), quindi si divide in due parti. Nell'una si constata la presenza dell'ammoniaca, distillando con idrato potassico, raccogliendo in acido cloridrico e trasformando il cloruro d'ammonio così ottenuto in cloroplatinato.

Gr. 0,1955 di sostanza fornirono gr. 0,0853 di platino.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per $PtCl_6(NH_4)_2$
Platino	43,63	43,89.

L'altra porzione si tira a secco a bagno maria ed il residuo si esaurisce con alcool assoluto, per il che rimane indisciolto del nitrito potassico che si trasforma in nitrito d'argento, il quale si analizza dopo cristallizzazione dall'acqua.

Gr. 0,2884 di sostanza riscaldata dentro un crogiolo di Rose in una corrente di cloro fornirono gr. 0,2678 di cloruro d'argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per $AgNO_2$
Argento	69,89	70,13.

Dall'alcool si ha del propionato potassico, il quale si trasforma in propionato d'argento che si analizza dopo cristallizzazione dall'acqua.

Gr. 0,3043 di sostanza fornirono gr. 0,1808 di argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per $C_3H_5O_2Ag$
Argento	59,41	59,66.

Da gr. 5 di dinitropropanpotassio si ebbero così gr. 0,1 di cloruro d'ammonio, gr. 0,5 di nitrito potassico e gr. 1,8 di propionato potassico.

Dinitrobutanpotassio $CN_3 . CH_2 . CH_2 . CKN_2O_4$. — Operando come nel caso precedente si ottiene ammoniaca, nitrito di potassio e butirato di potassio, che si trasformano rispettivamente in cloruro d'ammonio, nitrito d'argento e butirato d'argento i quali si analizzano dopo cristallizzazione dall'acqua.

I. Gr. 0,0882 di sostanza fornirono gr. 0,2327 di cloruro d'argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per NH_4Cl
Cloro	66,39	66,35.

II. Gr. 0,2234 di sostanza, scaldata dentro un crogiolo di Rose in una corrente di cloro, fornirono gr. 0,2080 di cloruro d'argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per $AgNO_2$
Argento	70,04	70,13.

III. Gr. 0,4074 di sostanza fornirono gr. 0,2257 di argento.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calc. per $C_4H_2O_7Ag$
Argento	55,40	55,38.

Nell'etere, col quale si lava il prodotto della reazione, si ritrova un po' di acido butirico ed una piccola quantità di un liquido azotato, bollente attorno a 150°, e che è probabilmente butiraldossima.

Da gr. 5 di dinitrobutanpotassio si ebbero gr. 0,2 di cloruro di ammonio, gr. 0,8 di nitrito potassico e gr. 1,7 di butirato potassico.

Dinitrononanpotassio $CH_3.(CH_2)_7.CKN_2O_4$. — Anche da questo sale si ottennero nitrito potassico ed ammoniaca che furono riconosciuti nel solito modo.

Torino, Istituto Chimico della R. Università,
dicembre 1902.

L'Accademico Segretario
ENRICO D'OVIDIO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Berruti, Naccari, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo e Morera;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Ferrero, Direttore della Classe, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Graf, Cipolla, Allievo, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario. — Il Socio Carle scusa l'assenza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza plenaria 14 dicembre 1902.

Il Vice-Presidente Peyron ringrazia l'Accademia per le premure addimostrategli durante la sua infermità, e mentre deplora l'immatura dipartita del rimpianto Presidente Cossa, manda un saluto affettuoso al nuovo Presidente D'Ovidio. — Il Socio Ferrero, interpretando i sentimenti dei colleghi, manifesta viva soddisfazione per la salute ricuperata dal Vice-Presidente Peyron ed augura che per molti anni ancora egli sia conservato all'Accademia di cui è decoro.

Il Presidente partecipa che a varie riprese il Socio Boselli ha fatto dono all'Accademia di 953 volumi e di circa 3700 opu-

scoli. Della singolare liberalità l'Accademia vuole sia ringraziato il Socio Boselli.

Si procede al conferimento del premio Gautieri per la letteratura (triennio 1899-1901). Giusta la proposta fatta nella relazione, l'Accademia, con votazione palese unanime, vota la divisione del premio in due parti uguali; quindi, a schede segrete, conferisce la prima parte del premio al prof. Francesco D'Ovidio per i suoi *Studi sulla Divina Commedia,* e la seconda parte al prof. Antonio Belloni per l'opera *Il Seicento.*

Gli Accademici Segretari
Enrico D'Ovidio.
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Graf, Cipolla, Allievo, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario. — Il Socio Carle scusa l'assenza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza 7 dicembre 1902.

Sono presentati alla Classe il Regolamento e le Istruzioni per il Congresso internazionale di Scienze storiche, che si terrà in Roma nel prossimo aprile, e nel quale l'Accademia ha già designato a suo rappresentante il Socio Boselli.

Con elogi il Socio Chironi fa omaggio all'Accademia delle seguenti pubblicazioni del prof. Luigi Einaudi: 1° *Un principe mercante* (Torino, Bocca, 1900); 2° *La rendita mineraria* (Torino, Unione tip.-editrice, 1900); 3° *Questioni intorno all'imposta sulle aree edilizie* (Torino, Bocca, 1902); 4° *Studi sugli effetti delle imposte* (Torino, Bocca, 1902); 5° *Salvatore Cognetti de Martiis: la vita e le opere* (Bologna, 1901). — Il medesimo Socio Chironi presenta la pubblicazione del Prof. Pasquale Jannacone, *Sullo sciopero nei servizi pubblici* (Torino, tip. Camilla e Bertolero, 1902) e ne loda il contenuto, riservandosi di tornarvi sopra in seguito per discutere l'importante quesito giuridico ivi svolto.

Il Socio Pizzi dona un opuscolo stampato a Buenos Aires (senz'anno), *Pequeño diccionario dell'idioma Fueguino-Ona con su correspondiente Castellano.* Autore ne è un anonimo Missionario Salesiano alla Terra del Fuoco.

Il Socio Savio espone il contenuto d'una nota su *L'origine della Diocesi di Tortona,* che è inserita negli *Atti.*

In seduta privata l'Accademia, in conformità dell'art. 3° del Regolamento interno pel conferimento dei premii di fondazione Vallauri, procede alla nomina della Commissione giudicatrice del premio Vallauri relativo alle opere di critica della letteratura latina. Oltre al Presidente dell'Accademia, che è membro nato, la Commissione risulta composta dei Soci Peyron, Pezzi, Ferrero e Carle.

LETTURE

Le origini della diocesi di Tortona.

Nota del Socio FEDELE SAVIO.

I.

Nell'anno 1896 pubblicai negli *Analecta Bollandiana* (tomo XV) la leggenda latina primitiva dei Ss. Faustino e Giovita ch'ero riuscito di ritrovare a Brescia in una copia recente, ma che da varii argomenti dedussi provenire da un codice molto antico (1). Era la prima volta che la detta leggenda compariva intera alla luce nella sua lingua originale; poichè prima non ne esisteva a stampa che una traduzione italiana, composta nel secolo XV (2), stampata alla fine di quel secolo e divenuta rarissima. Se ne conoscevano inoltre degli estratti o compendii, ch'erano stati

(1) Il Brunati, *Vita o Geste di Santi bresciani*, Brescia, Venturini, 1854, vol. 1°, pag. 184, attesta l'esistenza della leggenda primitiva in un *Passionario* pergamenaceo, che dal march. Scipione Maffei era stato giudicato del secolo XIII. Ma nè egli dice dove stesse, nè a me fu possibile rintracciarlo. Fu visto però e copiato in Brescia dall'abate D. Tomaso Borgondio, e forse la copia, dond' io trassi la mia edizione, è la copia del Borgondio. Finora il codice più antico noto, in cui si trovi la detta leggenda primitiva, è il codice G. 5. 1212, *Conventi soppressi*, della biblioteca nazionale di Firenze, gentilmente indicatomi dal R. P. Ippolito Delehaye bollandista. È un leggendario appartenuto al convento di Camaldoli, e scritto, come mi pare, nel secolo XIV alla fine, o nel secolo XV in principio. La Passione dei Ss. Faustino e Giovita vi si legge da pag. 180 *r* a pag. 188 *r*. Avendolo diligentemente confrontato coll'edizione da me pubblicata, non vi trovai varianti meritevoli di nota, se non questo, che qua e là sono omessi o abbreviati gl'interminabili discorsi dei varii protagonisti. La sepoltura di S. Marziano vi è pure notata *VI kall. aprilium.*

(2) Da un anonimo francescano, dice il Brunati, opera citata, pag. 184, il quale aggiunge d'aver visto una copia a stampa di questo libro col titolo: *Leggenda ovvero Passione de li sancti Martiri sancto Faustino et sancto Jovita*, Brescia per *Pre Baptista da Farfengo de l'anno 1490.* Altre edizioni, leggermente cambiate nella lingua, se ne fecero in Brescia nel 1534 e 1588.

stralciati dalla leggenda primitiva con lo scopo di formarne delle leggende particolari di alcuni dei Ss. in essa menzionati, quali i Ss. Faustino e Giovita, S. Calocero e i Ss. Secondo e Marziano. Insieme con la leggenda pubblicai pure uno studio critico della medesima.

Ciò che mi spinse alla ricerca della leggenda primitiva ed al suo esame critico fu l'assunto, che m'ero addossato, di studiare le origini delle diocesi piemontesi. Poichè, mentre in tutte le altre diocesi non trovavo nulla che contradicesse alle conclusioni ammesse fin da un secolo e mezzo fa dal Maffei, dai Bollandisti, dal Zaccaria e da altri eruditi, i quali, eccetto per Milano, Aquileia e qualche altra città, non ammisero origini di sedi vescovili nell'Italia superiore prima del secolo IV, mi si presentava a Tortona una tradizione, che diceva S. Marziano protovescovo martire di quella città esser vissuto al tempo di Adriano imperatore, ossia nel secolo II. Era per me indispensabile di ricercare se questa tradizione fosse legittima ed avesse tali caratteri di verità da doverla ammettere, a costo anche di rovesciare il principio, già stabilito come certo dal Maffei (1), dal Zaccaria, e da altri.

---

(1) Se, dietro agli antichi Bollandisti, diedi tanta importanza alle asserzioni del Maffei, non fu solo per l'autorità d'un tanto scrittore, chiamato dal De Rossi, *il maggior polistore d'Italia nel secolo XVIII* (" Bullettino di Archeol. crist. ", del 1876, pag. 137), ma sì ancora perchè la convinzione, che il Maffei s'era formata in seguito alle proprie indagini, fu quella altresì a cui giunsero molti altri eruditi, studiando la storia di varie chiese particolari. Poichè è da sapersi che nel corso del secolo XVIII e sui principii del XIX fiorirono tra noi eccellenti eruditi, che con animo sincero e spassionato attesero a scrivere la storia delle loro città, e in particolare le origini delle diocesi. Costoro non temettero di proclamare altamente ciò che apprendevano dai genuini documenti, essere cioè insussistenti certe opinioni, radicatesi da secoli tra i loro concittadini, e credute da essi in buona fede, solo perchè non se n'era mai fatto un serio esame, le quali facevano rimontare le loro sedi vescovili ai tempi apostolici od agli stessi Apostoli. In ciò oltre al dar prova di essere storici veritieri e leali, diedero prova altresì di schietto amor patrio, impedendo che i loro concittadini continuassero a vantarsi di glorie non mai esistite, con pericolo d'essere a giusta ragione derisi dagli stranieri, e tenuti siccome ignoranti millantatori. Così, tra gli altri, fecero due dotti vercellesi, il p. Trivero domenicano e l'abate Frova, insorgendo contro il can. Fileppi, il quale avrebbe voluto considerare S. Eusebio non già come il 1°, ma come il 5° vescovo di Vercelli. Così fece per parecchi

Dopo parecchi studi e ricerche, mi persuasi:

1° Che la tradizione tortonese era provenuta dalla leggenda primitiva da me trovata e pubblicata;

2° Che alla leggenda primitiva, siccome scritta da persona ignorante, niente sollecita del vero, sollecita solo di racconti meravigliosi, e vissuta parecchi secoli dopo gli avvenimenti, non si poteva dare alcun valore storico, tanti sono gli anacronismi, le favole, le sconvenienze che la deturpano (1). Quindi non poteva credersi sulla sola sua autorità ad un fatto tanto contrario ad altri fatti, oramai messi in sodo dagli eruditi, quale sarebbe che al tempo di Adriano si trovasse già nell'Italia superiore un numero così grande di Cristiani, da meritare che, non solo a Milano, ma anche a Brescia ed a Tortona si stabilissero dei vescovati, e che quell'imperatore, di cui non è neppur certo che perseguitasse i Cristiani, ne facesse uccidere tanti nelle suddette province. Onde, anche dato, e non concesso, che S. Marziano fosse primo vescovo di Tortona, non si potrebbe ammettere ch'egli vivesse al tempo di Adriano;

3° Eziandio riguardo alla dignità vescovile di S. Marziano in Tortona trovai molti e assai gravi argomenti, che mi spinsero al dubbio ed alla negazione. Ne enumero qui i principali:

a) La lettera che S. Eusebio vescovo di Vercelli scrisse nel 356 dall'esiglio di Scitopoli ai suoi diocesani, tra i quali nomina i Tortonesi. Se nel 356 Tortona non aveva ancora un proprio vescovo, meno si può concedere che l'avesse al tempo di Adriano, mentre è certo che non l'avevano nè Vercelli, nè altre diocesi dell'Italia superiore, non esclusa forse la stessa Milano;

---

vescovi di Padova il padovano Dondi Orologio, prima canonico, poi vescovo della sua patria; così per Pavia i pavesi p. Capsoni domenicano e il Robolini; il can. Lupi bergamasco per Bergamo, Gerolamo Tartarotti di Rovereto per Trento, il conte Giulini milanese per Milano e lo stesso marchese Maffei veronese per Verona. Per incidenza poi noto, che costoro e parecchi altri, sì ecclesiastici che laici, furono tutti eccellenti cattolici, ed esperti eziandio nelle scienze sacre, come appunto il Maffei, che sebbene laico, scrisse opere teologiche di molto valore.

(1) Tali sono i lunghi discorsi in favore della religione, che si mettono in bocca a tigri ed onagri, le conversioni per le prediche dei Ss. Faustino e Giovita d'uno sterminato numero di pagani, per es. di 42.000 a Lubras, 22.000 al Ponte Molle, 73.000 a Roma, 53.000 a Napoli, l'incendio a Roma in uno stesso tempo di tutti i templi idolatrici ed altri.

b) Il fatto che la leggenda, sebbene avesse lo scopo di esaltare S. Marziano, pure tace della sua qualità di vescovo, e di primo vescovo di Tortona;

c) L'affermazione di uno storico ravennate del secolo X sull'identità di S. Marziano sepolto in Tortona con S. Marziano quarto vescovo di Ravenna. Quest'identità fu ammessa da storici posteriori, tra cui dal ravennate Gerolamo Rossi, scrittore per i suoi tempi diligentissimo. Ecco le parole dello storico anonimo del secolo X: *Martianus vero post pontificalem infulam ecclesiae Ravennatis Terdonae martyrio coronatus est.*

A conferma di quest'identità faccio qui ora un' osservazione non fatta prima. Essa riguarda l'identità del nome che tanto a Ravenna come a Tortona sempre si scrisse in latino *Martianus* ed in italiano *Marziano.* Per il nome latino vedasi Agnello (1) ed altri scrittori antichi ravennati, editi dal Muratori, nei *Rerum Italicarum Scriptores,* vol. I, parte 1ª, e vol. II, parte 2ª. Per il nome italiano basti citare il Fabri, *Sagre Memorie di Ravenna,* pag. 402 e altrove;

d) Il fatto che mentre i Tortonesi nei più antichi secoli veneravano con grandi significazioni di onore S. Innocenzo loro vescovo, e, com'io credo, loro primo vescovo, conservandone in luogo distinto il corpo nella cattedrale, lasciarono il corpo di S. Marziano in una chiesa campestre (2), finchè i monaci addetti

---

(1) Nell'edizione di Agnello in *M. G. Hist. Script. Rerum Langob.* si legge *Marcianus*; ma altri codici antichi portano esattamente *Martianus.*

(2) La chiesa e il monastero stavano nella regione detta *il Ronco*, alla distanza di un chilometro e mezzo dalla città. Si veda Lugano, *Origine e vita storica dell'Abbazia di S. Marziano di Tortona,* Firenze, Pellas, 1902, pag. 55, 56. In un mss. intitolato: *Cenni storici risguardanti li vescovi di Tortona da S. Marziano sino a Carlo Settala*, 1653, scritti nel 1671 dal p. Tinti barnabita (nella biblioteca nazionale di Torino, Bc. 53, 1, *Vescovi*), indicatomi cortesemente dal cav. Benedetto Vesme, si legge: " Nel sito ove " era stato decapitato S. Martiano fu dal medesimo Santo (Innocenzo) edi- " ficata una chiesa del suo titolo, che per lungo tempo fu abbatia nobile " dei PP. Benedittini, dove fu collocato il suo corpo; ma dopo per la revo- " lutione de' tempi, e per le guerre fu destrutta assieme al Monastero " del 1333, restandone le vestigia, che si veggono sino al dì d'hoggi, e " trasferito il titolo in un'altra chiesa dentro della città all'istessa dicitura, " data (*poi*) da Pio V con tutte le ragioni dell'antico Monastero ai PP. di " S. Domenico, che oggi l'offitiano, et ivi ogni anno nel giorno della sua

a questa stessa chiesa e abitanti nel contiguo monastero nol trasportarono dentro la città nel secolo XIV.

Del medesimo S. Innocenzo si celebravano a Tortona tre feste, e sempre con rito doppio, quella dell'ordinazione (24 settembre), quella della morte (17 aprile) e ai 22 maggio la traslazione delle sue reliquie (1), mentre S. Marziano veneravasi soltanto il 27 marzo (2);

e) Il fatto che S. Marziano fu posto tra i patroni o titolari della cattedrale solo nella seconda metà dell'anno 945 o nella prima metà dell'anno 946, come consta dal confronto di due atti del vescovo tortonese Giseprando, il medesimo che accanto alla chiesa campestre dedicata ai Ss. Pietro e Marziano fece costruire, o come a me sembra, ricostruire un monastero. Mentre il 5 giugno del 945 Giseprando considerava come patroni della sua chiesa solo i Ss. Lorenzo e Innocenzo, in un altro atto, che è forse dei primi mesi del 946, vi aggiunge anche S. Marziano.

Posti questi fatti (e qui si tratta di fatti e non di sole congetture), cercai di spiegare in qual modo, nonostante che la diocesi di Tortona sia posteriore al 356, che S. Marziano dalla

---

" festa va processionalmente il vescovo con tutto il suo clero, portando le " sue reliquie con molta divotione. Qual processione crediamo che fosse " istituita anticamente e si praticasse nella chiesa monastica fuori delle " mura, e sia restata hoggi per degna consuetudine consecrata nella nuova. " Il corpo di S. Marziano traslatato prima nella chiesa episcopale, che già " fu sopra il monte, e fu prima ristretta per la fabbrica del castello, e poi " diroccata quasi ai giorni nostri dal fulmine, e d'indi trasportata nella " nuova cathedrale edificata in Porta S. Quirino in capo della Piazza della " Città, dove hoggi riposa in luogo decente e è honorato e venerato dai " cittadini ".

(1) Così dice il Tinti sotto *S. Innocenzo* nell'opera testè citata; indi soggiunge: *Adesso però si fa una festa sola per decreto della S. Congregazione.*

(2) La festa per decreto del vescovo tortonese Cosimo Dossena (1612-1628) venne trasferita dal 27 al 6 marzo; ma è falso quanto scrisse un biografo di quel vescovo: *Dilatum in aliam sine causa diem D. Martiani, civitatis patroni, festum proprio tempori restituit;* Ledesma, *Cosmas Dossenius*, Tortona, Viola, 1659, pag. 77. Il giorno anniversario del martirio fu sempre considerato il 27 marzo, come vedesi dagli Atti di S. Marziano che si trovano nel codice bobbiese F. 11. 10 della biblioteca nazionale di Torino, scritto nel secolo X. Ivi dopo le parole: *Secundus..... rapuit corpus eius et cum omni studio sepelivit eum*, leggesi: *VI kalendas aprilis*, cioè il 27 marzo.

stessa sua antica leggenda non sia detto vescovo, e da uno scrittore antico sia detto vescovo di Ravenna, pure si radicasse tra i Tortonesi la credenza che S. Marziano, di cui essi possedevano il corpo, fosse primo vescovo della loro città e martire al tempo di Adriano.

La spiegazione migliore mi parve la seguente:

Ammisi quanto alla sostanza l'asserzione dell'anonimo ravennate del secolo X sull' identità di S. Marziano di Tortona con S. Marziano quarto vescovo di Ravenna. Non però ammisi che S. Marziano venisse a Tortona vivente, perchè questa mi parve una congettura arbitraria dell'anonimo per spiegarsi come, mentre tutti gli altri vescovi Santi di Ravenna furono seppelliti in quella città, S. Marziano fosse sepolto in Tortona. Questo fatto a me parve di spiegarlo meglio dicendo che S. Marziano fu portato a Tortona morto, e qualche secolo dopo la sua morte, cioè nel secolo VIII.

Questa, è bensì una semplice congettura, ma non punto irragionevole e temeraria, anzi pienamente conforme a tutte le circostanze storiche di quel tempo.

È noto che gli ultimi re longobardi si mostrarono grandemente solleciti di possedere dei corpi di Santi. In tale impegno superò forse ogni altro il re Astolfo, il quale venuto nel 755 ad assediar Roma, spogliò interamente le catacombe, tanto che, a detta del De Rossi (1), da quel tempo le catacombe cessarono d'essere la meta di pietosi pellegrinaggi, ed a poco a poco caddero in dimenticanza, dalla quale le tolse poi lo stesso De Rossi nel passato secolo XIX.

Lo stesso impegno di rapire corpi santi aveva dimostrato Astolfo, allorchè due anni prima era entrato in possesso di Ravenna, e consta in particolare che ne portò via il corpo del vescovo S. Eleocadio, che stava in una chiesa a lui dedicata. Ora, come da buoni indizii si può ritenere che nella stessa chiesa di S. Eleocadio stesse anche il corpo di S. Marziano, nulla di più verosimile che Astolfo portasse via eziandio il corpo di S. Marziano. Di poi, egli ritenendo presso di sè a Pavia il corpo di S. Eleocadio (che in seguito rimase sempre in questa

(1) *Roma sotterranea cristiana*, vol. I, pag. 220; II, pag. 123; " Bullettino d'Archeol. cristiana ", *passim*.

città), avrebbe dato il corpo di S. Marziano ad una comunità religiosa, che viveva presso Tortona, ed il corpo di S. Calocero successore di S. Marziano nella sede vescovile di Ravenna ad un' altra comunità monastica di Albenga (1). Così certamente egli fece riguardo al corpo di S. Silvestro papa, che portò via da Roma e poi diede all'abazia di Nonantola fondata da lui.

Poco tempo dopo le suddette traslazioni fu composta la leggenda primitiva, nella quale si narrano le geste, evidentemente favolose, di un gruppo di Santi, Faustino, Giovita, Apollonio ed Afra di Brescia, Marziano di Tortona, Secondo d'Asti, Calocero d'Albenga, Calimero di Milano. Dall'esame della leggenda si scorge indubitato l'intento del leggendista di attribuire ai suddetti Santi ancora viventi delle relazioni, che essi non ebbero, con i luoghi dove stavano i loro corpi, cioè Brescia, Milano, Tortona, Asti ed Albenga, e di più relazioni vicendevoli tra loro e relazioni di tutti con Milano. Interessato com'era il leggendista a far credere che S. Marziano, il cui corpo veneravasi a Tortona, fosse un Santo vissuto in questa città, doveva necessariamente tacere la sua provenienza da Ravenna e quindi anche la sua qualità di vescovo. Tuttavia quest'ultima qualità non si poteva ignorare dal popolo, per cagione specialmente del culto, che già rendevasi pubblicamente in Tortona al Santo, come a vescovo e martire, prima ancora che venisse composta la leggenda. Onde ne accadde, che mentre a Tortona continuossi a venerare S. Marziano qual vescovo e martire fin dal primo giorno che vi fu trasferito il suo corpo da Pavia o da Ravenna, col diffondersi della leggenda si aggiunse ch'egli era stato vescovo e martire al tempo di Adriano. Nello stesso tempo perdutasi per mezzo della leggenda ogni traccia della sua provenienza da Ravenna, divenne sempre più facile il crederlo vescovo della stessa città, in cui giaceva il suo corpo, cioè Tortona. Infine, non essendovi memoria di vescovi tortonesi più antichi, lo si disse primo vescovo di Tortona.

Così e non altrimenti mi parve di conciliare tra loro i fatti, che ho ricordati qui sul principio.

In particolare per ciò che riguarda l'esito delle mie ricerche

---

(1) Si veda quanto ne ho detto nel mio studio sulla *Légende de S. Faustin et Jovite* in *Anal. Boll.*, XV, pag. 63.

in raffronto alle tradizioni antiche ed ai Tortonesi, fui lieto che mentre prima delle mie ricerche non avevasi intorno a S. Marziano, che la sua leggenda, la quale porgeva occasione ai critici più rigorosi di dubitare non solo dell'autenticità del suo corpo, ma anche della sua stessa esistenza, le testimonianze nuove da me trovate posero questi due punti sostanziali quasi interamente al sicuro. Tra siffatte testimonianze metto in prima fila il passo, già citato qui sopra, dell'anonimo ravennate del secolo X, poichè avendo il Muratori per svista letto *tandem* in luogo di *terdone*, nessuno se n'era mai potuto valere in riguardo al nostro S. Marziano.

Tuttavia, com'era da prevedersi, le mie conclusioni non piacquero a tutti i Tortonesi, e vi fu, non è molto, tra loro chi prese ad impugnarle, del resto con molta cortesia e moderazione (1). Non intendo ora di esaminare le ragioni addotte dal mio oppositore, tanto più che, neppure nella sua intenzione, esse non hanno un carattere strettamente scientifico. Ma credo possa tornare utile agli studiosi per la soluzione della presente controversia e di altre ad essa affini, presentare qui il risultato d'una scoperta, che feci allorchè l'opuscolo che ho ricordato mi costrinse a ritornare per breve tempo sul punto storico di cui ragiono. Ho scoperto cioè una falsificazione d'un testo di S. Eusebio vescovo di Vercelli, la quale secondo tutte le apparenze deve aggiungersi a quelle tante, che già si conoscono del celebre falsario piemontese, il Meyranesio.

II.

Come dissi, uno tra gli argomenti onde presi a dubitare, che S. Marziano non fosse stato primo vescovo di Tortona al tempo di Adriano, fu la menzione dei Tortonesi, che trovasi nella lettera scritta da S. Eusebio di Vercelli ai suoi diocesani nel 356. Aggiungo ora che questo argomento lo ritengo tra i più validi, essendo per me della massima evidenza che S. Eusebio non avrebbe scritto a fedeli d'un'altra diocesi, senza ricordare il loro

(1) P. Michele da Carbonara, *S. Marziano martire primo vescovo di Tortona, tradizione tortonese*, Tortona, Rossi, 1902, un opuscolo in-8° gr. di pagg. 31.

vescovo, qualunque ei si fosse, o cattolico, o ariano, o presente o lontano dalla sua diocesi, o anche testè defunto, e ciò per il principio rigorosamente e costantemente osservato nella disciplina ecclesiastica, che niun vescovo s'ingerisca in una diocesi non sua senza darne ragione. Quindi dal modo con cui S. Eusebio nomina i Tortonesi tra gli altri suoi diocesani, tacendo d'un loro vescovo, giustamente dedussi che Tortona nel 356 non era ancora sede vescovile, nè perciò potevasi credere all'episcopato di S. Marziano nel secolo II.

Contro quest' argomento, così decisivo, si oppose che nella lettera di S. Eusebio non deve leggersi la parola *Dertonensibus*, gli abitanti di Tortona, ma *Testonensibus*, abitanti cioè del piccolo villaggio di Testona, presso Moncalieri. Di qui per me la necessità di verificare siffatta lezione.

Dirò subito (come già osservai altrove (1)), che il primo ad introdurre la lezione *Testonensibus* in luogo di *Dertonensibus* fu mons. Agostino Della Chiesa nella *Descrizione del Piemonte,* scritta da lui verso il 1640, che ancora manoscritta conservasi nella biblioteca di S. Maestà in Torino. Prima del Della Chiesa tutti coloro, che riportarono la lettera di S. Eusebio, sempre la riportarono con la parola *Dertonensibus*, cominciando dal Mombrizio, che, verso il 1475, per l'edizione del suo *Sanctuarium* adoperò in generale codici molto esatti. Dopo il Mombrizio e probabilmente copiando da lui, riferirono la lettera di S. Eusebio con la parola *Derthonensibus* il Lipomano, il Surio, mons. Bonomi vescovo di Vercelli (1581), il Baronio (*Annales* ad an. 356, n. XCII) e mons. Giov. Stefano Ferrero nella prima edizione della sua *Vita di S. Eusebio*, stampata in Roma nel 1602. Nella seconda edizione della stessa *Vita*, che uscì in Vercelli nel 1609 (*apud Hieronymum Allariam et Michaelem Martam socios*) il Ferrero a p. 56, riportando la lettera, ai quattro popoli nominati per primi da S. Eusebio, cioè i Vercellesi, i Novaresi, gli Eporediesi ed i Tortonesi, aggiunse anche gli Aostani, gli Industriesi e gli Agamini al Palazzo (abitanti di Ghemme). Quest'aggiunta, come ivi afferma a pag. 63, la trasse da un codice antico della sua chiesa vercellese, nè vi è punto luogo a dubitare della sua affermazione.

---

(1) *Antichi Vescovi d'Italia, Il Piemonte,* Torino, Bocca, 1898, pag. 4.

Ma se giusta e doverosa si deve ritenere l'aggiunta fatta da mons. Ferrero, interamente arbitrario fu il cambiamento che volle introdurre mons. Della Chiesa sul solo fondamento della credenza, in cui egli ed altri molti al suo tempo erano, che S. Marziano fosse stato vescovo di Tortona al tempo di Adriano (1). Ma questo fondamento è troppo vacillante perchè dia diritto a correggere i codici antichi, lasciando stare che di Testona, piccolo villaggio presso a Torino, non v'è memoria alcuna che ne attesti non dico l'importanza, ma l'esistenza al tempo dell'impero romano, mentre tante ve ne sono che ci ricordano Tortona. E dico i *codici antichi* al plurale, perchè almeno due furono i codici antichi, che servirono per le edizioni della lettera di S. Eusebio, quello di cui si valse il Mombrizio, e quello adoperato dal Ferrero per la sua 2ª edizione.

A questi codici, recanti la parola *Dertonensibus*, qualcuno vorrebbe ora opporne un altro, anch'esso assai antico, tratto da un *transunto della cattedrale di Embrun,* nel quale non solo si trova la parola *Testonensibus,* ma vi si leggono molti altri nomi di popoli non scritti nei codici adoperati dal Mombrizio e dal Ferrero. Ma di questo codice o *transunto* di Embrun nè il Durandi, che lo citò per il primo nel 1766, diede nessuna informazione, nè altri o prima o dopo di lui ebbe la minima notizia. Onde tutto induce a credere che esso altro non sia che un'invenzione ed una falsificazione del Durandi stesso o del Meyranesio suo amico o di entrambi insieme.

È noto come Giuseppe Francesco Meyranesio (nato nel 1728, morto parroco di Sambuco nel 1793) sia stato uno dei più attivi falsificatori di storia piemontese. Egli inventò iscrizioni, cronache, documenti, e persino, come dimostrai nella mia opera sugli *Antichi Vescovi del Piemonte*, pag. 569, omelie di S. Massimo. Giustamente il Mommsen lo chiamò il Pirro Ligorio del Piemonte (2). Uno dei suoi amici e corrispondenti fu Jacopo

---

(1) Dopo aver riferito l'indirizzo della lettera, quale si trova nelle due edizioni del Ferrero, il Della Chiesa soggiunge: " *Nec non etiam Testonensibus* e non *Dertonensibus*, come malamente leggono le due allegate impressioni „. E ne dà la seguente ragione: " la città di Tortona a quel tempo aveva vescovi „.

(2) *Corp. Inscript. Latin.*, vol. V, parte 2ª, pag. 776, n. XXV.

Durandi, nato nel 1739 a Santhià, morto nel 1817, che nei suoi libri pubblicò molte iscrizioni inventate dal Meyranesio.

Il Mommsen nota che queste falsificazioni meyranesiane nelle opere del Durandi cominciano a comparire nell'opera: *Delle antiche città di Pedona, Caburro,* ecc., stampata in Torino nel 1769 (1). Però discorrendo dell'opuscolo del Durandi intitolato: *Dell'antica condizione del Vercellese e dell'antico borgo di Santhià*, stampato in Torino tre anni prima, cioè nel 1766, osserva bensì che vi sono qui pure nove iscrizioni false, ma soggiunge non sapersi se esse gli fossero comunicate dal Meyranesio, perchè nè il Durandi lo nomina, come poi fece in seguito, nè di quelle iscrizioni si trovò copia nelle schede meyranesiane. Onde conchiude che vi è molto a sospettare dello stesso Durandi, che non solo fosse connivente alle falsificazioni altrui, ma ne potesse inventare egli stesso: *Quam ob rem non propter socium tantum, sed per se quoque testis iste suspectus est.*

L'intitolazione più copiosa della lettera di S. Eusebio, di cui ho parlato, comparve appunto nell'opera suddetta del Durandi, *Dell'antica condizione del Vercellese,* stampata nel 1766 (2). Essa

---

(1) Ibid.

(2) Ecco le parole testuali del Durandi, comprese le parentesi: " La cui " intitolazione, secondo un antico Transunto esistente nell'Archivio della Cat- " tedrale di Ambrun, è questa: DILECTISSIMIS FRATRIBUS *et satis desideratis-* " *simis Presbyteris, Diaconibus et Subdiaconibus, et omni Clero et Sanctis in* " *fide consistentibus Plebibus Vercellensibus, Novariensibus, Hypporegiensibus,* " *Augustanis Industriensibus et Agaminis ad Palatium, nec non etiam Testo-* " *nensibus*..... (io leggo *Taurinensibus*) Alben. Asten. Intimilien..... (evvi qui " un intervallo, che dimostra mancarvi un nome, che secondo l'ordine delle " Città nominate deve essere *Ingaunensibus*) Aquen..... *ensibus* (leggo *Januen-* " *sibus*) *Eusebius Episcopus in Domino aeternam salutem.* Le parole sottose- " gnate sono scritte in carattere più minuto. Di qui apparisce, che Eusebio " amministrava anche le città della Provincia delle Alpi Cozie, secondo la " distribuzione civile fattane dal gran Costantino, perocchè le medesime " non avevano ancora il proprio Vescovo. Questa lettera fu primieramente " rapportata dal Baronio sotto l'anno 356. Ma nè il Baronio, nè quelli " che rapportaronla dopo lui, vi copiarono fedelmente il titolo della mede- " sima: tutti vi hanno ommesso le parole da *Augustanis* inclusivamente " fino a *Januensibus.* Inoltre invece di *Testonensibus* tutti fin qui lessero " *Derthonensibus.* Ma però Francesco Agostino Della Chiesa (*Descrizione ma-* " *noscritta del Piemonte*, part. IV, cap. 24) lesse il primo nell'antico Tran-

fu giudicata senz' altro una falsificazione meyranesiana dal ch.mo Carlo Promis, il quale fu uno dei primi e più benemeriti smascheratori dei Meyranesio e compagni. Presentando egli il dì 24 novembre 1867 alla nostra Accademia delle Scienze uno scritto di Giovanni Franc. Muratori sopra un codice d'iscrizioni falsificato dal Meyranesio, così si esprimeva: " Nè restossi quel-
" l'uomo dal metter mano anche nelle cose ecclesiastiche. . . . .
" Nella celebre epistola, che S. Eusebio nel 336 mandò da Sci-
" topoli alle sue pievi di Vercelli, Novara, Ivrea e Tortona, pa-
" rendo al Meyranesio che quelle quattro fosser poche, *da un*
" *antico transunto dell'archivio della cattedrale di Ambrun* compiè
" il periodo, interpolandovi nulla meno che undici altre pievi,
" fra le quali son sette moderne città vescovili. Il qual cimelio
" egli comunicò al Durandi, che fu sollecito a stamparlo (*Antica*
" *condizione del Vercellese,* pag. 37) „ (1).

Prima ancora del Promis parecchi scrittori di cose piemontesi, che parlarono della lettera di S. Eusebio, quantunque conoscessero l'intitolazione più lunga, messa fuori dal Durandi, non ne tennero conto alcuno, il che dimostra ch'essi non la credevano autentica. Così fecero, per es., nel secolo XVIII il Terraneo, contemporaneo ed amico del Durandi, e nel XIX il Cibrario nella sua *Storia di Torino* (2) ed il Semeria nella *Storia della Chiesa metropolitana di Torino* (3).

Grandemente significativo è il silenzio che intorno all'indirizzo della lettera tenne l'abate Costanzo Gazzera. Egli fu uno di quelli che più ingenuamente credettero e seguirono le falsificazioni meyranesiane, siccome ne fa ampia prova tutto il capitolo

---

" sunto di quella lettera *Testonensibus* „, pag. 37. Oltre alla falsificazione principale vi sono in questo tratto varie asserzioni erronee, di cui rilevo solamente l'ultima che il Della Chiesa *lesse* ecc. Non lesse, ma vi sostituì di suo arbitrio *Testonensibus.*

(1) " Atti dell'Accad. delle Scienze „, vol. III, anno 1867-68, pag. 48. Il Promis però si sbaglia quando attribuisce al Meyranesio l'introduzione dei tre nomi *Augustanis*, *Industriensibus et Agaminis ad Palatium.* Questa fu fatta assai prima del Meyranesio da mons. Ferrero, il quale la trasse da un codice di Vercelli, nè v'è la minima ragione di negar fede al Ferrero. Vedi Promis, *Storia di Torino antica*, pag. 17.

(2) Fontana, 1846, pag. 59, 60.

(3) Torino, 1840, pag. 15.

delle iscrizioni cristiane d'Alba, che il De Rossi prima e poi tutti gli altri scrittori riconobbero come indubbie falsificazioni del Meyranesio. Con tuttociò, sebbene egli certamente conoscesse la pretesa intitolazione tratta dall'archivio di Embrun (1), non la nominò, nè se ne servì. Anzi neppure accettò la lezione *Testonensibus* in luogo di *Derthonensibus* (2), sebbene già accettata da alcuni prima di lui, come anche fu accolta da altri dopo di lui. Cosicchè tra i tanti scrittori, che trattarono di storia piemontese dal Durandi alla fine del secolo XIX, pochissimi furono quelli che accettarono la lezione messa fuori dal Durandi come proveniente dal codice di Embrun. Anzi io non ne conosco che due, Vincenzo Malacarne, che la trascrisse nel suo articolo *Della città e degli antichi abitatori d'Acqui,* stampato nel vol. II degli *Ozii letterarii*, l'anno 1787 (3), ed il Biorci (4), nella sua *Storia d'Acqui,* vol. I, pag. 103 (Tortona, 1818). Questi, essendo acquese, seguì il Malacarne, che, sebbene saluzzese di patria, dimorò lungamente ad Acqui, e scrisse varie memorie sulla storia di quella città.

Ai suddetti non aggiungo il Casalis, poichè sì gli articoli composti da lui nel suo *Dizionario geografico-storico degli Stati Sardi,* sì quelli che gli furono comunicati da altri seguono le tracce degli storici locali. Così sotto Acqui, seguendo il Biorci, ammise la falsa intitolazione della lettera eusebiana. Al contrario, sotto Vercelli seguì la lezione del Ferrero. Ne tacque poi del tutto sotto Alba, Albenga, Asti, Ventimiglia, Genova, che sarebbero le altre città nominate nel supposto codice d'Embrun, e non nominate nei codici del Mombrizio e del Ferrero.

---

(1) La conobbe, perchè cita il Biorci nello stesso tratto, dove questi riporta la suddetta intitolazione. Vedi *Iscrizioni cristiane del Piemonte*, in " Memorie dell'Accademia delle Scienze ". 2ª serie, tomo XI, Torino, 1851, pag. 187.

(2) Ibid., pag. 182. Nella dissertazione *Il castello di Bodincomago diverso dalla città d'Industria*, in " Memorie, ecc. ", vol. XXXIV, Torino, 1830, non parla della lettera di S. Eusebio.

(3) Pag. 127 in nota.

(4) Egli aggiunge che mons. Buronzo del Signore vescovo d'Acqui in riconoscenza a S. Eusebio, che secondo la falsa intitolazione sarebbe stato vescovo anche degli Acquesi, volle che si celebrassero nella sua diocesi le due feste di S. Eusebio del 1° agosto e del 16 dicembre. Si noti che mons. Buronzo era vercellese, e quindi particolarmente devoto di S. Eusebio.

Questo silenzio di quasi tutti gli storici piemontesi, anzi di tutti, eccetto del Malacarne, e dei due che lo copiarono, il Biorci e il Casalis, è, come ognun vede, un altro forte argomento a ritenere per lo meno sospetta la lezione del codice di Embrun, la cui esistenza venne affermata dal solo Durandi, testimonio così mal sicuro in questa materia.

Un nuovo argomento di falsità lo ricavo da un catalogo di tutte le carte dell'archivio capitolare d'Embrun, scritto nel 1790-91, cioè pochi anni dopo l'opera del Durandi, e pubblicato dal can. Paolo Guillaume in appendice all'*Histoire générale des Alpes Maritimes* del P. Marcellino Fornier (Paris, 1890-92, vol. III, pag. 33). Nè da esso, nè dalla storia del Fornier, nè dalle diligenti ricerche dell'editore, il can. Guillaume, che essendo archivista del dipartimento delle Hautes-Alpes, e diligente storico, ha una piena conoscenza dei codici e delle carte più antiche della sua regione, si ha il menomo indizio dell'esistenza di un codice antico, il quale contenesse la lettera di S. Eusebio con un' intitolazione così diversa dalla volgata.

Resta adunque che una tale intitolazione si deva ritenere come falsa ed inventata.

Quanto all'autore della falsificazione, sebbene non si possa affermare con assoluta certezza che sia il Meyranesio, tuttavia ne recherò qui alcuni indizii assai gravi. Premetto che egli verso il 1755 aveva fatto un viaggio in Francia ad Aix ed a Grenoble nel Delfinato, e che dipoi più d'una volta diede carte e documenti di sua invenzione, come provenienti dagli archivi di quelle province (1). Di più v'è una sua lettera al Vernazza, nella quale dice d'aver una copia della lettera di S. Eusebio, presa da un codice antichissimo.

Essa è la 17ª tra le lettere del Meyranesio al Vernazza, che si conservano presso la nostra Accademia e porta la data

---

(1) Il giorno 12 settembre 1779 così scriveva al Vernazza: " Circa alle " cose d'Alba ho veduto molte cose negli archivj della Provenza e del Del- " finato, cioè nelli archivj di Aix e di Grenoble saranno circa 25 anni fa. " Di alcune carte ne ho preso copia, e delle altre, perchè non avevo tanto " di tempo, ne ho ricavato le memorie più interessanti. Avendo al presente " le mie carte ed i miei libri in una estrema confusione, non posso dar- " vene distinta notizia, il che farò altra volta ".

di Sambucco, 8 febbraio 1780: " Io ho, scrive il Meyranesio, " una copia della di lui (S. Eusebio) lettera scritta da Scitopoli " a varie città del nostro paese, e dei vicini, collazionata con " un antichissimo codice, la quale communicherò ben volentieri ". Evidentemente questa lettera, tratta da un codice antichissimo, doveva avere qualche cosa di diverso dalle edizioni già note, altrimenti sarebbe stato ridicolo intrattenerne il Vernazza. In effetto in altra lettera, scritta il 6 del seguente mese di marzo, dice chiaramente che quel poco ch'egli aveva di S. Eusebio (cioè la lettera suddetta o meglio l'intitolazione della lettera) era inedito: " Copierò poi quanto ho d'inedito di S. Massimo e quel " poco io tengo di S. Eusebio vescovo di Vercelli, e secondo " me, sicuramente maestro del nostro S. Vescovo (Massimo) ".

A questo primo indizio che la lettera pubblicata dal Durandi sia quella di cui parla il Meyranesio, si aggiunga quest'altro. Il Durandi nel pubblicarla non disse che gli fosse stata trasmessa dal Meyranesio. Ora appunto il Meyranesio, scrivendo, il 12 settembre 1779, al Vernazza, che s'era lagnato del Durandi, perchè avendogli trasmesse certe notizie, le aveva pubblicate senza citarlo, così gli rispondeva: " Circa al sig. Durandi voi avete tutte " le ragioni del mondo, nel fatto del quale mi scrivete. Altri, " oltre Voi, ancora vi sono, i quali in leggendo i suoi libri vi " ritrovano pagine intiere di cose a lui communicate, senza " che essi vi siano nominati ". E finisce: " A buon conto state " sicuro, che quello mi avete scritto resterà appresso di me ".

Tenuto conto ancora del fatto certo, che il Durandi fu l'organo, del quale si servì il Meyranesio per spargere nel pubblico le sue invenzioni, e che l'opera dell'*Antica condizione del Vercellese* è la sola, come afferma il Mommsen, dove il Durandi non cita il Meyranesio, sebbene ivi pure metta fuori varie iscrizioni false e la falsa intitolazione della lettera eusebiana che ha tutta l'impronta della fabbrica meyranesiana, pare potersi conchiudere che a quest'opera appunto alluda il Meyranesio quando si lagna del Durandi, e che perciò la suddetta falsificazione provenga dal Meyranesio. Al quale tuttavia se do la colpa maggiore, non credo si possa assolvere il Durandi da una cosciente e colpevole connivenza, poichè, fornito di criterio e di erudizione com' egli era, doveva pur accorgersi che l'intitolazione della lettera eusebiana non poteva essere genuina. Eppure

egli non solo la pubblicò, ma in un' altra sua opera, stampata 18 anni appresso, cioè nel *Piemonte Cispadano antico,* Torino, 1784, pag. 306, volle mantenuto l'inganno, rimandando il lettore all'intitolazione della lettera da lui pubblicata nell'*Antica condizione del Vercellese.* È pure da notarsi che il Meyranesio nello stesso anno 1784, nel suo *Pedemontium Sacrum,* unica opera da lui direttamente edita per le stampe, e dove (forse perchè la compose in compagnia del Nasi, onestissima persona) non intruse che pochissime sue falsificazioni, non parla nè punto nè poco della lettera di S. Eusebio. Tanto forse gli parve audace il metter fuori una sì evidente falsificazione!

Quanto alla lezione *Testonensibus* in luogo di *Derthonensibus,* essa fu generalmente seguita, sull'autorità di mons. Della Chiesa, dagli storici di Torino, o delle provincie più vicine a Torino. Probabilmente per alcuni di costoro il pensiero di comprendere Torino nei confini della diocesi di S. Eusebio (e vi sarebbe stata compresa se si fosse estesa fino a Testona al sud di Torino) li rese per lo meno non molto solleciti di appurare se la lezione proposta dal Della Chiesa fosse più conforme al vero. Il fatto fu che, oltre il Terraneo, il Cibrario e il Semeria, già nominati, accettarono la detta lezione anche alcuni moderni, quali il Chiuso (1) ed il Fabretti, che nel suo lavoro *Dell'antica città d'Industria,* sta a quanto ne avevano scritto il Terraneo ed il Chiuso (2).

Però gli scrittori vercellesi (per quanto mi consta) ritennero sempre la lezione *Derthonensibus* (3); e questa lezione fu pure seguita dal più recente storico della chiesa cattedrale di Tortona, il can. primicerio Pollini (4). Essa, da quanto ho detto, si deve ritenere come l' unica vera, poichè è la lezione dei codici antichi, visti e copiati dal Mombrizio e dal Ferrero, ed

---

(1) *La Chiesa in Piemonte dal 1797 ai giorni nostri,* Torino, Speirani, 1887, vol. I, pag. 2.

(2) Negli " Atti della Società d'Archeologia di Torino ", Anno III, Torino 1880, pag. 25.

(3) Per es. il Fileppi nella sua *Storia dei Vescovi di Vercelli,* scritta nel 1755, mss. presso l'Accademia delle Scienze, n^{i} 41 e 43.

(4) *Memorie storiche della chiesa cattedrale di Tortona,* Tortona, Rossi, 1889, pag. 19.

è interamente arbitraria la mutazione voluta introdurvi dal Della Chiesa (1).

---

(1) Come il Della Chiesa pretese di correggere *Derthonensibus* in *Testonensibus*, così il can. Bosio con pari autorità, congetturò che la vera lezione fosse *Taurinensibus*. Nelle note al *Pedemontium Sacrum* del Meyranesio, in *Mon. Hist. Patr. Script.* IV, pag. 1559, scrive: " Bisogna osservare che la " parola *Testonensibus* non dev' essere molto chiara e leggibile, mentre fu " letta da altri per *Testonensibus* e da altri in altre maniere..... „; e soggiunge: " Quindi si potrebbe anche leggere *Taurinensibus* in vece di *Tortonensibus* " o *Testonensibus* „.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1903 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Filosofia, inclusa la Storia della filosofia, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1900-1902. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Dicembre 1902.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. CONTE TOMMASO SALVADORI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: NACCARI, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MORERA e D'OVIDIO Segretario. — Scusa l'assenza il Socio MATTIROLO.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Segretario comunica una lettera di ringraziamento del Prof. Francesco D'OVIDIO pel premio Gautieri conferitogli, ed una lettera che invita ad aderire alle onoranze al p. Angelo SECCHI nel 25° anniversario della sua morte, promosse da un Comitato costituitosi in Roma.

Il Socio SEGRE a nome del Socio non residente BIANCHI, presenta una memoria del Dr. Guido FUBINI: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche*. Essa sarà esaminata da apposita Commissione.

Il Socio PARONA presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota intitolata: *Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a branchiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lavriano.*

LETTURE

Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a brachiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lauriano.

Nota del Socio CARLO FABRIZIO PARONA.

Nell'adunanza del 10 maggio 1901 comunicai alla R. Accademia l'elenco dei fossili lamellibranchi e, in maggior copia, brachiopodi del Lias medio, compresi in un blocco di calcare a crinoidi, trovato da A. Sismonda in un conglomerato presso Lauriano (regione *roncheja*) (1). In quella nota io riferiva, che erano rimaste infruttuose le ricerche fatte per rintracciare altri pezzi dello stesso calcare ed il conglomerato nel quale il Sismonda aveva raccolto il blocco suaccennato.

Ma nella primavera scorsa il collega Sacco avvertì la presenza di un altro masso di calcare fossilifero, identico a quello del Sismonda, nelle argille scagliose dei dintorni di Lauriano e gentilmente me ne portò un frammento. Allora si rinnovarono le ricerche; ed il dott. Prever, da me mandato sul posto, trovò un rilevante deposito di blocchi del calcare in discorso, che più tardi rivedemmo insieme, in una gita fatta con i professori Virgilio ed Airaghi e con qualche studente.

Nelle colline che si innalzano dietro Lauriano si sviluppano largamente le argille scagliose eoceniche, che si stendono allo scoperto appunto verso il borgo suddetto e verso Mezzana. Queste argille inglobano, come già dissi nella nota precedente, massi e frammenti di rocce diverse e numerosissimi pezzi di

(1) C. F. Parona, *Fossili del Lias medio nel conglom. terziario di Lauriano* (Colli di Torino).

calcare alberese, che sono attivamente ricercati e trasportati alla grande fornace da calce di Lauriano.

In uno scavo per l'estrazione di questi calcari da calce, e per consecutivo smottamento, venne messo a giorno nella massa delle argille scagliose, che affiora sotto C. Boggetta, un deposito formato da massi angolosi del calcare rosso a crinoidi e brachiopodi, accatastati con altri massi, meno comuni, di altro calcare rosso cristallino.

Si presenta come un grande cumulo della larghezza apparente di circa 20 m., alto sul piano della cava una quarantina di metri e che a monte della cava stessa si può seguire per un centinaio di metri, finchè scompare sotto i campi coltivati sovrastanti. Le argille scagliose, variamente ed intensamente colorate, lo avvolgono all'ingiro completamente e, nelle condizioni attuali della cava, non è possibile verificare come e dove spinga le sue radici e quali siano precisamente i rapporti del cumulo descritto colle argille stesse; se cioè tutto il cumulo sia compreso nelle argille o se ne sia soltanto avvolto, giacendo esso sopra un substrato di rocce diverse. L'ammasso non ha i caratteri di conglomerato; ha piuttosto l'aspetto di frana o di grossolano detrito di falda e, nella parte esterna visibile, l'argilla si interpone, rilegandoli incompletamente, fra i massi, tutti angolosi e voluminosi così, da misurare spesso oltre mezzo metro di diametro. Notevole è inoltre il fatto che, all'infuori di questa cava, le nostre indagini non riuscirono a rinvenire altri pezzi di calcare liassico in questo e negli altri affioramenti visitati di argille scagliose.

Le descritte condizioni di giacitura della massa detritica mi confermano nell'idea, già da me espressa, sulla provenienza del masso o dei massi riscontrati da Sismonda, nel senso di escludere una provenienza lontana, quale sarebbe quella dei noti giacimenti di Gozzano e di Arzo, e di ritenere ch'essi siano derivati da qualche terra o scogliera bagnata dal mare eocenico, situata sull'area stessa ove ora si elevano i colli torinesi, o in regione attigua lungo il piede attuale delle Alpi e scomparsa di poi, perchè distrutta dall'erosione o sepolta dal potente mantello di terreni cenozoici e neozoici.

Fatte le dovute proporzioni, questo piccolo deposito sembra paragonabile a certe *brecce esotiche del Flysch* nel versante nord

delle Alpi (1). Un caso analogo è offerto dall'eocene friulano, che nella regione da Gemona a Cividale ingloba " dei massi, anche grandiosi, di calcare cretaceo con specie e con un genere di rudiste non rinvenuti in alcun punto delle regioni a calcare cretaceo, che stanno a levante ed a ponente di questo tratto di monti „ (2). Frammenti esotici di rocce giuresi fossilifere si trovano anche nel calcare marnoso della barriera, che separa il lago di Varese dal laghetto di Biandronno; ma in questo caso i frammenti sono arrotondati, allo stato di ciottoli, ed evidentemente accennano all'intervento dell'azione fluviale nel loro trasporto (3). Per l'Appennino settentrionale, sono noti i ritrovamenti, entro le argille scagliose, di pezzi di rocce fossilifere di diversa età mesozoica. Così è nota la dispersione erratica di calcare a rudiste, riconosciuta molti anni or sono dal prof. Salmojraghi nella zona ad argille scagliose di Ariano-Puglia nell'Appennino meridionale; e recentemente si riconobbe, che non tutti i massi sono di calcare cretaceo, essendovene altri, che contengono distinta fauna liassica-domeriana (4).

La spiegazione della presenza di questi blocchi esotici di rocce di varia età nelle argille scagliose evidentemente non è ovvia, tanto più se si considera, che non si è ancora detta l'ultima parola circa l'origine delle argille stesse. È tuttavia indiscutibile l'utilità di tenere nota esatta dei fatti, che possono interessare il problema delle argille scagliose e la storia geologica delle regioni dove esse si trovano; ed io colla presente comunicazione mi sono proposto appunto di registrare uno di questi fatti, in attesa di comunicare i risultati dello studio, che converrà di fare sui fossili compresi nei massi ora scoperti, ma che richiede un preventivo lavoro, lungo e paziente, di estrazione dei fossili stessi dal calcare compatto e tenace.

---

(1) H. Schardt, *Les régions exotiques du versant nord des Alpes Suisses.* " Bull. Soc. Vaud. d. Sc. nat. „, 1898.

(2) T. Taramelli, *Consid. a propos. della teoria dello Schardt sulle regioni esotiche nelle Prealpi.* " Rend. R. Ist. Lomb. „, 1898.

(3) E. Mariani, *Sul calcare marnoso puddingoide pseudo-giurese di Biandronno.* " Rend. R. Ist. Lomb. „, 1899.

(4) G. Bonarelli, *Blocchi domeriani nelle argille scagliose dell'Appennino meridionale* (Miscell. di note geol. e paleont.). " Boll. Soc. Geol. It. „, 1901.

L'Accademico Segretario: E. D'Ovidio.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Gennaio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON
VICE PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Boselli, Cipolla, Brusa, Allievo, Savio e Renier Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 21 dicembre 1902.

Sono comunicati i ringraziamenti dei professori Francesco D'Ovidio e Antonio Belloni per il premio Gautieri di letteratura loro conferito.

Dalla Segreteria accademica è presentato un opuscolo del Socio corrispondente Rodolfo Dareste, *Le code babylonien d'Hammourabi,* Paris, 1902, estratto dal *Journal des Savants.*

Il Socio Savio fa omaggio di una sua recentissima pubblicazione su *Le origini del Monastero di S. Stefano d'Ivrea,* Pinerolo, 1902.

Il Socio Boselli presenta per gli *Atti* una nota del Prof. Giovanni Zannoni, *Federico II da Montefeltro e G. A. Campano.*

LETTURE

Federico II di Montefeltro e G. A. Campano.

Nota del Prof. GIOVANNI ZANNONI.

Il codice vaticano-urbinate 1022 contiene, scritto di mano del secolo XV, il primo frammento, abbastanza copioso (1), d'un compendio della vita di Federico conte, che fu poi duca d'Urbino. Non v'è alcuna indicazione di titolo o d'autore, nessun proemio, nessun esordio, ma soltanto questo principio improvviso:

Federici pater fuisse Guidantonius, unus inter clarissimos Italiae duces, vulgo traditur, Montefeltrensium familia. Pauci non ex hoc filium genitum, sed ex Aura filia susceptum, nepotem primum, mox propter eximiam spem indolis ascitum in familiam ac filium dictum malunt: patremque illi fuisse Bernardinum *(sic)* gente Ubaldina (2), Guidantonii generum et ipsum militiae domique clarum virum. Sed vulgatior fama hoc habet, eodem prope tempore natos, Guidantonio ex concubina feminam, Berardino masculum ex Aura uxore susceptum. Ita cum esset Guidantonius sine stirpe certa, clam in spem regni prolem commutatam, et Federicum in avi familiam suppositum nothi filii loco concessisse.

Mox Guidantonius, uxore ex Columnensium familia ducta, Antonium (*sic*) filium genuit: se Federicum in secundis haeredibus nomi-

(1) Descrissi questo codice nella mia edizione dei *Commentarii della vita e delle imprese di Federico di Montefeltro, di Francesco Filelfo*, cfr. pag. VII dell'estr. dagli " Atti e memorie della R. Deputazione di Storia Patria per le Marche „, vol. V. Il frammento vi comprende le carte 67-84 *v*. Un breve cenno ne comunicai a Giuseppe Cugnoni, che lo divulgò in una Memoria defensionale nella causa Tacchi-Cugnoni, per dimostrare che non tutto il materiale dei preziosi fondi vaticani è, nè può essere stato messo a catalogo. Cortesemente annunziò le mie conclusioni G. Zaccagnini nella nota *Il petrarchista Agostino Staccoli*, in " Studi di letteratura italiana „, IV, pag. 19 n. dell'estr.

(2) Più oltre, parlando di Ottaviano conte di Mercatello, è scritto Octavianum Balduinum, che poi altra mano corresse in Ubaldinum.

natum ut, ita tum demum succedere regno, si superstes Antonio foret, hoc constantius traditur; et negligentior in puerum factus avus post novam prolem; et quia conditione positus puer in testamento, ac posterior in tabulis habitus, qui prior natus esset, ut minus patrem existimare, suadent. Coeterum, neutra familia in obscuro habetur. Materna tamen, et gloria rerum in Italia gestarum, et ducum numero, atque opibus illustrior fuit: quorum unus Guido fertur Gallorum ingentem manum, qui incertum seditione pulsi patria an quaerendae sedis et proferendi imperii studio in Italiam venerant, magna ad Forum Julii strage delesse, quae res adeo Italiam liberasse externae servitutis metu visa est, ut publice Guidoni decreti honores referantur; et proelium magnitudine discriminis insigne cum aliis in locis, tum praecipue pisano in templo, quod est in Italia percelebre, ligustico exculptum marmore aspiciatur. Imperasse quod etiam Pisanis Guidonem ipsum, et mox et Federicum filium constat.

A questo brano, non privo d'importanza per la biografia di quel principe, segue il racconto dei primi anni di lui sino alle nozze precoci, che furono un cospicuo contratto politico per la casata dei Montefeltro; quindi, dopo breve narrazione della parte che egli ebbe nelle vicende civili e militari del tempo, l'anonimo autore espone i fatti d'arme compiuti da Federico, in quei primi anni giovanili, e agli ordini di Filippo Maria Visconti, e sotto la condotta del Piccinino; poi la fortunosa giornata di Roada, le imprese di Bergamo, che fra tutte più ne sollevarono il nome e la fama. Così narra il biografo:

Inde, relicto ad Athesim Federico, Picinini *exercitus* (1) ad oppugnationem Bergami conversus: quae res multi temporis futura videbatur, et praestare eodem exercitus propter cibariorum inopiam et situm urbis asperrimum, ut qui ferro statim non possent, fame tandem domarentur; et hiemem iam appetentem, consilium fuit, quoquo penetrari armis dabatur, igni ferroque agrum omnem vastare. Oppidani, re per transfugas cognita, quia omnem non poterant, propinquiorem, abditioremque partem subiacentem urbi defendere conabantur. Quare noctes ac dies in armis erant. Transitus qua qua non erant permuniti occupaverant; multis in locis fossa valloque communierant; diligentiam, ut solet, exacuebat periculi magnitudo. Picininus utrique operi simul intentus continuare obsidionem et interea parte copiarum corrumpere agrum statuebat;

(1) Il brano è a c. 71 *r*: prima il testo aveva Picininus: poi fu corretto nel genitivo, per l'aggiunta marginale della parola exercitus.

utramque rem multitudo gentis difficilem faciebat, et resistere oppugnantibus posse, et comprimere populatores; videbantur, tum praesidia et in urbe et per singula castra disposita iam inde ab initio belli conatum utrinque irritum faciebant; praelia interdum prope eventu pari committebantur. Hos pudor cedendi ac imperatoris praesentia instigabat; alteri munitione et propugnaculis, plerique etiam metu direptionis accendebantur; et, quod erat longe gloriosissimum, pro sua quaque fortuna in oculis suorum dimicabant.

Denique ventum eo iam erat ut audentiores viderentur facti qui obsidebantur. Cohortes aliquot inter oppugnandum lacessebant equitum turmas pabulatum egressas, interceperant denique plerumque obsessorem: carpentes semper fere superiores proelio discedebant, herentem castris invadebant; impetumque ex locis urbi subiectis repellebant. Cum militum stationes aberant, muris et in agro gerebatur res: in agrum usque decursitabant.

Picininus, ubi videt vel contemni paucitatem suorum, vel praefectorum ignavia segniter rem procedere, Federicum ex Athesi revocat. Mutatur eius adventu fortuna belli. Altero quo castra ingressus est die, initur proelium: hostes haud multo labore superati intra urbem compelluntur: praesidia per agrum imposita castellis se continent, ager usque quaque libera manu defendente nemine incenditur. Apparuitque statim omnibus quantum momenti fuisset in Federici adventu; et ipse eximius ostentator virtutis suae primum saepe locum sibi in acie poposcit, primusque auctor ineundi certaminis fuerat; repulsoque intra moenia cive, insultare muris, territare hostem, primus in agri populationem decurrere. Jam non hostium modo castris efferebatur perstrenui iuvenis nomen, sed Italiam omnem magna gloria compleverat; et initia externae militiae satis prospere cessisse videbantur.

Seguono le guerre di Romagna e la lotta contro Sigismondo Malatesta (il biografo, naturalmente, da devoto cortigiano feltresco, è di una estrema deplorevole parzialità a danno del signore di Rimini), con la immancabile tregenda del Passo di Alberico, il sacco di Tavoleto, la sconfitta di Rupolo; poi la campagna contro i fiorentini e l'assalto notturno di S. Leo; infine le imprese di Sassoferrato e della Genga. E fin qui, meno qualche audacia d'apprezzamento o qualche inesattezza di particolari secondari, il racconto procede ordinato, cronologicamente esatto: da questo punto, invece, precipita in una completa confusione di fatti, di luoghi e di date.

All'impresa della Genga (1442) lo scrittore fa subito tener dietro la campagna di Ascoli (1460) trovando, nientemeno, nel

tumulto che ne derivò (1) le cause della guerra, che ebbe la sua piena catastrofe a Monte Luro (1443). Intricatosi in questa selva d'errori, non si arresta più, tratto fatalmente a narrare come avvenimenti contemporanei, fatti distanti per molti anni, trasportando come posteriore al combattimento della Novellara (1443) (2), la morte del duca Guidantonio (20 febbr. 1442) e la successione del disgraziato Oddantonio, che chiama costantemente e unicamente Antonio.

Statura pregrandi, mansuetudine inaudita, gratia in universos quanta nemini gentilium suorum maiorem fuisse memoretur. Celebratum est illius funus permagnifice, provincialibus luctum ad dies multos prorogantibus. Eius testamentum ita erat conditum ut Federico locus in secundis esset, Antonius priorem obtineret.

E sono le ultime parole della biografia: le ultime giunte fino a noi.

Poichè il lembo di quest'ultima pagina ha una parola di richiamo, se ne può dedurre, e con certezza, che l'autore continuò ancora la narrazione (3) che ci manca: tuttavia, per quanto possiamo giudicare con sufficiente cognizione, non c'è da rimpiangerla troppo. È evidente che siamo di fronte a uno dei soliti scrittori, o cronisti, o biografi, o storici cortigianeschi del quattrocento: uno di coloro che offrivano ai principi più cospicui o più ricchi l'ingegno e la penna, ma senza convinzione, senza ammirazione talvolta, spessissimo senza entusiasmo, vôlti invece sempre al solo scopo di un ragionevole compenso. E questi, benchè, come appare dai brani citati, abile nel maneggiare il latino classico, e abbastanza efficace quantunque un po' prolisso, mancò poi di quell'acume critico, di cui altri dette prova, ad esempio lo stesso Francesco Filelfo, quando, già vecchio, prese a scrivere le gesta dello stesso conte d'Urbino. Si vede agevolmente che, fin quando lo soccorsero numerosi i particolari sicuri, si limitò ad ampliarli, adornandoli di tutti i fiori della sua retorica; quando, poi, fonti e notizie gli scarseggiarono, si

---

(1) Il solito revisore, accortosi dell'errore, ha aggiunto una piccola striscia di carta, con le parole: *Non fuit tunc temporis defectio civitatis Asculi.*

(2) Novellara diventa Numeralia!

(3) È la parola " Prospere „ con la quale doveva evidentemente cominciare la pagina o il libro seguente.

trovò a disagio, errò, spropositò, e procedette a fatica, più curando d'arrivare al fine, che di arrivarvi bene.

Quanto ai caratteri esterni, basta anche un rapido acchito a convincere che la scrittura è autografa: ne fanno prova le correzioni, benchè rare, gli scarsi pentimenti, i richiami, qualche cancellatura, alcune sviste ortografiche, e qualche scorrettezza grammaticale, dovuta probabilmente alla fretta del comporre. Di più, come la grafia rivela uno scrittore che ha un carattere proprio personale, non un copista, così la carta accenna che si tratta unicamente d'una bozza — come si suol dire — una di quelle donde poi gli amanuensi traevano gli splendidi codici in pergamena della biblioteca principesca.

Ora, di quanti ebbero a scrivere sulle imprese di Federico, tutti ci sono noti per i nomi e per le opere, o che i loro scritti siano editi o restino tuttora inediti; pochi ce ne sono sfuggiti: d'uno solo, forse, era dubbio se avesse o no davvero composta la biografia del Duca. Egli è Giovanni Antonio Campano. Certamente Michele Ferno, suo primo e diligente biografo, non ne fa parola (1); nessuno storico della letteratura, dal Mencken, che ne curò la ristampa di alcune operette (2), sino ai più recenti che di lui si sono particolarmente occupati (3), ha potuto darne notizia esatta; ma già, dal 1832, il Palma accennava che l'opera, da lui giudicata una Storia d'Urbino, era

---

(1) Mi valgo della copiosa edizione milanese del 1495.

(2) *J. A. Campani episcopi aprutini Epistolae et poemata una cum vita auctoris:* recensuit Jo. Burchardus Menckenius, Lipsiae, 1707.

(3) La bibliografia del Campano non è copiosa per scritti recenti. Particolarmente se ne è occupato G. Lesca, *G. A. Campano detto l'episcopus aprutinus*, Pontedera, 1892; e, a proposito di questo libro, C. Ricci, in " Nuova Antologia ", I. xi., 1892; e F. Flamini, *Spigolature di erudizione e di critica*, Pisa, 1895, pagg. 54 sgg. Notevoli particolari aggiungono C. Stornaiolo, *Alcune ricerche sulla vita del card. Bessarione*, nella rivista " Bessarione ", 1897, e F. Savini, *Il tesoro e la suppellettile della cattedrale di Teramo nel secolo XV*, in " Arch. stor. ital. ", 1899, t. XXIV, pag. 21 dell'estr., e L. Pastor, *Storia dei Papi*, Trento, 1891, II, *passim*. Delle relazioni di lui col conte d'Urbino, parla brevemente il Lesca, Op. cit., pag. 100-102, che invano cercò nella raccolta Urbinate Vaticana, questa Biografia: V. anche pag. 180. Cfr. anche P. Bilancini, *La guerra di Braccio contro l'Aquila nella letteratura abruzzese*, Aquila, 1901, pag. 19 sgg.; e F. Monnier, *Le quattrocento*, Paris, 1901, I, iii, *passim*.

stata compiuta (1). Le ragioni del Palma, quantunque dotto, erudito, esatto, non parvero sufficienti ai più: eppure nulla faceva apparir strano che il Campano avesse scritto una vita di Federico da Montefeltro, che, per molti rispetti, può considerarsi anche una storia d'Urbino nella seconda metà del sec. XV.

Anzitutto i rapporti fra il vescovo e il principe furono numerosi e intimi. Quando, a' 6 luglio 1472, Battista Sforza, moglie di lui, morì, il Pontefice inviò alle esequie, che furono solennissime, Nicolò Ubaldi da Perugia, uditore di Rota, quale ambasciatore, ma volle che suo oratore straordinario, per esprimere pubbliche condoglianze, fosse il Campano: e per tale circostanza, questi compose e recitò l'orazione funebre (2), che dovette sembrare un gioiello di forma e di pensiero, se quattro anni dopo veniva stampata a Cagli (3) — incunabolo oggi rarissimo e prezioso — in un opuscolo, riprodotto nelle varie edizioni, e poscia più volte tradotto in volgare (4).

Nella dimora in Urbino, di cui non è possibile nemmeno con la scorta del suo epistolario precisare la durata, ma che non dovette essere breve, a giudicarne dalle molte persone che conobbe, e con le quali rimase in relazioni epistolari amichevoli, il Campano seppe ottenere l'affetto e la stima di quel signore, che amava essere liberale e generoso. Gli offrì tutti i suoi scritti, che il Conte fece trascrivere dai migliori copisti e ornare dai migliori maestri di miniatura (5); prese a cantarne in tutti i

---

(1) Cfr. N. Palma, *Storia ecclesiastica e civile della regione più settentrionale del Regno di Napoli*, Teramo, 1832, II, 156: " morì ai 15 luglio 1477, " dopo avere ultimata la storia d'Urbino ".

(2) Cfr. Ratti, *Della famiglia Sforza*, Roma, 1725, II, 124 sgg.

(3) " Joannis Antonii Campani | Funebris Oratio pro Bap | tiſta Sphortia " Ur | bini Comitiſſa ac | Principe Illu | striſſima ". L'ultima carta (14 *v*) ha sotto otto righe di testo la data: " Callii Anno Salutis Mccccclxxvi In " kln Mar. ". È rara edizione di Roberto da Fano e Bernardino da Bergamo: di stampa alquanto rude, ma assai chiara. Un esemplare è nella Casanatense di Roma, segnato di nº 1506.

(4) Due versioni in volgare sono contenute nei codici vaticano-urbinate 1236 e 1272, che, per la grafia, mi sembrano del secolo XVI avanzato.

(5) Le opere di G. A. Campano sono contenute nei codici Vat. Urb. 324, 325, 326, 338, pregevolissimi tutti per bellezza di grafia e di miniature; ed ora egregiamente descritti da C. Stornaiuolo, *Codices Urbinates Latini Bibliothecae Vaticanae*, I, Romae, 1902, *ad n.* ove, pag. 642, del Campano sono segnalati anche due ritratti; e che ha con somma diligenza rilevato quanta parte è in essi di edito, e di inedito ancora.

metri gli elogi, e non di lui solo, ma di tutti i suoi famigliari e parenti: infine domandò e ottenne l'incarico di scrivere la storia della vita e delle imprese del cospicuo mecenate.

È veramente a stupire come ai biografi del Campano sia sfuggita tutta questa serie di particolari sull'opera sua, e che pure emergono dalle stesse sue lettere, ormai stampate da oltre quattro secoli.

Partito da Urbino il Campano, che già s'era messo con fervore al suo lavoro, si avvide che non poteva continuarlo, per mancanza di fonti sicure e di particolari, che solamente chi aveva seguìto il Conte nelle guerre o lo avvicinava poteva dargli. Ed eccolo rivolgersi ad Agostino Staccoli, il poeta gentile, uno delle più belle e nobili figure nel luminoso quadro della civiltà urbinate di quel tempo (1); quindi a Federico Galli (2); forse anche a Pierantonio Paltroni, che scriveva i Commentari (di ciò tuttavia non resta traccia), domandando istruzioni a compiere l'opera. E, poichè costoro non erano abbastanza zelanti e diligenti, eccolo rivolgersi allo stesso principe (3):

Historiam tuam non mea culpa — gli scrive la prima volta — sed potius dicam pace omnium vestrorum negligentia, non continuavi. Scripsi .....mittere reliqua documenta. Non miserunt. Ita et opera et tempus deperierunt. Res in eo est, ut simus adhuc in expeditione Tuscorum, ubi Florentiae cum Sigismundo convenisti. Post conventum illum admodum pauca enarrantur. Cura ut ad me quamprimum mittantur. Non ero negligens. Ubi erunt missa, statim resumetur materia cum omni dignitate, cum omni conatu.....

Era dunque giunto con il racconto appena al finire del 1447. Di lì a breve, di nuovo gli si rivolge, dolendosi che, quantunque

---

(1) A questa lettera accenna G. Zaccagnini, Op. cit., 19. Non è sfuggita nemmeno a P. Provasi-E. Scatassa, *Agostino Staccoli da Urbino e le sue rime inedite o poco note*, Urbino, 1902, pag. 20-21, ma con soverchia incertezza di deduzioni.

(2) Le edizioni hanno costantemente " Federigo d'Angeli de Urbino ". Il cod. Vat.-Urb. 325, assai più autorevole, corregge in " Federico de Gallis " Urbinat ". È ovvio, quindi, riconoscere quel Federico, di Angelo Galli, che è rammentato fra i *Secretari in casa* nella *Memoria felicissima* da me edita in " Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ", III, 9, pag. 668.

(3) Le lettere a Federico sono nel nono, e ultimo libro dell'Epistolario.

vivamente raccomandato da lui, la Corte di Napoli non gli sia benevola che di promesse per il cambio della sua chiesa in una diocesi più produttiva: non gli resta che partire.

Quamobrem nunc Teramum redeo... Si mittes illa documenta historica, Teramum mittes. Si fortasse iam misisti et sunt in itinere, iubeas quamprimum ad me deferri...

Alfine, siccome è umano e universale, per luoghi e per tempi, che gli ostinati vincano gli avari, il Campano, più fortunato in ciò del Filelfo, ottenne le informazioni che desiderava, e potè compiere l'opera sua. Ma, nel frattempo era avvenuto un grave mutamento: Sisto IV aveva, nell'agosto 1474, sollevato alla dignità di Duca il conte d'Urbino. Al Duca, quindi, manda il Campano il suo lavoro; ma egli non ne è contento: ha fatto il possibile per essere storico veritiero, e degno di tanto eroe e di tanto generale, ma sa bene che *res quamquam* (1) *magna ex parte assolutae, maiores tamen ad talem relinquantur. Magnum studium, vehemens desiderium, voluntatem tamen aequare non potuerunt.* E se ne scusa, attestando che, per quanto si possa celebrarlo, la fama, i pregi, i meriti del Duca sono sempre superiori a qualunque elogio.

A questi particolari, che facilmente emergono dalle lettere edite, un altro se ne può aggiungere: ed è la lettera, con la quale il Campano offrì a Federico di Urbino di narrare la storia della sua vita, lettera sfuggita a chi raccolse l'epistolario che abbiamo a stampa (2).

Federico illustri Urbinatium comiti salutem.

Et ceteri quidem Italiae duces fortunas rapere hominum, tu animos didicisti: nec ullum est pectus tam munitum, in quo tu gratia veluti ferro non penetras; et mihi tanta est insita cupiditas gloriae ut libenter quam meis rebus parere mihi laudem non possum, comparem alienis.

---

(1) Le edizioni antiche hanno *quaequam magna*; il Mencken legge: *quaedam magna*. Preferisco la lezione *quamquam* del cod. Vat.-Urb. 325. Si noti che con questa lettera al Duca Federico si chiude l'epistolario, sia nelle edizioni che nei codici.

(2) Questa minuta è in un codice conservato nell'Archivio Vaticano, Armadio XXXIX, t. 10, ed occupa la c. 145: pregevole manoscritto, ricco di lettere autografe al cardinale Ammannati, dei maggiori umanisti, e fra essi del Campano, e per la massima parte inedite.

Ita quod iam receperam me facturum, ut res gestas tuas commendarem posteritati, ad id sic tuae quoque literae incenderunt, ut ferre diutius cunctationem non possim, et perire putem quicquid non acceleretur. Veniunt in mentem non quae militiae gesseris solum, quamquam ea maxima, sed eximia etiam vitae tuae domesticae ornamenta, ut nulla in re minora pacis opera constitisse quam belli videaris; eritque utrobique argumentum gloriae, et quod multa gesseris praeclare, et quod nihil a te factum est quod non et summo duce et optimo principe dignum existimetur: quorum alterum belli studii constat, alterum pacis. Est qr unde aperta et dicere fronte ne in posteritatem possis nullam reformidaturus hominis labem. Quae res vel prima me impulit, quod erit mea gloria coniuncta cum tua, ut, quum negatum est mihi gerere praeclara atque fortia, quod proximum est ad eam laudem, illorum facta scribam, qui gesserunt.

Par itaque utrique nostrum proposita spes est: nisi quod aliquanto plus habet laudis qui sua ipse fecit, quam qui scripsit aliena. Sed nescio an minoris sit industriae polire quam pingere, donare quam cedere. Vendicabo et ipse quoque mihi aliquid, si a me, quaecumque tu gesseris, ornabuntur. Tu, vero, cura ut omnia tua facta, etiam cum potes dicta ad me deferantur, ea fide ut neque detraxisse tibi de tuis laudibus quicquam, neque arrogasse quae ad te non pertinent, videaris. Danda est militi etiam et tironi sua laus. Imperator exercitus summam sibi vendicat rerum, non res singulas assumit; nec minor est commendatio clari ducis in sua quam in suorum re bene gesta, quia nihil gerunt illi, quin sub duce ipso gessisse referantur.

Provide vel minima quaequae erunt colligenda, ut sit unde amputare aliquid liceat, desiderare non sit necesse: habebis me non modo auctorem scribendis rebus tuis, sed etiam testem probandis. De priscis nihil est quod in praesentia respondemus quos reverentia prosequendos ita censeo, ut nostris non detrahatur, et nostrorum res sunt in oculis atque aspiciuntur; illos tuetur antiquitas, ut quanto haec certiora tanto illa plus habere opinionis existimentur. Vale.

Importante è questa lettera — che ha inoltre sommo valore per chi esamini le vicende e le tendenze della storiografia nel periodo del Rinascimento — anche perchè ci conserva l' autografo certo del Campano: è una minuta, e ben si comprende dalle varie correzioni e dai richiami marginali. Chi ne confronti la grafia con quella del frammento di biografia prima esaminato, ne riconosce l'affinità; con un attento esame può anche trarre la certezza che sono opera della medesima mano: ma un dubbio può rimanere, data la differenza della carta, dell' inchiostro,

nonchè del tempo in cui i due testi furono scritti. Ma il dubbio scade per un'altra lettera, che lo stesso codice ci ha conservata, dello stesso Campano, e diretta a Jacopo Ammannati, cardinale di Pavia, uno dei più cospicui e solerti protettori del povero vescovo. Essa, che è tra le edite, ed ha nelle edizioni, come nel codice, la data di " Assisi 1° marzo 1474 „ (1), è tale che, confrontandola con la biografia, bisognerebbe volere esser ciechi per non convincersi, e quasi di primo acchito, della completa identità delle scritture: tutto è preciso, carta, inchiostro, formato; perfino ne corrispondono i margini, il numero delle righe, i tratti di filograna, ogni peculiarità, infine, del foglio e della mano stessa.

La conclusione emerge da sè: il Campano è certamente l'autore del frammento, e questo è — finora almeno — la sola parte che ci resta della sua Storia di Federico.

Ed a un' altra conclusione la stessa lettera ci conduce, rispetto al tempo in cui questo commentario fu scritto, cioè sul finire del 1473 e i primi mesi del 1474: nell' agosto di tale anno, come ho detto, il conte d'Urbino fu da Sisto IV promosso al ducato; talchè duca egli era quando il Campano gli inviò l'opera compiuta — ciò che dovette avvenire sul finire del 1474 o nei primi mesi del 1475 — perchè gli se ne desse un giudizio.

Ma ben altro avevano che fare i dignitari della Corte di Urbino! Il lavoro ebbe, sì, un rapido lettore, che notò gli errori e lo trattenne per correggerlo; ma, tenuto in scarsa considerazione, parte dell'opera andò smarrita: e solamente più tardi questo solo frammento rimasto fu unito al frammento inviato dal Filelfo, che tuttora nel 1476 si lagnava di non ricevere documenti e notizie per continuare la biografia del Duca.

Nel 1477 il Campano moriva; e nulla ci attesta delle sue relazioni con Federico e con la Corte Urbinate, negli ultimi anni di vita. Al suo lavoro, non abbastanza gradito, e fin d'allora trascurato e dimenticato, il tempo distrusse la prima pagina, e cancellò col proemio il nome dell'autore: così nessun elenco

---

(1) Occupa la c. 119; ed è una delle ultime, a stampa, nel libro ottavo. Inc.: " *Quod Assisiatibus meis...* „. Nessuna differenza fra la stampa e l'autografo, se non in quanto questo ha come firma la parola " Mancipiolum „.

ne tenne conto, nessun catalogo lo segnalò (1). E se oggi, per un caso, ne torna alla memoria, gli è perchè tale frammento, pur difettoso e di scarso pregio, riflette un principe che ebbe somma fama, e fu scritto da un valentuomo che il recente rifiorire degli studi umanistici ha ridesto dal secolare sepolcro.

---

(1) Una eccezione c'è. Questo primo foglio, col probabile proemio, e forse tutta la biografia, dovevano esistere tuttora, oltre la metà del sec. XVII, quando l'Olstenio tracciò l'elenco, edito da F. Raffaelli, *La imparziale e veritiera istoria della unione della Biblioteca Ducale d'Urbino alla Vaticana di Roma*, Fermo, 1877, pag. 14, ove è citata una Vita D. Federici Auctore Cāpicij, nome che è agevole riconoscere un errore di lettura per Campano.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Gennaio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci; SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI, D'OVIDIO Segretario, ed a seduta già aperta sopravvengono BERRUTI, GUIDI, FILETI.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

È fatto omaggio all'Accademia:

dal Socio straniero Prof. A. VON KOELLIKER della sua nota: *Die Golgifeier in Pavia*;

dal Socio corrispondente Prof. R. PIROTTA dell'opuscolo: *Illustrazione di alcuni erbari antichi romani*, scritto da lui e da R. CHIOVENDA;

dal Socio residente GRASSI degli *Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia*, redatti da G. BRIOSI, 2ª serie, vol. 7°.

Sono accolte per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

Sulle equazioni dinamiche di Lagrange, del Socio MORERA;

Contributi alla cristallografia zonale; nota 1ª: *L'omologia e la cristallografia zonale*, del Dr. Ugo PANICHI, presentata dal Segretario a nome del Socio corrispondente RÒITI;

Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecanti, del Dr. Arturo MARONI, presentata dal Socio SEGRE;

Sul moto di un corpo rigido, del Prof. Cesare BURALI-FORTI, presentata dal Socio PEANO.

Sullo sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti elementari, del Dr. Tommaso BOGGIO, presentata dal Socio PEANO.

LETTURE

Sulle equazioni dinamiche di Lagrange.

Nota del Socio GIACINTO MORERA.

Clebsch in una celebre memoria inserita nel LV volume del " Giornale di Crelle „ (*) ha mostrato come le equazioni differenziali che si ottengono annullando la variazione prima di un integrale definito, a limiti fissi, il quale contenga quante si vogliano funzioni sconosciute legate fra loro ed alla variabile indipendente da equazioni differenziali del primo ordine, si integrino conoscendo un integrale completo d' una equazione alle derivate parziali del primo ordine, e cioè, col classico procedimento di Hamilton-Jacobi. Ciò equivale in ultima analisi, come insegna la nota teoria di Jacobi, a porre le anzidette equazioni differenziali sotto la forma data da Hamilton alle equazioni dinamiche. Il punto di partenza delle deduzioni di Clebsch è quel metodo dei moltiplicatori che da Lagrange fu trasferito, senza dimostrazione, dalla meccanica nel calcolo delle variazioni.

La giustificazione di tal procedimento fu data dal Mayer, prima nella nota: *Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung* (" Berich. der k. Säch. Gesell. der Wiss. zu Leipzig „, B. 37, 1885, p. 1) ed in un'altra posteriore, avente il titolo: *Die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung* ecc. (ibid., B. 47, 1895, p. 129), ove vien considerato un problema più generale, di cui le equazioni differenziali vengono dal Mayer pure ridotte alla forma Hamiltoniana.

Il principio di Hamilton lascerebbe a tutta prima supporre che le equazioni di ogni problema dinamico, ove sussista la funzione delle forze, fossero sempre riducibili, mercè il procedi-

(*) *Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung welche nur eine unabhängige Variable enthalten*, l. c., p. 335.

mento di Clebsch-Mayer, alla forma canonica di Hamilton, ma una più attenta analisi mostra che così non è in generale, a cagione del differente modo con cui le variazioni vanno prese nella dinamica e nel problema degli isoperimetri.

1. — Indicati con: $p_1, p_2, \ldots, p_N$ i parametri di posizione, nella dinamica la variazione prima dell'integrale di Hamilton $\delta \int (T+U)\,dt$ è da annullarsi ritenendo le δp legate da un certo numero di equazioni lineari ed omogenee:

$$(1) \qquad \varphi_\delta^{(\nu)} \equiv \varphi_1^{(\nu)}\delta p_1 + \varphi_2^{(\nu)}\delta p_2 + \ldots + \varphi_N^{(\nu)}\delta p_N = 0 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots N-n),$$

mentre le p e le loro derivate $\frac{dp}{dt}$ sono legate da equazioni differenziali della forma:

$$(2) \qquad \varphi^{(\nu)} \equiv \frac{\varphi_d^{(\nu)}}{dt} \equiv \varphi_0^{(\nu)} + \varphi_1^{(\nu)}\frac{dp_1}{dt} + \varphi_2^{(\nu)}\frac{dp_2}{dt} + \ldots + \varphi_N^{(\nu)}\frac{dp_N}{dt} = 0.$$

Nei problemi degli isoperimetri invece si ritiene che, posto $p_i' = \frac{dp_i}{dt}$, le δ sieno legate da equazioni del tipo:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi^{(\nu)}}{\partial p_i}\,\delta p_i + \frac{\partial \varphi^{(\nu)}}{\partial p_i'}\,\delta p_i' \right) = 0;$$

le quali pel caso della dinamica sarebbero:

$$\delta\varphi^{(\nu)} \equiv \frac{\partial \varphi^{(\nu)}}{\partial p_1}\,\delta p_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi^{(\nu)}}{\partial p_N}\,\delta p_N + \varphi_1^{(\nu)}\delta p_1' + \ldots + \varphi_N^{(\nu)}\delta p'_N = 0.$$

Queste equazioni moltiplicate per dt si possono scrivere più concisamente:

$$(2'') \qquad \delta\varphi_d^{(\nu)} = 0$$

ritenendo $\delta t = 0$; *però esse sono in generale inconciliabili colle* (1), le quali invece dànno:

$$(1') \qquad d\varphi_\delta^{(\nu)} = 0.$$

Se le equazioni ai differenziali totali:

$$(2') \qquad \varphi_d^{(\nu)} \equiv \varphi_0^{(\nu)} dt + \varphi_1^{(\nu)} dp_1 + \ldots + \varphi_N^{(\nu)} dp_N = 0$$

fossero completamente integrabili, per un noto teorema i covarianti bilineari:

$$\delta\varphi_d^{(\nu)} - d\varphi_\delta^{(\nu)} \qquad (\delta t = 0)$$

a cagione delle (1) e (2) riuscirebbero identicamente nulli, e però *anche pel problema dinamico sussisterebbero le* (2″).

Allora, seguendo il procedimento di Clebsch-Mayer, si ponga:

$$\Omega = T + U + \lambda_1 \varphi^{(1)} + \lambda_2 \varphi^{(2)} + \ldots + \lambda_{N-n} \varphi^{(N-n)};$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i'} = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

a queste equazioni si aggiungano le (2), cioè le:

$$\varphi^{(\nu)}(p_1 \ldots p_N; p_1' \ldots p'_N; t) = 0$$

e si risolvano le $2N - n$ equazioni così formate rispetto agli $N - n$ moltiplicatori λ e rispetto a $p_1' \ldots p'_N$, i quali risulteranno espressi in funzione di t, p_i, q_i.

Si trasformi in queste variabili la funzione:

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i' q_i - \Omega = \sum_{i=1}^{N} p_i' q - (T + U),$$

che così trasformata indicheremo con $[H]$; calcolata in duplice modo $\delta[H]$ facilmente si trova dal paragone:

$$p_i' = \frac{\partial [H]}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = -\frac{\partial [H]}{\partial p_i} \quad (*),$$

sicchè le equazioni differenziali del moto assumono l'aspetto:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial [H]}{\partial q_i}; \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial [H]}{\partial p_i}.$$

(*) Mayer, " Leipziger Berichte ", 1895, p. 141. Le equazioni differenziali Lagrangiane sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}.$$

Se le equazioni (2') fossero integrate i loro $N-n$ integrali sarebbero pure integrali del precedente sistema Hamiltoniano.

Nella dinamica di regola si profitta dell' arbitrarietà dei moltiplicatori per ridurre le equazioni differenziali del moto al minimo numero possibile e non già per porle col procedimento di Clebsch-Mayer sotto la forma canonica di Hamilton. Si noti tuttavia che con questo si viene bensì ad accrescere di $N-n$ il numero delle incognite, ma in compenso si ha il vantaggio che la teoria dei gruppi di integrali di Lie permette di trarre nella integrazione del sistema canonico il massimo partito dagli integrali di esso già conosciuti (Cfr. MAYER, *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Diff. gleichungen*, ecc., " Math. Ann. „, B. 17, pag. 332 e seg., § 3).

2. — La forma Lagrangiana delle equazioni dinamiche si può ottenere per trasformazione diretta dell'equazione dei lavori virtuali, come fu fatto da Lagrange nella *Mécanique analytique* (Nouv. édit., T. I, pag. 304 e seg.) o, come oggidì meglio si può fare, per così dire con un tratto di penna, ricorrendo alla *teoria invariantiva delle forme quadratiche.*

Usate le notazioni della *Mécanique analytique*, e considerate le δx, δy, δz funzioni del tempo, continue, derivabili e soddisfacenti ad ogni istante alle equazioni dei vincoli, l'equazione dei lavori virtuali, come fu osservato dallo stesso Lagrange, si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}\sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = \delta T + \delta \mathcal{L},$$

ove:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \ldots, \quad T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

$$\delta \mathcal{L} = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Adunque l'equazione dei lavori si può porre sotto la forma:

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial T}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial T}{\partial z'}\delta z\right) = \delta T + \delta \mathcal{L}. \tag{3}$$

Si dimostra ovviamente il seguente teorema di algebra: *La polare di una forma quadratica omogenea è un covariante,*

qualunque sia il numero delle nuove variabili che per trasformazioni lineari, omogenee, cogredienti si introducono in luogo delle primitive.

Se ora tutte le x, y, z *compatibilmente coi vincoli* si esprimono in funzione di quante si vogliano nuove variabili o *parametri di posizione*:

$$p_1, p_2, \ldots, p_N, \text{ e del tempo } t,$$

avremo:

$$x' = \sum_i \frac{\partial x}{\partial p_i} p_i' + \frac{\partial x}{\partial t} t', \text{ ecc.....}$$

$$\delta x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t, \text{ ecc.....},$$

dovendosi a trasformazione compiuta porre:

$$t' = 1, \ \delta t = 0.$$

Espressa adunque la forza viva T in funzione delle p_i, p_i' e di t, la trasformata della forma polare:

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z'} \delta z \right)$$

è senz'altro:

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial p_i'} \delta p_i$$

e per conseguenza la trasformata della (3) è:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial p_i'} \delta p_i = \delta T + \delta \mathcal{L},$$

ove con T si deve intendere la forza viva espressa come or ora si è detto e con $\delta \mathcal{L}$ la espressione del lavoro virtuale delle forze applicate e cioè una espressione della forma:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i \delta p_i .$$

L'equazione (III) ci dà la più generale espressione analitica del principio dei lavori virtuali e noi la denomineremo il *principio di Lagrange*; essa equivale al principio di Hamilton.

In generale le equazioni dei vincoli sono date in parte sotto forma finita ed in parte sotto forma di equazioni ai differenziali totali fra le coordinate ed il tempo. Scelti i parametri p in guisa che le equazioni finite sieno tutte soddisfatte identicamente ed operata la trasformazione nelle p, secondo il principio di Lagrange la (III) dovrà essere verificata da tutte le δp che soddisfanno ad un certo numero $N-n$ di equazioni ai differenziali totali (1), mentre i differenziali dei parametri e del tempo sono legati da $N-n$ equazioni ai differenziali totali del tipo (2').

3. — Sia φ una funzione lineare nelle p', a coefficienti e termine noto funzioni delle sole p e t; cioè:

$$\varphi \equiv \varphi_0 + \varphi_1 p_1' + \varphi_2 p_2' + \ldots + \varphi_N p'_N .$$

Si ponga:

$$\varphi_d \equiv \varphi_0 dt + \varphi_1 dp_1 + \varphi_2 dp_2 + \ldots + \varphi_N dp_N ;$$

$$\varphi_\delta \equiv \varphi_1 \delta p_1 + \varphi_2 \delta p_2 + \ldots + \varphi_N \delta p_N ;$$

la (III) si può scrivere:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i'}\,\delta p_i = \delta(T+\varphi) + \delta\mathcal{L} - \frac{\delta\varphi_d - d\varphi_\delta}{dt}$$

ove nel *covariante bilineare*:

$$\text{(5)} \qquad \delta\varphi_d - d\varphi_\delta = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_i}\right)(dp_i\delta p_k - dp_k\delta p_i)$$

$$+ \sum_k\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\right)(dt\delta p_k - dp_k\delta t)$$

è da porsi:

$$\delta t = 0.$$

Se φ è la derivata totale rispetto al tempo di una qualunque funzione U delle p_i e di t, di guisa che

$$\varphi_d = dU ,$$

il covariante bilineare di φ_d è identicamente nullo ed allora la (IV) diviene:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i'}\,\delta p_i = \delta(T+\varphi) + \delta\mathcal{L};$$

e per conseguenza: *le equazioni dinamiche di Lagrange rimangono inalterate aggiungendo alla forza viva la derivata totale di una funzione arbitraria dei parametri di posizione e del tempo.*

Questo teorema implicitamente si trova già nella *Mécanique analytique* (T. I, pag. 311, 8).

4. — Se alcune fra le equazioni differenziali dei vincoli (2), ovvero alcune loro combinazioni lineari, sono integrabili completamente, si ponga:

$$\varphi = \lambda\frac{df}{dt}$$

essendo f un integrale qualunque e λ un moltiplicatore arbitrario.

Allora: $\varphi_d = \lambda df$, e siccome df e δf si annullano per le equazioni (1) e (2), la (IV) dà:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i'}\,\delta p_i = \delta(T+\varphi) + \delta\mathcal{L} - \lambda\,\frac{\delta df - d\delta f}{dt}$$
$$= \delta(T+\varphi) + \delta\mathcal{L}.$$

Questa equazione sussiste ancora se per λ si assume una funzione qualunque non solo delle p_i e t ma anche delle p_i'.

Dunque concludiamo il teorema: *le equazioni dinamiche di Lagrange rimangono inalterate se alla forza viva si aggiunge il prodotto per un moltiplicatore arbitrario della derivata totale di un integrale delle equazioni dei vincoli.*

Dall'ultimo teorema e dal precedente segue il *teorema generale* seguente. *Se $f_1, f_2, f_3 \ldots$ sono integrali delle equazioni differenziali dei vincoli, od anche di quelle del moto ma non contenenti le p_i', posto:*

$$\varphi = \frac{dU}{dt} + \lambda_1\frac{df_1}{dt} + \lambda_2\frac{df_2}{dt} + \lambda_3\frac{df_3}{dt} + \ldots,$$

ove U è una funzione arbitraria delle p_i e di t e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

sono funzioni arbitrarie delle p_i, p_i' e di t, le equazioni dinamiche di Lagrange rimangono inalterate aggiungendo φ alla forza viva.

Osserviamo che la (IV) può essere scritta:

$$(4') \qquad \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i'} - \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i} - \mathscr{P}_i \right\} \delta p_i + \frac{\delta\varphi_d - d\varphi_\delta}{dt} = 0.$$

Supponiamo le equazioni differenziali dei vincoli completamente integrabili: allora le f sono in numero $N-n$ e però immaginando alla maniera di Lagrange determinati gli $N-n$ moltiplicatori λ in guisa da annullare nella (4') i coefficienti di altrettante fra le δp_i, le quali in forza delle (1) sono funzioni delle rimanenti, si giunge al sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial p_i'} - \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} = \mathscr{P}_i \qquad (i = 1, 2, \dots N),$$

ove:

$$\Omega \equiv T + \frac{dU}{dt} + \lambda_1 \frac{df_1}{dt} + \dots + \lambda_{N-n} \frac{\partial f_{N-n}}{\partial t}.$$

5. — Nelle (1) riguardiamo t come un parametro costante e supponiamo che quest'equazioni ammettano parecchie combinazioni lineari integrabili. Sieno: P, Q, R tre integrali qualunque; posto:

$$\varphi_d = PdQ + Rdt,$$

avremo:

$$\delta\varphi_d - d\varphi_\delta = \delta PdQ - dP\delta Q + \delta Rdt,$$

e siccome per le equazioni (1): $\delta P = \delta Q = \delta R = 0$ concludiamo che il covariante bilineare di φ_d è nullo per identità. Dunque: *le equazioni differenziali di Lagrange rimangono inalterate quando alla forza viva si aggiunga $\varphi \equiv P\frac{dQ}{dt} + R$, essendo P, Q, R tre integrali qualunque delle equazioni differenziali dei vincoli, fissati nel loro stato al tempo* t.

6. — Si ponga in (IV):

$$\varphi \equiv \frac{\varphi_d}{dt}, \qquad \varphi_d \equiv dU + \sum_{\nu=1}^{N-n} \lambda_\nu \varphi_d^{(\nu)},$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ indicano delle funzioni arbitrarie delle p_i, p_i' e di t; allora, secondo quanto abbiamo precedentemente veduto, risulta ovviamente:

$$(6) \qquad d\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(T+\varphi)}{\partial p_i'}\delta p_i = dt[\delta(T+\varphi)+\delta\mathscr{L}] - \sum_{\nu=1}^{N-n}\lambda_\nu(\delta\varphi_d^{(\nu)} - d\varphi_\delta^{(\nu)}).$$

In generale supporremo che le (2′) non ammettano combinazioni lineari integrabili.

Il sistema (1), di equazioni lineari ed omogenee nelle δp, ammetterà sempre n soluzioni linearmente indipendenti (*):

$$\left.\begin{array}{ll} 1^a) & \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1N} \\ 2^a) & \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2N} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ n^a) & \xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nN} \end{array}\right\},$$

sicchè la soluzione più generale delle equazioni stesse sarà:

$$(7) \qquad \delta p_k = \sum_{r=1}^{n} \xi_{rk}\delta\pi_r \qquad (k=1, 2, \ldots, N),$$

ove i $\delta\pi_r$ sono dei moltiplicatori infinitesimi arbitrarî.

Sia poi:

$$\xi_{01}, \xi_{02}, \ldots, \xi_{0N}$$

una soluzione particolare qualunque del sistema di equazioni lineari, non omogenee (2); sicchè:

$$\xi_{01}\varphi_1^{(\nu)} + \xi_{02}\varphi_2^{(\nu)} + \ldots + \xi_{0N}\varphi_N^{(\nu)} = -\varphi_0^{(\nu)}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, N-n).$$

(*) Non può darsi che le $\varphi_\delta^{(\nu)}$ non siano linearmente indipendenti, giacchè se ciò fosse dalle (2′), che devono essere indipendenti, eliminando le dp risulterebbe almeno un'equazione finita fra le p_i e t.

La più generale soluzione delle (2′) sarà:

$$dp_k = \sum_{s=1}^{n} \xi_{sk}\, d\pi_s + \xi_{0k}\, dt. \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Tenendo presente la (5), ove siasi fatto $\delta t = 0$, avremo ovviamente:

$$\sum_{\nu=1}^{N-n} \lambda_\nu (\delta\varphi_d^{(\nu)} - d\varphi_\delta^{(\nu)})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N-n} \lambda_\nu \left[\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} P_{rs}^{(\nu)} (d\pi_r\, \delta\pi_s - d\pi_s\, \delta\pi_r) + \sum_{r=1}^{n} P_{0r}^{(\nu)}\, dt\, \delta\pi_r \right],$$

ove per brevità si è posto:

$$P_r^{(\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \xi_{ri}\, \xi_{sk} \left(\frac{\partial\varphi_i^{(\nu)}}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi_k^{(\nu)}}{\partial p_i} \right) = - P_{sr}^{(\nu)};$$

$$P_{0r}^{(\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (\xi_{0i}\, \xi_{rk} - \xi_{0k}\, \xi_{ri}) \left(\frac{\partial\varphi_i^{(\nu)}}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi_k^{(\nu)}}{\partial p_i} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\varphi_0^{(\nu)}}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi_i^{(\nu)}}{\partial t} \right) \xi_{ri}.$$

È noto che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il sistema delle equazioni ai differenziali totali (2′) sia completamente integrabile sono le:

$$P_{rs}^{(\nu)} = 0; \quad P_{0r}^{(\nu)} = 0.$$

L'ultimo termine al secondo membro della (6) si potrà far svanire identicamente, a cagione delle (1) e (2′), quando sia possibile determinare le λ_ν in guisa che riescano soddisfatte le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni:

$$\sum_{\nu=1}^{N-n} \lambda_\nu P_{rs}^{(\nu)} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{N-n} \lambda_\nu P_{0r}^{(\nu)} = 0,$$

nelle prime delle quali per r e s sono da prendersi tutte le combinazioni binarie degli indici 1, 2, ..., n. Se i vincoli sono indipendenti dal tempo si ha:

$$\varphi_0^{(\nu)} = 0\,,\ \xi_{01} = \xi_{02}, \ldots = \xi_{0N} = 0\,,\ \frac{\partial \varphi_0^{(\nu)}}{\partial t} = 0\,;$$

quindi: $P_{0r}^{(\nu)} = 0$, sicchè allora le precedenti equazioni si riducono alle prime $\frac{n(n-1)}{2}$. A queste si può sempre soddisfare, determinando in funzione delle p_i e t i rapporti delle λ, quando sia $N > \frac{n(n+1)}{2}$. *Allora esistono delle combinazioni lineari delle* $\varphi^{(\nu)}$, *le quali moltiplicate per moltiplicatori arbitrarî si possono aggiungere alla forza viva senza alterare le equazioni dinamiche di Lagrange*, come fu messo in luce dal sig. HADAMARD in una sua interessante memoria: *Sur les mouvements de roulement* (" Mém. de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux ", t. V, s. IV, p. 397), riprodotta nel 4° N° della Collezione: *Scientia*.

Se invece i vincoli dipendono dal tempo ma son tali che fissati nel loro stato ad un istante t qualunque le loro equazioni differenziali divengano completamente integrabili, allora delle precedenti equazioni le prime divengono identiche, mentre le ultime n si potranno sempre soddisfare, determinando in funzione delle p e t i rapporti delle λ, allorquando sia

$$N > 2n.$$

Per conseguenza *allora vi sono almeno* $N - 2n$ *combinazioni lineari delle* $\varphi^{(\nu)}$, che, *moltiplicate per moltiplicatori arbitrari, si possono aggiungere alla forza viva senza alterare le equazioni dinamiche.*

In generale *vi saranno poi sempre di tali combinazioni allorquando:* $N > \frac{n(n+3)}{2}$, ed il loro numero è di almeno: $N - \frac{n(n+3)}{2}$.

7. — Il sistema di equazioni lineari, omogenee alle derivate parziali, aggiunto o reciproco di (2′) è (*):

(*) Cfr. PASCAL, *I gruppi continui di trasformazioni*, cap. V, §§ 2, 3 (Manuali Hoepli, Milano, 1903).

$$(9) \qquad X_r f \equiv \xi_{r0} \frac{\partial f}{\partial p_0} + \xi_{r1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots + \xi_{rN} \frac{\partial f}{\partial p_N} = 0$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

ove per simmetria abbiamo scritto: p_0 invece di t: ξ_{00} invece di 1; $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots, \xi_{n0}$ invece dello 0. Com'è noto le condizioni di completa integrabilità delle (2′) sono quelle perchè le equazioni lineari alle derivate parziali (9) costituiscano un sistema completo, ossia le $(X_r X_s)f$ sieno combinazioni lineari delle Xf stesse.

Alle (9) uniamo le:

$$(10) \qquad (X_r X_s)f = 0$$

che in generale non tutte sono una conseguenza delle (9); si avrà così in generale un sistema non completo che comprende m equazioni distinte, essendo:

$$n < m \leq n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Supposto $N > m$, il reciproco di questo consterà di

$$H = N + 1 - m \geq N - \frac{n(n+3)}{2}$$

equazioni, e cioè, di almeno $N - \frac{n(n+3)}{2}$ equazioni ai differenziali totali.

Queste equazioni sono combinazioni lineari omogenee, indipendenti, delle primitive (2′). Infatti alle (9) si soddisfa nel modo più generale ponendo:

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \varphi_i = \lambda_1 \varphi_i^{(1)} + \lambda_2 \varphi_i^{(2)} + \ldots + \lambda_{N-n} \varphi_i^{(N-n)}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, N);$$

sostituendo nelle (10) avremo $m - n - 1$ equazioni lineari ed omogenee nei moltiplicatori λ, le quali ammetteranno $H = N - m + 1$ soluzioni distinte, ad ognuna delle quali corrisponderà nel sistema reciproco un'equazione: $\varphi_d = 0$.

È ora facile dimostrare il seguente teorema, che è un'ovvia generalizzazione di un altro pubblicato dal sig. Hadamard nella nota: *Sur certains systèmes d'équations aux diff. tot.* (" Procès-verbaux de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux ", Année 1894-95, pag. 17).

Il covariante bilineare di φ_d *a cagione delle* (1) *e* (2′) *è identicamente nullo.*

Infatti, essendo per identità:

$$\sum_{i=0}^{N} \xi_{ri}\varphi_i = 0 \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

sarà anche:

$$\sum_{i=0}^{N} \xi_{ri}\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k} = -\sum_{i=0}^{N} \varphi_i \frac{\partial\xi_{ri}}{\partial p_k} \qquad (k=0,1,2,\ldots,N),$$

e quindi:

$$2P_{rs} = \sum_i\sum_k \xi_{ri}\xi_{sk}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_i}\right) = \sum_i \varphi_i \sum_k \left(\xi_{rk}\,\frac{\partial\xi_{si}}{\partial p_k} - \xi_{sk}\,\frac{\partial\xi_{ri}}{\partial p_k}\right),$$

la quale espressione si ottiene dalla $(X_r X_s)f$ sostituendovi in luogo delle $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ rispettivamente le φ_i e perciò è nulla identicamente.

Di qui reciprocamente apparisce che *se* φ_d *appartiene alla schiera* $\sum_\nu \lambda_\nu \varphi_d^{(\nu)}$, *affinchè il suo covariante bilineare sia nullo per identità è necessario che* φ_d *faccia parte del sistema aggiunto o reciproco di* (9) *e* (10). Formato adunque il sistema di equazioni ai differenziali totali aggiunto alle (9) e (10), che indicheremo con:

$$\varphi_d^I = 0,\ \varphi_d^{II} = 0,\ \ldots,\ \varphi_d^H = 0 \tag{11}$$

e posto:

$$\Omega \equiv T + \mu_I\varphi^I + \mu_{II}\varphi^{II} + \ldots + \mu_H\varphi^H,$$

ove i moltiplicatori μ sono funzioni arbitrarie delle p_i, p_i' e t, l'equazione (4′) diviene:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial p'_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} - \mathscr{P}_i\right)\delta p_i = 0. \tag{12}$$

Ritenute le (11) risolvibili rispetto alle p_1', p_2', ..., p_H' i moltiplicatori μ si possono evidentemente determinare in guisa che Ω non contenga p_1', ..., p_H', per il che le μ risulteranno funzioni lineari della p_i'. Ciò fatto avremo:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_1'} = \frac{\partial\Omega}{\partial p_2'} = \ldots = \frac{\partial\Omega}{\partial p_H'} = 0\,,$$

così dalla (12) si potranno eliminare le p_1', ..., p_H'.

Espressi poi le δp_i per mezzo delle (7) in funzione dei parametri infinitesimi indipendenti $\delta\pi_r$, la (12) si spezza in n equazioni differenziali del secondo ordine, nelle quali più non compaiono le derivate rispetto al tempo delle p_1, ..., p_H.

La stessa cosa dicasi di quelle $N-n-H$ fra le equazioni differenziali dei vincoli (2) che non si sono utilizzate per la eliminazione delle p_1', ..., p_H'.

Nel caso particolare poi che le (11) fossero completamente integrabili per mezzo dei loro integrali dalla (12) e dalle anzidette $N-n-H$ equazioni dei vincoli si potrebbero eliminare anche p_1, p_2, ..., p_H.

Dell'arbitrarietà dei moltiplicatori μ si può invece profittare per annullare H termini della (12), ossia per soddisfare alle H equazioni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial p_i'} - \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} = \mathcal{P}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, H).$$

L'equazione dei lavori diviene così:

$$(12') \qquad \sum_{j=H+1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial p_j'} - \frac{\partial\Omega}{\partial p_j} - \mathcal{P}_j\right)\delta p_j = 0.$$

Alle prime H equazioni associamo le H equazioni che si ottengono risolvendo le (11) rispetto a p_1', ..., p_H'; all'equazione dei lavori virtuali associamo quelle altre $N-n-H$ equazioni dei vincoli, che sono indipendenti dalle (11), e dalle quali per mezzo delle precedenti intendiamo eliminate p_1', ..., p_H'. Allora le mancanti n equazioni dinamiche sono da dedursi dalla (12') coi soliti procedimenti, ritenendo le p_j legate fra loro ed al tempo t da quelle $N-n-H$ equazioni ai differenziali totali che si ottengono moltiplicando le anzidette equazioni per dt.

Contributi alla cristallografia zonale.

L'omologia e la cristallografia zonale.

Nota 1ª del Dott. UGO PANICHI.

(Con una Tavola).

Nel 1897 il Goldschmidt mostrava che mediante una legge esprimibile matematicamente, si può " dedurre, da alcune poche faccie, lo sviluppo di tutte le forme osservate in una specie cristallina „ e che al processo geometrico dello sviluppo di *forme*, si può far corrispondere un processo fisico di scomposizione di *forze* (complicazione), una volta ammesso il principio delle forze normali (*).

I risultati del Goldschmidt aprivan la via allo studio di molti problemi risguardanti i collegamenti zonali; e in questo senso appunto si è svolta in questi ultimi anni la cristallografia, per opera specialmente del Goldschmidt e del Fedorow. — Seguo anch'io da qualche tempo questo nuovo indirizzo degli studi cristallografici e in questa Nota preliminare, già in gran parte composta e argomento di alcune lezioni durante l'anno scolastico 1898-99 (**), comincio a trattare del concetto geometrico dell'omologia, in quanto esso può giovare allo studio degli sviluppi di forme e in quanto trova la sua effettiva corrispondenza nei legami zonali dei cristalli.

L'omologia e la notazione milleriana. — Fissiamo di chiamare semplicemente *diedro* di due piani qualunque, l'angolo da essi formato, nel quale giace l'origine degli assi coordinati; l'angolo supplementare di esso lo chiameremo sempre il *diedro*

(*) " Zeitschr. für Kryst. „, XXVIII, pag. 1 e 414.

(**) Vedi " Annuario del R. Istit. di Studii Sup. in Firenze „, pag. 115: Panichi U., *Lezioni sulle proprietà e sul calcolo delle forme dei cristalli, con introduzione geometrica.* Litogr. Dolfin, 1899.

supplementare. — Se poi, invece di due piani qualunque, consideriamo due faccie di cristallo, il loro diedro sarà quello che esse formano realmente incontrandosi o che formerebbero se fossero estese fino a incontrarsi; il loro diedro supplementare avrà quindi per misura l'angolo delle normali alle faccie.

Si abbiano ora due piani ϵ, ϵ' qualunque, riferiti a un sistema di n assi: come è noto le intersezioni dei piani cogli assi determinano i vertici di due poligoni omologici; l'origine degli assi è il centro di omologia; la retta $\epsilon\epsilon'$ appartiene al piano d'omologia ω (vedi fig. 1, in cui $n=4$, $\epsilon \equiv MNPQ$, $\epsilon' \equiv M'N'P'Q'$, $k \equiv \epsilon\epsilon' \equiv RSTU$, $\omega \equiv k \,.\, R'S'T'U'$).

Sopra uno qualunque degli assi, che porremo $= x$, i punti O, $x\epsilon$, $x\epsilon'$, $x\omega$ formano un gruppo armonico, e perciò, dati $x\epsilon$, $x\epsilon'$, è subito trovato $x\omega$. Se i punti $x\epsilon$, $x\epsilon'$ son situati dalla stessa parte rispetto all'origine O, il punto $x\omega$ è pure situato dalla stessa parte e compreso fra essi; se poi $x\epsilon$ e $x\epsilon'$ si trovano da parti opposte rispetto a O (fig. 2: OP, OP'), il punto $x\omega$ si troverà dalla parte di quello dei due punti $x\epsilon$, $x\epsilon'$, che è più vicino a O; e quel punto rimarrà compreso fra O e $x\omega$. Infatti poniamo $\overline{O.x\epsilon} \equiv e$, $\overline{O.x\epsilon'} \equiv e'$, $\overline{O.x\omega} \equiv u$, intendendo che e, e', u esprimano il valore dei tre segmenti, in grandezza e segno. Se il valore assoluto di e' è maggiore di quello di e, sarà $\frac{e}{u-e} = \frac{e'}{e'-u}$; se è minore, sarà $\frac{e'}{u-e'} = \frac{e}{e-u}$; e in ogni caso avremo:

$$u = \frac{2ee'}{e+e'} \tag{I}$$

relazione, da cui, dati e ed e', si ricava in grandezza e verso il parametro u.

Nel caso in cui uno dei parametri e, e' sia infinito, u risulta eguale al doppio dell'altro parametro; infatti

$$\lim_{e'=\infty} u = \lim_{e'=\infty} \frac{2e}{\frac{e}{e'}+1} = 2e; \quad \lim_{e=\infty} u = 2e'.$$

Se il piano ϵ è fisso ed ϵ' si muove parallelamente a sè stesso, la intersezione dei due piani descrive evidentemente il piano ϵ, e in questo moto si conserva parallela a sè stessa; ora,

in ogni posizione di ϵ', essa appartiene al piano ω, e perciò mentre ϵ' scorre parallelamente a sè stesso, il piano d'omologia scorre mantenendosi parallelo ad una determinata direzione, la direzione di $k \equiv \epsilon\epsilon'\omega$.

Se poi, sempre restando fisso ϵ, il piano ϵ' ruota intorno a k, anche il piano ω ruoterà intorno alla stessa retta k, asse dei due fasci descritti da ϵ' e da ω.

Aggiungendo ai tre piani finora considerati, il piano $\pi \equiv Ok$, il gruppo $(\pi\epsilon\omega\epsilon')$ sarà in ogni caso un gruppo armonico.

Siano ora i piani ϵ, ϵ' rappresentati mediante i simboli milleriani $(m\,n\,p\,...)$, $(m'\,n'\,p'\,...)$ e quindi:

$$OM = \frac{a}{m}\,,\ OM' = \frac{a}{m'};\ ON = \frac{b}{n}\,,\ ON' = \frac{b}{n'};\ \ldots$$

ben inteso che gli indici saranno affetti da segno eguale a quello dei corrispondenti parametri. Allora, per la (I), gli indici di ω saranno:

$$\frac{m+m'}{2}\,,\ \frac{n+n'}{2}\,,\ \frac{p+p'}{2}\,,\ \ldots$$

e il suo simbolo sarà:

$$\frac{1}{2}\,(m+m' \quad n+n' \quad p+p' \ \ldots).$$

Trasportiamo questo risultato in cristallografia e supponiamo date due faccie a indici interi (mnp), $(m'\,n'\,p')$; il piano d'omologia costruito rispetto agli assi cristallografici, sarà una nuova faccia, determinata in giacitura (direzione) dal simbolo

$$(m+m' \quad n+n' \quad p+p')$$

e nella sua vera posizione dal simbolo stesso affetto dal coefficiente $\frac{1}{2}$.

Quindi possiamo concludere che: alla esistenza di due faccie qualunque ϵ, ϵ', è omologicamente collegata l'esistenza di una terza faccia ω, che passa per lo spigolo $k \equiv \epsilon\epsilon'$ e che determina sopra gli assi i quarti armonici rispetto alle intersezioni degli assi colle faccie date e all'origine; mediante i simboli milleriani si esprime in modo semplice la relazione fra le giaciture di ϵ, ϵ'

e di ω: basta fare la somma algebrica degli indici delle faccie date, asse per asse; il simbolo ottenuto, moltiplicato per $\frac{1}{2}$, esprime non soltanto la giacitura, ma anche la vera posizione della faccia ω.

Così ad es. dalle faccie (111), (100) si ottiene la faccia (211), la quale perciò tronca lo spigolo 111 : 100; la faccia $\frac{1}{2}(211)$ è tangente allo spigolo stesso e noi la chiameremo *omologica* o *armonica* della coppia (111), (100). Potremo scrivere simbolicamente

$$\begin{pmatrix} 111 \\ 100 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}(211) \quad \text{o anche} \quad 2\begin{pmatrix} 111 \\ 100 \end{pmatrix} \longrightarrow (211)$$

e in generale:

$$\begin{pmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}(m+m' \quad n+n' \quad p+p').$$

L'omologia e il principio delle forze normali. — Il legame geometrico fra una coppia di piani (riferiti a un dato sistema di assi) e il loro piano d'omologia, trova una reale corrispondenza nei legami zonali dei cristalli. La relazione trovata teoricamente fra gli indici di due faccie e quelli della loro faccia omologica è verificata dall'esperienza; infatti la faccia che Junghann chiamò " die krystallonomische Abstumpfung „ (*) di una data coppia di faccie, è parallela al piano d'omologia della coppia, essendo centro d'omologia l'origine degli assi cristallografici.

La faccia armonica di una coppia di faccie dipende dunque da esse geometricamente e fisicamente; ora se supponiamo che la normale alla faccia armonica coincida colla direzione di una forza e che questa possa considerarsi come la risultante di due forze normali alle faccie date, per le proprietà armoniche surriferite si può subito stabilire in qual rapporto le intensità delle componenti debbano stare fra loro. Infatti conducendo dall'origine degli assi le normali alle faccie date ϵ, ϵ' e alla loro armonica ω, le tre rette appartengono al medesimo piano α, normale

(*) " N. Jahrb. „, Beil. Bd. I, 1881, pag. 345.

allo spigolo $k \equiv \epsilon\epsilon'\omega$; poniamo $O' \equiv \alpha k$ e (come a pag. 3) $\pi \equiv Ok$; e poichè il fascio $(\pi\epsilon\omega\epsilon')$ è armonico, sarà armonico il fascio dei raggi intersezioni di π, ϵ, ω, ϵ' con α. Nella fig. 3, in cui per semplicità α coincide con uno dei piani assiali, è dunque armonico il fascio $O'.\ M',P,N,O$. — Ora, se alle tre normali OA, OC, OB aggiungiamo la OH normale ad $O'O$, il fascio $O.A,C,B,H$ sarà non soltanto proiettivo del fascio $O'.\ M,P,N,O$, ma anche *direttamente eguale* ad esso; e perciò il fascio $O\ .\ A,C,B,H$ è armonico e la conica passante pei punti O,B,C,A,O' è una circonferenza e la retta OH le è tangente in O. — Se tagliamo il fascio $O\ .\ A,C,B,H$ con una retta parallela ad OH (per es. BF, che sarà quindi perpendicolare ad OO'), avremo

$$BE = ED$$

e perciò OB, OD sono i lati di un parallelogrammo che ha per diagonali BD, $2(OE)$; quindi le intensità delle forze agenti normalmente alle faccie ϵ, ϵ' stanno fra loro come OB sta ad OD.

Se le faccie ϵ, ϵ' son faccie di pinacoide, supponendo dapprima che il piano α, normale allo spigolo k, coincida col piano di due assi cristallografici (fig. 4: OG, OG'), per la similitudine dei triangoli OBD, $OO'G$, avremo

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OG}{O'G}$$

e questa è la condizione affinchè le forze normali alle faccie date possano comporsi in una forza normale alla faccia armonica; esse debbono star fra loro come i parametri cui rispettivamente sono perpendicolari.

Se poi α non coincide col piano di due assi, le forze saranno proporzionali alle proiezioni dei parametri sul piano α, alle quali esse forze sono rispettivamente perpendicolari.

Sviluppi per faccie omologiche. — 1° Il simbolo della faccia omologica di due faccie date è affetto dal coefficiente $\frac{1}{2}$ e abbiamo visto ora come alla posizione individuata da tal coefficiente, corrispondano notevoli proprietà armoniche. Prescindiamo ora dal coefficiente, ossia, come suol farsi in cristallo-

grafia, riferiamoci alla sola giacitura delle faccie, che possiamo per esempio immaginar rappresentate in proiezione stereografica. Consideriamo le due coppie di faccie

$$\begin{cases} m & n & p \\ m+m' & n+n' & p+p' \end{cases}; \quad \begin{cases} m' & n' & p' \\ m+m' & n+n' & p+p' \end{cases};$$

esse dànno luogo a due nuove faccie omologiche, espresse in giacitura dai simboli

$$(2m+m' \quad 2n+n' \quad 2p+p'), \quad (m+2m' \quad n+2n' \quad p+2p')$$

e si vede subito che costruendo con esse e colle faccie date nuove coppie, per ottener nuove faccie colla stessa operazione, e così continuando fino all'infinito, si costruirebbe uno sviluppo di infinite faccie in zona, di cui una qualunque faccia (rst) sarà legata con (mnp), $(m'n'p')$ dalla relazione

$$(rst) \equiv (Hm+Km' \quad Hn+Kn' \quad Hp+Kp')$$

essendo H e K numeri interi e positivi. Tutte le faccie dello sviluppo hanno le giaciture comprese nel diedro supplementare delle due prime faccie e quindi i loro poli situati sull'arco di zona contenuto fra i poli delle faccie date.

Così per es., partendo dalla coppia $\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \end{pmatrix}$, ad una prima fase dello sviluppo corrisponderà il gruppo:

100 110 010

alla 2ª fase il gruppo:

100 210 110 120 010

alla 3ª fase il gruppo:

100-310-210-320-110-230-120-130-010

e così di seguito.

Ma anche ogni faccia esterna al diedro supplementare delle faccie date e in zona con esse, può essere espressa per mezzo dei loro simboli; basta considerare una delle faccie date, come appartenente al sistema costruito colle altre due. E in generale il simbolo di ogni faccia φ in zona con (mnp), $(m'n'p')$ è sempre

esprimibile in funzione di questi simboli; secondo che la faccia φ, oppure $(m\,n\,p)$, oppure $(m'\,n'\,p')$, giace nel diedro supplementare delle altre due, abbiamo tre casi, cui rispettivamente corrispondono le tre seguenti forme di simboli per φ:

$$(\alpha) \qquad Hm+Km' \quad Hn+Kn' \quad Hp+Kp'$$

$$(\beta) \qquad Hm-Km' \quad Hn-Kn' \quad Hp-Kp'$$

$$(\beta') \qquad Km'-Hm \quad Kn'-Hn \quad Kp'-Hp.$$

Queste espressioni possono applicarsi nella ricerca della faccia (xyz) comune a due zone; infatti, date due coppie di faccie $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \end{pmatrix}$, la faccia comune alle due zone o è compresa nei diedri supplementari di ciascuna coppia, o è compresa in uno ed esterna all'altro, o è esterna a tutti due; nel primo caso serve per ambedue le zone la (α) e avremo

$$x = Hm + Km' = Ua + Va'$$

$$y = Hn + Kn' = Ub + Vb'$$

$$z = Hp + Kp' = Uc + Vc'$$

e dividendo i due membri di ogni equazione per una qualunque delle quattro incognite H, K, U, V, si risolveranno le equazioni rispetto ai rapporti di tre incognite alla quarta, ciò che ci dà subito gli indici Qx, Qy, Qz.

Nel secondo caso per una zona serve la (α), per l'altra una delle (β); nel terzo servon solo le (β) e si opera poi come nel 1° caso:

Es. del 1° caso: si conoscano in un cristallo di pirite, le coppie di faccie $\begin{pmatrix} 102 \\ 210 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 111 \\ 310 \end{pmatrix}$; posto $H=1$, si troverà $K=5$, $U=2$, $V=3$, e quindi:

$$\begin{array}{cc} 102 & 2(111) \\ 5(210) & 3(310) \\ \hline 11.5.2 & 11.5.2 \end{array}$$

Es. del 2° caso: si abbiano ora le coppie $\left(\begin{smallmatrix}321\\ \bar{3}\bar{2}\bar{1}\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}421\\ 210\end{smallmatrix}\right)$: si troverà analogamente:

$$\begin{array}{cc} 7(321) & 2(632) \\ \bar{3}\bar{2}\bar{1} & 2(210) \\ 4(632) & 4(421) \end{array}$$

e la faccia comune alle due zone sarà (632).

2° Io mi ero proposto di mostrare come gli sviluppi per faccie omologiche corrispondano alle *Complicazioni* di Goldschmidt, quando lo sviluppo parta da faccie opportunamente scelte: e come queste possano corrispondere ai nodi terminali del tratto di zona nel quale si verifica la complicazione; ma recenti e pregevoli lavori del Fedorow mi hanno preceduto.

Nel *Quinto contributo alla cristallografia zonale* (*) il sig. Fedorow mostra infatti che per *tratto di zona* (*Zonenstück* di Goldschmidt), deve intendersi un lato di un triangolo elementare, nello sviluppo di forme ideate dal Fedorow stesso (**) e che i punti nodali terminali del tratto di zona, corrispondendo a due vertici del triangolo, sono, come questi, soggetti a determinate condizioni. — Ora lo sviluppo esposto dal Fedorow è fondato sulla seguente proprietà:

" Da tre faccie date (in proiezione lineare o gnomonica) $a = (a_1 a_2 a_3)$, $b = (b_1 b_2 b_3)$, $c = (c_1 c_2 c_3)$, dedotto il simbolo della

$$a + b + c = (a_1 + b_1 + c_1 \quad a_2 + b_2 + c_2 \quad a_3 + b_3 + c_3),$$

il cui polo giace nel triangolo abc (fig. 5), se si congiunge questo polo coi vertici a, b, c mediante linee di zona, si ottengono nelle intersezioni di queste linee coi lati del triangolo abc, tre nuovi poli, i cui indici sono la somma degli indici corrispondenti alle estremità del lato su cui ogni polo si trova ".

Questa proprietà, verificata in casi semplici, vien dimostrata in generale coll'aiuto dei determinanti. Pertanto il triangolo abc vien diviso in 6 triangoli e sopra ognuno di questi si può ripe-

(*) " Zeitschr. für Kryst. ", 1901, XXX Bd., pag. 25.
(**) I Beitrag, " Zeitschr. für Kryst. ", 1900, XXXII, pag. 446.

tere la medesima operazione; si otterranno nuovi triangoli e ripetendo la costruzione su questi si può continuare ancora ad estendere lo sviluppo indefinitamente.

Ora è chiaro che sopra ognuno dei lati del triangolo dato *abc*, si ottiene uno sviluppo identico a quello che si ottiene nel modo esposto a pag. 138, dalle coppie di faccie *ab*, *bc*, *ac*; e lo stesso si può dire dei lati dei triangoli che via via si ottengono collo sviluppo di Fedorow; quindi possiamo concludere che lo sviluppo per faccie omologiche corrisponde alla legge delle complicazioni.

Forme armoniche. — 1° Consideriamo ora più particolarmente coppie di faccie appartenenti ad una stessa forma di cristallo; e, per fissar le idee, supponiamo di riferirci a forme del sistema monometrico.

Sia data quindi in generale la forma $\}mnp\{$ e supponiamo costruite tutte le possibili coppie delle sue faccie; il numero di queste coppie sarà eguale al numero delle combinazioni $C_{48,2}=1128$; e da esse risulteranno perciò altrettante faccie armoniche; queste faccie potranno riunirsi in gruppi, ognuno dei quali contenga faccie della stessa forma, essendo evidente che, se una coppia di faccie della forma data dà luogo a una faccia appartenente a una nuova forma, tutte le altre faccie di questa forma devon potersi ottenere da convenienti coppie di faccie della forma data; il numero di queste coppie, che dànno luogo a faccie di una stessa forma, sarà dunque eguale o al numero di faccie della forma o a un multiplo di esso.

Il numero dei gruppi formati colle 1128 faccie coinciderà col numero delle forme, differenti fra loro, derivate dalla forma data; e noi considereremo come differenti fra loro anche le forme i cui simboli differiscano solo pel coefficiente; tali forme si possono chiamare *forme simili*.

Tutte le forme derivate omologicamente da una stessa forma si chiameranno le sue *forme armoniche*.

Se poi sian date le forme $\}mnn\{$, $\}mnp\{$, $\}mn0\{$, ognuna di esse darà luogo a $C_{24,2}=276$ combinazioni di coppie di faccie e potremo, con considerazioni analoghe alle precedenti, dedurre da queste le rispettive forme armoniche.

Nel seguente prospetto sono indicate le forme armoniche

di $\}mnp\{$, $\}mnn\{$, $\}mmp\{$, $\}mn0\{$; accanto a ogni forma è posto il numero di volte che essa viene ottenuta; moltiplicando questo numero rispettivamente pel numero di faccie della forma e poi sommando tutti i prodotti, si ottiene evidentemente, per la 1ª colonna, 1128; per le altre, 276.

$\}mnp\{$	
$\frac{1}{2}\{m+n\ \ m+n\ \ 0\}$	2
„ $m+p\ \ m+p\ \ 0$	2
„ $n+p\ \ n+p\ \ 0$	2
„ $m-n\ \ m-n\ \ 0$	2
„ $m-p\ \ m-p\ \ 0$	2
„ $n-p\ \ n-p\ \ 0$	2
$m\ n\ 0$	1
$m\ p\ 0$	1
$n\ p\ 0$	1
$\frac{1}{2}\{2m\ \ n+p\ \ n-p\}$	1
„ $2n\ \ m+p\ \ m-p$	1
„ $2p\ \ m+n\ \ m-n$	1
„ $m+n\ \ n+p\ \ m-p$	1
„ $m+p\ \ m+n\ \ n-p$	1
„ $n+p\ \ m+p\ \ m-n$	1
$m\ 0\ 0$	4
$n\ 0\ 0$	4
$p\ 0\ 0$	4
$\frac{1}{2}\{m+n\ \ m-n\ \ 0\}$	2
„ $m+p\ \ m-p\ \ 0$	2
„ $n+p\ \ n-p\ \ 0$	2
„ $2m\ \ n-p\ \ n-p$	1
„ $2n\ \ m-p\ \ m-p$	1
„ $2p\ \ m-n\ \ m-n$	1
„ $m+n\ \ n-p\ \ m-p$	1
„ $m+p\ \ m-n\ \ n-p$	1
„ $n+p\ \ m-p\ \ m-n$	1
„ $m-n\ \ m-p\ \ n-p$	1
„ $2m\ \ n+p\ \ n+p$	1
„ $2n\ \ m+p\ \ m+p$	1
„ $2p\ \ m+n\ \ m+n$	1
„ $m+n\ \ m+p\ \ n+p$	1
$0\ 0\ 0$	24

$\}mnn\{$	
$m\ 0\ 0$	2
$n\ 0\ 0$	2
$\frac{1}{2}\{m+n\ \ m+n\ \ 0\}$	2
„ $m-n\ \ m-n\ \ 0$	2
$n\ n\ 0$	1
$m\ n\ 0$	1
$\frac{1}{2}\{m+n\ \ m-n\ \ 0\}$	2
„ $2n\ \ m+n\ \ m+n$	1
„ $2n\ \ m+n\ \ m-n$	1
„ $2n\ \ m-n\ \ m-n$	1
$0\ 0\ 0$	12

$\}mmp\{$	
$m\ 0\ 0$	4
$p\ 0\ 0$	2
$\frac{1}{2}\{m+p\ \ m+p\ \ 0\}$	2
„ $m-p\ \ m-p\ \ 0$	2
$m\ m\ 0$	1
$m\ p\ 0$	1
$\frac{1}{2}\{m+p\ \ m-p\ \ 0\}$	2
„ $2m\ \ m+p\ \ m+p$	1
„ $2m\ \ m+p\ \ m-p$	1
„ $2m\ \ m-p\ \ m-p$	1
$0\ 0\ 0$	12

$\}mn0\{$	
$m\ 0\ 0$	2
$n\ 0\ 0$	2
$\frac{1}{2}\{m+n\ \ m+n\ \ 0\}$	1
„ $m-n\ \ m-n\ \ 0$	1
„ $m\ m\ 0$	2
„ $n\ n\ 0$	2
„ $2m\ \ n\ n$	1
„ $2n\ \ m\ m$	1
„ $m+n\ \ m-n\ \ 0$	1
„ $m+n\ \ m\ \ n$	1
„ $m-n\ \ m\ \ n$	1
$0\ 0\ 0$	12

Il prospetto mostra che, prescindendo dalle faccie all'infinito 000, ogni esacisottaedro ha 32 forme armoniche differenti fra loro; ogni tetracisesaedro ne ha 11; e le altre forme di 24 faccie ne hanno 10. (Ritenendo eguali fra loro le forme simili, ogni esacisottaedro avrebbe 25 forme armoniche e ogni forma di 24 faccie ne avrebbe 7).

Tutte le forme hanno per armonici l'esaedro e il rombododecaedro. Sono armonici di $\}mnp\{$ 12 cubi e 12 rombododecaedri; e si osservi che coi coefficienti dei loro simboli si possono costruire i simboli di tutte le altre forme armoniche di $\}mnp\{$. Analogamente si hanno 6 cubi e 5 rombododecaedri armonici di $\}mnn\{$ e $\}mmp\{$; e tutti i simboli delle altre forme armoniche si posson costruire coi coefficienti di $\}100\{$, $\}110\{$. Lo stesso dicasi dei 4 cubi e dei 6 rombododecaedri armonici di $\}mn0\{$.

Delle forme armoniche di una forma data alcune hanno le loro faccie tangenti a spigoli *reali* della forma, altre le hanno tangenti a spigoli *virtuali*. Sono del 1° genere:

$\}m \quad n \quad 0\{, \frac{1}{2}\}2mn+pn+p\{, \frac{1}{2}\}m+n\,m+n\;2p\{$ armoniche di $\}mnp\{$;

$\}m \quad n \quad 0\{, \quad — \quad , \frac{1}{2}\}m+n\,m+n\;2n\{$ „ „ $\}mnn\{$;

$\}m \quad n \quad 0\{, \frac{1}{2}\}2m\,m+p\,m+p\{, \quad — \quad$ „ „ $\}mmp\{$;

$\frac{1}{2}\}m+n\,m+n\,0\{, \frac{1}{2}\}2m \quad n \quad n\{, \quad — \quad$ „ „ $\}mn0\{$:

da cui si vede che ogni icositetraedro ha per armonico del 1° genere un triacisottaedro e ogni triacisottaedro ha un icositetraedro; che l'esacisottaedro ammette un icositetraedro e un triacisottaedro; la forma $\frac{1}{2}\}2n \;\; m+p \;\; m+p\{$ è sua armonica del 2° genere e può essere un triacisottaedro o un icositetraedro secondo che $m+p \gtrless 2n$; quando poi $m+p=2n$, l'esacisottaedro ha per armonico l'ottaedro. Osservazione analoga permette la forma $\frac{1}{2}\}2n\,m\,m\{$ armonica di $\}mn0\{$, potendo essere $2n \gtrless m$.

2° Le cose ora dette mostrano che dai valori numerici particolari assegnabili agli indici m, n, p, dipendono le relazioni armoniche esistenti fra la forma data $\}mnp\{$ e le sue armoniche.

Una data armonica, per es. $\}m-p \quad m-n \quad n-p\{$, in cui $m>n>p$, sarà in generale un esacisottaedro; ma può essere un icositetraedro quando $m-n=n-p$. Così dalla forma $\}321\{$ si ha l'armonica $\}211\{$, mentre la corrispondente armonica di $\}421\{$ è $\}321\{$. Se si imporranno condizioni alla variabilità di una forma $\}m\,n\,p\{$, rimarrà condizionata la variabilità delle sue armoniche e perciò possiamo proporci di ricercare le proprietà armoniche di un dato tipo di forme.

Supponiamo ad esempio che gli indici della forma data $\}mnp\{$ soddisfino alla condizione particolare $m=n+p$. In tal caso sarà

$$\}mnp\{ \equiv \}n+p \quad m-p \quad m-n\{$$

e, se non tenessimo conto del coefficiente $\frac{1}{2}$, potremmo dire che $\}mnp\{$ è armonica di sè stessa; ma invece diremo, più esattamente, che la forma $\frac{1}{2}\cdot\}n+p \; m-p \; m-n\{$, armonica di $\}mnp\{$, è simile ad $\}mnp\{$. Reciprocamente si può affermare che se $\}mnp\{$ ha per armonica una forma simile, i suoi indici soddisfano alla condizione $m=n+p$: infatti una forma armonica di $\}mnp\{$, simile ad essa, deve avere il simbolo del tipo

$$\frac{1}{2}\,\}m\pm n \quad m\pm p \quad n\pm p\{$$

in cui solo il 1° indice può essere eguale a p, solo il 2° può essere eguale ad n, solo il 3° può essere eguale ad m. E dovendo essere $m>n>p$, potrà essere soltanto

$$m-n=p, \; m-p=n, \; n+p=m$$

le quali tre espressioni coincidono colla condizione cercata.

Nel caso che fosse $n=p$ dovrebbe essere $m=2n$, e poichè allora $\}2n \; n \; n\{ \equiv \}211\{$, ne segue che fra gli icositetraedri soltanto $\}211\{$ ha per armonica una forma simile a sè stesso. Se fosse $m=n$, dovrebbe essere $p=0$ e quindi solo $\}110\{$ ha per armonica una forma simile. Tutte le altre forme soddisfacenti alla condizione posta sono esacisottaedri (321, 431, 532, ...).

Le tre espressioni identiche:

$$p = m - n$$
$$n = m - p$$
$$m = n + p$$

sommate due a due, dànno luogo a 3 forme armoniche di $\}mnp\{$ tutte soddisfacenti alla condizione data

$$\frac{1}{2}\}n+p\ m-p\ m-n\{,\ \frac{1}{2}\}m+p\ n+p\ m-n\{,\ \frac{1}{2}\}m+n\ n+p\ m-p\{.$$

La prima di esse, come abbiamo visto, è simile ad $\}mnp\{$ e può dar luogo a una nuova forma simile a sè stessa e ad $\}mnp\{$; anche le altre due dànno luogo a una forma simile ad $\}mnp\{$, e infatti basta far la differenza degli indici due a due per ottenere il simbolo $\}mnp\{$. Così ad es. $\}321\{$ avrà per armoniche $\frac{1}{2}\}321\{$, $\frac{1}{2}\}431\{$, $\frac{1}{2}\}532\{$; le quali hanno tutte per armonica $\frac{1}{4}\}321\{$

$$\begin{tikzcd}
 & 321 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\frac{1}{2}.532 \arrow[dr] & \frac{1}{2}.321 \arrow[d] & \frac{1}{2}.431 \arrow[dl] \\
 & \frac{1}{4}.321 &
\end{tikzcd}$$

In generale (convenendo di dire una forma B compresa armonicamente fra le forme A e C, quando $A \to B \to C$), potremo dire che ogni forma che segue la condizione $m = n + p$ è compresa armonicamente tra due forme simili fra loro e soddisfacenti alla medesima condizione.

3° Quando interessi di conoscere non soltanto le forme armoniche di una forma data, ma anche tutte le forme di cui essa è armonica, si può ancora ricorrere al prospetto della pag. 12, ritenendo le quantità m, n, p come incognite e cercando le condizioni cui esse debbono soddisfare affinchè il simbolo di ogni armonica di $\}mnp\{$ possa coincidere col simbolo della forma data. Per ogni armonica di $\}mnp\{$ che si considera, tali condizioni o

non si potranno soddisfare per nessun valore intero e positivo di m, n, p, oppure si potrà in un sol modo, oppure in infiniti modi. Se per es. è data la forma $\}211\{$, le armoniche di $\}mnp\{$ che posson coincidere con essa sono le seguenti:

		Condizione	Quindi	
$\}211\{$	$\equiv\}2m\ n+p\ n-p\{$	$m=n,\ p=0$	$\}110\{ \rightarrow \}211\{$	
„	$\equiv\}m+n\ n-p\ m-p\{$	„ „	„ $\rightarrow$ „	
„	$\equiv\}m+n\ n+p\ m+p\{$	„ „	„ $\rightarrow$ „	
„	$\equiv\}m+p\ m-n\ n-p\{$	$m=2n$ „	$\}210\{ \rightarrow$ „	
„	$\equiv\}n+p\ m-p\ m-n\{$	„ „	„ $\rightarrow$ „	
„	$\equiv\}2^n_p\ m+{}^p_n\ m-{}^p_n\{$	$m=3n=3p$	$\}311\{ \rightarrow$ „	
„	$\equiv\}2^n_p\ m-{}^p_n\ m-{}^p_n\{$	$m=n+p$	211,321,431,...;532,752,...; 743,853,...;...	
„	$\equiv\}2m\ n+p\ n+p\{$	„	„ „	
„	$\equiv\}m+n\ n+p\ m-p\{$	$m=n+2p$	100,311,421,531,...; 732, 952; ...; ...	$\rightarrow\}211\{$
„	$\equiv\}n+p\ m+p\ m-n\{$	$m=p+2n$	311,521,731,...;832,12·5·2...;	
„	$\equiv\}m-n\ m-p\ n-p\{$	$m=2n-p$	321,521,741,...;432,852,...;...	

e nessun'altra armonica di $\}mnp\{$ può coincidere con $\}211\{$.

Mediante il prospetto di pag. 144 si possono in generale scoprire i legami armonici esistenti fra due o più forme; e se noi immaginiamo che queste forme appartengano a un medesimo sviluppo, ottenuto con una legge determinata, potremo ricercare in quale dipendenza i legami armonici che vincolano le forme combinate, stiano colla legge fondamentale dello sviluppo. Questo studio è del massimo interesse quando si abbiano in vista gli sviluppi di forme di cristallo offerti dalla natura e merita un lungo e ponderato esame. Riserbandomi di parlarne in una prossima Memoria, chiuderò la presente Nota con un'ultima osservazione.

Se immaginiamo uno sviluppo di forme a indici interi che, partendo da quelle a indici non diversi da 1 e 0, proceda per fasi verso forme a indici sempre più alti e complessi, in questo

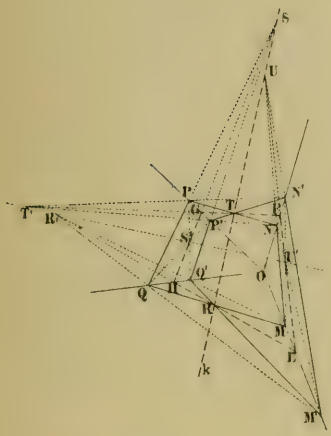


Fig. 1

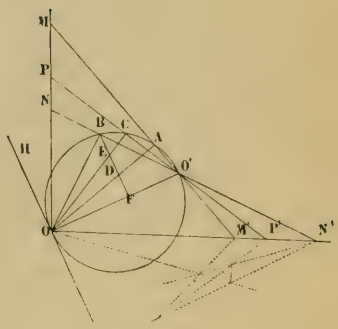


Fig. 3

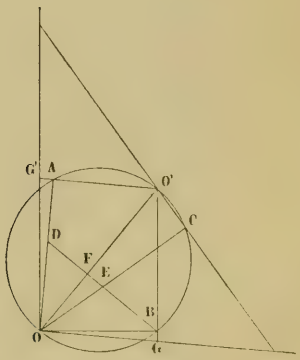


Fig. 4

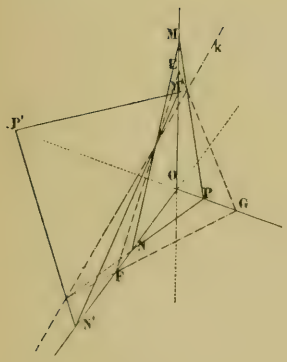


Fig. 2

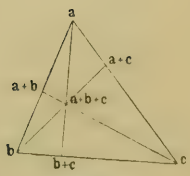


Fig. 5

sviluppo le forme armoniche di una forma qualunque si troveranno tanto più vicine ad essa, quanto più piccoli sono i valori dei suoi indici; e perciò considerando una combinazione di forme appartenenti alle prime fasi dello sviluppo, esisteranno fra queste forme più numerosi legami armonici che non tra forme appartenenti alle fasi ulteriori dello sviluppo. Se dunque si potrà asserire che alla reale esistenza di combinazioni di forme presiedono legami armonici, si dovrà arguire che la maggior probabilità di numerosi legami si avrà in generale quando le forme combinate hanno indici piccoli e quindi queste forme debbono avere la maggior probabilità di esistenza. Dalla completa verificazione di questa ipotesi discenderebbe che la legge di Haüy è una conseguenza del principio fondamentale dell'omologia.

Museo e Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studii super. in Firenze. Novembre 1902.

Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi.

Nota del Dott. ARTURO MARONI, a Pisa.

1. — Sia F una superficie algebrica possedente due fasci, K_1 e K_2, di curve algebriche unisecantisi. Il primo di tali fasci, considerate in esso le curve come elementi, sia di genere π_1, il secondo di genere π_2: per modo che saranno rispettivamente π_2, π_1 i generi delle curve di K_1 e di K_2.

Ci proponiamo di esprimere i caratteri invariantivi della superficie F. A questo scopo supporremo di aver preparata la F stessa in modo che non contenga curve eccezionali, il che è possibile se escludiamo che essa sia riferibile ad una rigata.

Nel fascio K_1 si consideri una $g^1_{m_1}$ e nel fascio K_2 una $g^1_{m_2}$, poi si riferiscano proiettivamente i gruppi di curve di queste due serie lineari rispettivamente alle generatrici g e alle direttrici d di una quadrica Q di S_3. Preso un punto A sulla quadrica, consideriamo le rette g e d passanti per esso e i gruppi

di curve delle serie $g^1_{m_1}$, $g^1_{m_2}$ che loro corrispondono: questi si incontrano in $m_1 m_2$ punti della F, che diremo corrispondenti del punto A. Così possiamo considerare la quadrica Q come una quadrica $m_1 m_2$-upla riferita birazionalmente alla superficie F, senza elementi eccezionali.

Determiniamone la curva di diramazione. È facile vedere che, essendo la F priva di curve eccezionali, due fra gli $m_1 m_2$ punti della F corrispondenti ad un punto A della Q vengono a coincidere allora e solo allora che uno dei due gruppi relativi delle serie $g^1_{m_1}$, $g^1_{m_2}$ viene ad avere un elemento doppio. Ne segue che la curva di diramazione cercata è costituita dalle $2m_1+2\pi_1-2$ rette g corrispondenti ai gruppi della $g^1_{m_1}$ aventi un elemento doppio, e dalle analoghe $2m_2+2\pi_2-2$ rette d.

2. — Si consideri, sulla quadrica multipla Q, la rete di curve $|C|$ determinata dalle coniche passanti per un punto T arbitrario. La jacobiana di questa rete è costituita dalle rette, g^* e d^*, passanti per T (ciascuna contata $m_1 m_2$ volte) e dalla curva di diramazione sopra determinata.

Il sistema canonico sulla Q si ottiene togliendo dal sistema $|C_j|$, individuato da tale jacobiana, tre volte il sistema individuato dalla rete $|C|$ (*), il quale ultimo si può anche considerare individuato dalla coppia di rette g^* e d^*. Per ottenere tale sistema canonico basta dunque togliere dal sistema individuato dalla curva di diramazione, due volte i sistemi individuati dalle generatrici g e dalle direttrici d. Il sistema corrispondente, cioè il sistema canonico sulla F, è dunque il sistema somma delle due serie lineari che si ottengono togliendo dalle serie lineari dei fasci K_1 e K_2 individuate dai gruppi degli elementi doppi delle $g^1_{m_1}$, $g^1_{m_2}$, rispettivamente due volte le $g^1_{m_1}$, $g^1_{m_2}$ medesime. Concludiamo che (**):

Il sistema canonico della superficie F *si ottiene aggiungendo la serie canonica del fascio* K_1 *alla serie canonica del fascio* K_2.

(*) V. Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1901.

(**) V. il lemma sulle curve adoperato dal prof. Enriques al § 18 della nota sopra citata.

3. — Veduto ciò si calcola subito il genere delle curve canoniche, cioè il genere lineare $p^{(1)}$ della superficie. Si ha:

$$p^{(1)} = (2\pi_1 - 2)(\pi_2 - 1) + 1 + (2\pi_2 - 2)(\pi_1 - 1) + \\ + 1 + (2\pi_1 - 2)(2\pi_2 - 2) - 1$$

cioè:

$$p^{(1)} = 8(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) + 1. \tag{1}$$

Ponendo mente che i fasci K_1 e K_2 non possono contenere curve con punti doppi (altrimenti la F conterrebbe curve eccezionali), mediante una formula dei proff. Enriques e Castelnuovo (*) possiamo calcolare, servendoci di uno qualunque dei due fasci, l'invariante I di Zeuthen-Segre, il quale risulta:

$$I = 4(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) - 4. \tag{2}$$

Poichè la F è priva di curve eccezionali, abbiamo la relazione:

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9$$

dalla quale, sostituendo per I e per $p^{(1)}$ i valori trovati, si ricava:

$$p_a = (\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) - 1. \tag{3}$$

Il confronto delle formole (1) e (3) ci dà la relazione:

$$p^{(1)} = 8 p_a + 9.$$

4. — Quando i fasci K_1 e K_2 sono ambedue ellittici (nel qual caso la superficie F è una di quelle determinate dal prof. Amaldi (**)), allora, rifacendo il ragionamento del n° 2,

(*) *Sopra alcune quistioni fondamentali, ecc.*, " Annali di Mat. ", t. VI, s. III, § 6.

(**) Il prof. Amaldi, in una sua nota pubblicata recentemente nei " Rend. dei Lincei ", determina le superficie algebriche possedenti più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, e dimostra che tali superficie sono tutte e sole quelle possedenti due fasci (e quindi necessariamente anche altri) di curve razionali od ellittiche unisecantisi.

vediamo che il sistema canonico della F si riduce ad una curva di ordine zero (per cui $p_g = 1$). In tal caso il $p^{(1)}$ non può più calcolarsi come al n° 3. Ma se consideriamo l'espressione del $p^{(1)}$ data p. es. mediante il genere π di un sistema lineare e i generi π', π'' del suo aggiunto e del suo secondo aggiunto:

$$p^{(1)} = 1 + (\pi - \pi') - (\pi' - \pi'')$$

poichè sulla F ogni sistema è ora aggiunto di sè stesso, si ottiene:

$$p^{(1)} = 1.$$

Valore dato anche dalla (1). Vale quindi, anche per queste superficie, la (3), la quale dà:

$$p_a = -1.$$

5. — Ritorniamo alla nostra superficie F generale e procuriamo di determinare la dimensione del sistema completo $|C|$ ottenuto sommando una serie lineare $g_{m_1}^{\rho_1}$ di K_1 ad una serie lineare $g_{m_2}^{\rho_2}$ di K_2.

Cominciamo dall'osservare che se una di queste due serie lineari ha un elemento (curva) fisso, tale curva risulta fissa anche per il sistema somma. Infatti, sia ad es.: k_1 una curva di K_1 fissa per la $g_{m_1}^{\rho_1}$: il sistema $|C|$ sega su ogni curva di K_2 appunto la serie $g_{m_1}^{\rho_1}$, quindi tutte le curve di $|C|$ debbono passare per il punto ove la considerata curva di K_2 è segata dalla k_1; e da ciò segue che la k_1 è fissa per $|C|$.

Sia ora $G_1 = (k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_1^{(m_1)})$ un gruppo della $g_{m_1}^{\rho_1}$ ed aggiungiamo alla $g_{m_2}^{\rho_2}$ successivamente le curve di questo gruppo nell'ordine in cui le abbiamo scritte (che del resto è qualsiasi). Finchè le curve sommate individuano nel fascio K_1 una g^0, la dimensione del sistema somma rimane sempre uguale a ρ_2.

Supponiamo che il gruppo $(k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_1^{(\mu_1)})$ $(\mu_1 \leq m_1)$ individui una serie $g_{\mu_1}^1$, mentre il gruppo $(k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_1^{(\mu_1-1)})$ individui una $g_{\mu_1-1}^0$, e vediamo quale è la dimensione del sistema ottenuto aggiungendo alla $g_{m_2}^{\rho_2}$ le curve $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_1^{(\mu_1)}$. Tale

sistema sega sulla $k_1^{(\mu_1)}$ la serie $g_{m_2}^{\varrho_2}$, mentre le curve di esso passanti per la $k_1^{(\mu_1)}$ medesima sono ∞^{ϱ_2}; detta quindi $r^{(1)}$ la sua dimensione, abbiamo:

$$r^{(1)} - \rho_2 - 1 = \rho_2; \qquad \text{cioè:} \qquad r^{(1)} = 2\rho_2 + 1.$$

Seguitando ad aggiungere le curve k_1, finchè non ne abbiamo sommate tante che individuino nel fascio K_1 una serie ∞^2, la dimensione del sistema somma rimane sempre uguale ad $r^{(1)}$. La prima volta che il gruppo delle curve k_1 sommate alla $g_{m_1}^{\varrho}$ individui nel fascio K_1 una g^2, avvenga quando si è aggiunto la curva $k_1^{(\mu_2)}$ $(\mu_1 < \mu_2 \leq m_1)$. Il sistema così ottenuto sega sulla $k_1^{(\mu_2)}$ stessa la serie $g_{m_2}^{\varrho_2}$, e le curve di tale sistema passanti per la $k_1^{(\mu_2)}$ sono $\infty^{r^{(1)}}$; detta quindi $r^{(2)}$ la sua dimensione, abbiamo:

$$r^{(2)} - \rho_2 - 1 = r^{(1)} = 2\rho_2 + 1; \qquad \text{cioè:} \qquad r^{(2)} = 3\rho_2 + 2.$$

Così proseguendo si vede subito, col mezzo dell' induzione completa, che la dimensione r del sistema ottenuto aggiungendo tutto il gruppo G_1 (cioè del sistema $|C|$) è data da:

$$r = (\rho_1 + 1)\rho_2 + \rho_1 = \rho_1\rho_2 + \rho_1 + \rho_2. \tag{4}$$

6. — In particolare, la dimensione $p_g - 1$ del sistema canonico si otterrà, per quanto abbiamo veduto al n° 2, ponendo nel secondo membro della (4) $\rho_1 = \pi_1 - 1$ e $\rho_2 = \pi_2 - 1$; quindi:

$$p_g - 1 = (\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) + \pi_1 - 1 + \pi_2 - 1$$

da cui:

$$p_g = \pi_1\pi_2 \ (*). \tag{5}$$

(*) Questa formula si trova nel 1° volume (pag. 197) della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, di Picard et Simart. Ivi essa è dedotta con metodo trascendente, determinando, cioè, il numero degli integrali doppi di prima specie linearmente indipendenti che appartengono alla superficie.

Il sistema i-canonico sulla F si ottiene aggiungendo alla serie i-upla della serie canonica del fascio K_1, la serie i-upla della serie canonica del fascio K_2. Queste due serie hanno rispettivamente le dimensioni:

$$\rho_1 = i(2\pi_1 - 2) - \pi_1; \qquad \rho_2 = i(2\pi_2 - 2) - \pi_2.$$

Sostituendo questi valori nella (4) si ottiene l'espressione dello i-genere P_i, che risulta:

$$P_i = (2i-1)^2(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) \qquad (i > 1) \tag{6}$$

Tenendo conto delle (1) e (3) si hanno anche le espressioni:

$$P_i = (2i-1)^2(p_a + 1) \qquad (i > 1)$$

e

$$P_i = \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + p_a + 1 \qquad (i > 1).$$

Evidentemente le formole (5) e (6) non valgono quando uno dei due fasci sia ellittico. Ma si vede subito che se uno solo dei due fasci, ad es.: K_1, è ellittico, si ha (*):

$$p_g = \pi_2; \; P_i = i(2\pi_2 - 2) - \pi_2 + 1 = (2i-1)(\pi_2 - 1) \quad (i > 1).$$

Se poi ambedue i fasci sono ellittici, come abbiamo già osservato, è $p_g = 1$ ed anche si ha $P_i = 1$ per tutti i valori di i.

(*) A proposito di queste superficie, vedi il lavoro del prof. Enriques: *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (" Atti della Acc. dei Lincei ", 1898).

Sul moto di un corpo rigido.

Nota di C. BURALI-FORTI in Torino.

Non può essere sfuggito ai cultori della matematica come le più semplici proprietà di Geometria differenziale e di Meccanica esigano bene spesso dimostrazioni lunghe e complicate: e ciò non perchè così richieda la natura della questione, ma a causa degli strumenti di ricerca di cui si fa uso. Più volte ho avuto occasione di far vedere con esempi (*) come il metodo di Grassmann rende le dimostrazioni delle citate proprietà di una semplicità pari a quella del loro enunciato. Nella speranza di far cosa grata a coloro che tendono continuamente e costantemente a semplificare (**), nella scuola, le forme espositive, porto ora un altro esempio relativo alla Meccanica. Il moto generale

(*) C. Burali-Forti, *Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva* (" Rend. Circ. Palermo „, 1896, 1897, 1901). — *Introduction à la Géométrie différentielle* (Gauthier-Villars, 1897). — *Sopra alcune questioni di Geometria differenziale* (Palermo c. s., 1898). — *Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques* (" Zeitschrift für Mathematik und Physik „, 1899). — *Sur les rotations* (" Bulletin des Sciences mathématiques „, 1899). — *Sopra alcuni punti singolari delle curve* (" Atti Acc. Torino „, 1901). — *Le formule di Frenet per le superfici* (Idem, 1902). — *Applicazioni del metodo di Grassmann* (" Le matematiche pure e applicate „, vol. I, II). — *Sulle radiali* (Palermo, c. s., 1902). — *Ingranaggi piani* (" Atti Acc. Torino „, 1902). — *Formulaire Mathématique par G. Peano* (§§ 91, 92, 93; 1902). — *Sulle linee funicolari* (" Le matematiche..... „, 1902). — *I vettori nella Geometria elementare* (" Il Pitagora „, Palermo, 1903).

(**) Si intende che tale semplificazione richiede la conoscenza del metodo di Grassmann. E poichè tale metodo; è basato sulle più semplici nozioni di Geometria elementare; fa uso di un algoritmo identico a quello dell'analisi; contiene come casi particolari *tutti* gli altri metodi noti, *coordinate, omografie, baricentri, equipollenze, quaternioni*; è puramente geometrico in ogni suo particolare; tratta con la stessa semplicità questioni di Geometria finita o infinitesimale e di Meccanica; — non si comprende come esso non sia ancora sostituito agli ordinari metodi straordinariamente complicati.

di un corpo rigido ha proprietà semplicissime; eppure le trattazioni analitiche o geometriche ordinarie sono di una complicazione eccessiva; da una parte i *moti relativi*, dall' altro i *momenti*, rendono, a colui che inizia i suoi studi, grandemente difficile ciò che è grandemente facile. Il metodo di Grassmann permette di sopprimere i moti relativi, poichè ogni ente geometrico può esser considerato indipendentemente da elementi fissi; nella mia nota *Ingranaggi piani,* ho appunto ottenuti tutti i possibili ingranaggi, con calcoli elementari, e sopprimendo ogni considerazione di moti relativi. Lo stesso metodo permette di sopprimere i *momenti* (*) poichè la condizione di eguaglianza di due formazioni geometriche dice, in sostanza, che due certi momenti sono eguali: e non si creda che con la soppressione del termine momento si venga a perdere un qualche concetto meccanico; si perderà solamente una complicazione di forma con grande vantaggio della semplicità e della chiarezza.

1. — Se P, Q sono due punti qualunque del solido (o corpo rigido), la loro distanza non varia col tempo t, cioè

$$(P-Q)^2 = \text{cost},$$

che derivata rispetto a t dà (p. 67) (**)

$$(1) \quad (P-Q)\,|\,(P'-Q') = 0, \quad \text{ovvero} \quad (P-Q)\,|\,P' = (P-Q)\,|\,Q',$$

la quale esprime che (p. 29):

(*) Ciò non è egualmente possibile facendo uso dei quaternioni (Cfr. *Formulaire Mathématique*, l. c., p. 285) o dei soli vettori, bivettori e trivettori di Grassmann.

(**) Le notazioni (p. ...) si riferiscono al mio libro: *Introduction à la Géometrie différentielle.* È appena necessario ricordare che: ogni punto P di un solido (o corpo rigido) in movimento, è una determinata funzione della variabile numerica t, *tempo*: i vettori $P' = \frac{dP}{dt}$, $P'' = \frac{d^2P}{dt^2}$ sono, rispettivamente la *velocità* e l'*accelerazione* (*geometrica*, vale a dire con *direzione*, *verso* e *grandezza*) del punto P nel tempo t: se $P' \neq 0$ allora il vettore P' è parallelo alla tangente in P alla traiettoria di P; e se $P'P'' \neq 0$ allora il bivettore $P'P''$ dà la giacitura del piano osculatore in P alla stessa traiettoria (p. 65, 78).

Le proiezioni delle velocità dei punti P, Q, *nel tempo* t, *sulla retta* PQ *sono eguali.*

Risulta di qui l'ordinaria costruzione grafica della velocità di un punto qualunque essendo date le velocità di tre punti, non collineari del corpo (*).

(*) Le condizioni d'invariabilità delle aree e volumi sono

$$\{(Q-P)(R-P)\}^2 = \text{cost}, \qquad PQRS = \text{cost},$$

ove P, Q, R, S sono punti qualunque del corpo.

Derivando la prima si ha

$$(Q-P)(R-P) \mid \{(Q-P)(R'-P') + (Q'-P')(R-P)\} = 0,$$

che assume le due forme

$$(Q-P)(R-P) \mid \{(Q-R)P' + (R-P)Q' + (P-Q)R'\} = 0,$$
$$(Q-P)(R-P) \mid \{P(Q'-R') + Q(R'-P') + R(P'-Q')\} = 0,$$

le quali esprimono che:

La somma delle proiezioni sul piano PQR *dei parallelogrammi formati con un lato del triangolo e la velocità del vertice opposto è nulla.*

La resultante delle forze applicate ai vertici del triangolo PQR *e i cui vettori sono le differenze delle velocità agli estremi dei lati opposti è una coppia il cui asse momento è parallelo al piano* PQR.

Dall'identità (p. 48)

$$(PQR \,.\, \omega)S = PQRS \,.\, \omega + PQR$$

si ha per derivazione, e tenendo conto della seconda condizione:

$$\frac{d}{dt}\{S(PQR \,.\, \omega)\} = \frac{d}{dt}(PQR)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\{S(PQR \,.\, \omega)\} = \frac{d^2}{dt^2}(PQR),$$

le quali dimostrano che:

I piani paralleli al piano PQR, *e invariabilmente collegati al solido, descrivono inviluppi le cui caratteristiche, al tempo* t, *sono complanari e i cui punti di regresso sono collineari* (p. 84, 85).

In modo analogo il lettore può ottenere molte altre proprietà. Non vogliamo tralasciare di indicare come dalla considerazione dell'*omografia* σ, tale che

$$\sigma P = P + \frac{d^n P}{dt^n},$$

si possano trarre molte proprietà del moto, anche supposto il corpo non rigido. In particolare per $n = 2$ si ha il *centro delle accelerazioni*, ecc.

2. — Sieno P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, quattro punti del solido tali che i vettori

$$I_i = P_{i+1} - P_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

sieno *unitari* e *due a due ortogonali*. Si hanno allora le relazioni

$$I_i^2 = 1, \ (i = 1, 2, 3); \ I_i | I_j = 0, \ (i, j = 1. 2, 3; \ i \neq j) \qquad \text{(p. 29)}$$

che per derivazione dànno

$$I_i' | I_i = 0; \qquad I_i' | I_j + I_i' | I_i = 0:$$

quindi, se essendo i, j, k, una permutazione dei numeri 1, 2, 3, si pone

$$I_i' | I_j = - I_j' | I_i = m_k \ (\text{per } i = 2, 3, 1, \text{ e } j = 3, 1, 2)$$

si avrà, ricordando che

$$I_i' = (I_i' | I_1) I_1 + (I_i' | I_2) I_2 + (I_i' | I_3) I_3,$$
$$I_1' = m_3 I_2 - m_2 I_3, \ I_2' = m_1 I_3 - m_3 I_1, \ I_3' = m_2 I_1 - m_1 I_2,$$

dalle quali

$$m_1 I_1' + m_2 I_2' + m_3 I_3' = 0,$$

la quale esprime che: *i vettori* I_i' *sono complanari* (*).

Se, ora, P è un punto qualunque del solido, sono determinate (p. 13) le *costanti* x_i, $i = 1, 2, 3$, tali che

$$P = P_1 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3:$$

(*) Cfr. la mia nota: *Le formule di Frenet per le superfici*, p. 9. Il piano che contiene i vettori I_i' è parallelo al bivettore

$$I_1' I_2' = m_3 \} m_1 I_2 I_3 + m_2 I_3 I_1 + m_3 I_1 I_2 \{$$

cioè tale piano è normale al vettore (supposto $I_1 I_2 I_3$ positivo)

$$m_1 I_1 + m_2 I_2 + m_3 I_3$$

parallelo al vettore V che definiamo nel n° 3.

essendo dunque O un punto fisso arbitrario si avrà

$$O + P' = (O + P_1') + x_1 I_1' + x_2 I_2' + x_3 I_3',$$

ed essendo I_i', $i = 1, 2, 3$, vettori complanari:

Gli estremi, con una stessa origine, delle velocità di tutti i punti del corpo, nel tempo t, *sono punti complanari.*

Per un punto qualunque P della retta generica $P_1 I_1$ si ha $P = P_1 + x_1 I_1$, con x_1 costante, e quindi da $O + P' = O + P_1' + x_1 I_1'$ risulta che:

Gli estremi, con una stessa origine, delle velocità dei punti di una retta, nel tempo t, *sono collineari.*

3. — Per il luogo dei punti $O + P'$ occorre considerare i due casi seguenti:

A. — *Esistono tre punti* P_1, P_2, P_3 *del solido tali che, nel tempo* t, *i punti* $O + P_i'$, $i = 1, 2, 3$, *non sono collineari.*

B. — *Comunque si fissino tre punti* P_i *del solido sempre si ha che, nel tempo* t, *i punti* $O + P_i'$ *sono collineari;* ovvero, il che equivale; *nel tempo* t *le velocità di due punti qualunque del corpo sono parallele.*

Esaminiamo subito il caso B. Se P, P_i, $i = 1, 2, 3$, sono punti non complanari, allora $O + P'$, $O + P_i'$ sono collineari, cioè i tre vettori $P' - P_i'$ sono paralleli; ma essendo questi (n° 1) normali alle tre rette, non complanari, PP_i, deve essere $P' - P_i' = 0$; cioè:

Se nel tempo t *le velocità di due punti qualunque del corpo sono parallele, allora tutti i punti hanno la stessa velocità e il moto del corpo nel tempo* dt *è una traslazione istantanea.*

Consideriamo ora il caso A e siano P_1, P_2, P_3 i tre punti dei quali abbiamo affermata l'esistenza. Il luogo dei punti $O + P'$ è il piano

$$\begin{aligned}\alpha = (O + P_1')(O + P_2')(O + P_3') = \\ O\{P_2'P_3' + P_3'P_1' + P_1'P_2'\} + P_1'P_2'P_2' = \\ O(P_2' - P_1')(P_3' - P_1') + P_1'P_2'P_3'.\end{aligned}$$

Da queste espressioni risulta che il piano α è ben determinato e contiene o no il punto O secondo che il trivettore $P_1'P_2'P_3'$ è nullo o no. Dal n° 2 risulta pure che il piano α dipende da t e dal moto, ma è affatto indipendente dai punti P_i.

Il vettore unitario

$$(2) \qquad V = \left| \frac{\alpha\omega}{\mathrm{mod}(\alpha\omega)} = \right| \frac{P_2'P_3' + P_3'P_1' + P_1'P_2'}{\mathrm{mod}(P_2'P_3' + P_3'P_1' + P_1'P_2')}$$

(ove ω è il *trivettore unitario* (p. 18)) dà la *direzione* della normale al piano α che è pure indipendente dai punti P_i. Si noti, però, che il *verso* di V dipende dalla *successione* P_1, P_2, P_3.

Se P è un punto qualunque del solido, $O + P'$ sta in α cioè

$$\alpha(O+P') = O\}P'(P_2'P_3' + P_3'P_1' + P_1'P_2') - P_1'P_2'P_3'\{ = 0,$$

vale a dire

$$(3) \qquad P'(P_2'P_3' + P_3'P_1' + P_1'P_2') = P_1'P_2'P_3'.$$

Dalle formule (2), (3) si ha subito

$$(4) \qquad P_1' \,|\, V = P_2' \,|\, V = P_3' \,|\, V = P' \,|\, V,$$

cioè:

Nel caso A *le velocità di tutti i punti del solido hanno, nel tempo* t, *egual proiezione nella direzione* V. *Nel caso* B *qualsiasi direzione gode della stessa proprietà.*

Se poniamo

$$(5) \qquad \mathfrak{T} = P' \,|\, V,$$

allora $\mathfrak{T}$ ci dà in grandezza e segno la proiezione in V della velocità di un punto qualunque del solido. Il valore assoluto di $\mathfrak{T}$ è la distanza di O dal piano α.

Da quanto abbiamo detto fin qui risulta la *costruzione grafica di* V *e* $\mathfrak{T}$. Infatti: scelti i tre punti P_i del caso A si costruisce α mediante i punti $O + P_i'$; la normale al piano α dà la direzione di V e il senso è dato dal bivettore $(P_2' - P_1')$

$(P_3' - P_1')$; il valore assoluto di $\mathfrak{T}$ è la distanza di O da α e il segno è dato dal senso di V.

4. — In questo numero consideriamo il caso A.

Fissiamo due punti P_1, P_2 del solido tali che $P_1P_2V \neq 0$, cioè distinti e su di una retta non parallela a V. Vogliamo dimostrare che: *Comunque si fissi il punto* P_3 *che con* P_1, P_2 *determina un piano non parallelo a* V, $P_1P_2P_3V \neq 0$, *esiste un numero* $\mathfrak{R}$ *tale che* $P_i' - P_j' = \mathfrak{R} \mid V(P_i - P_j)$, *comunque variino* i *e* j *tra i numeri* 1, 2, 3.

Per le formule (1), (4) si ha

$$(P_i' - P_j') \mid (P_i - P_j) = 0, \qquad (P_i' - P_j') \mid V = 0\,;$$

e poichè il vettore $P_i - P_j$, per $i \neq j$, non è parallelo al vettore V, devono esistere tre numeri m_1, m_2, m_3, tali che

$$P_i' - P_j' = m_k \mid V(P_i - P_j)$$

essendo ijk una permutazione qualunque dei numeri 1, 2, 3. Se sommiamo le eguaglianze che si ottengono dalla precedente per $i = 2, 3, 1$, $j = 3, 1, 2$, si ha

$$V \{ (m_3 - m_2) P_1 + (m_1 - m_3) P_2 + (m_2 - m_1) P_3 \} = 0\,;$$

moltiplicando per $P_2 P_3$, o $P_3 P_1$ o $P_1 P_2$ e ricordando che $P_1P_2P_3V \neq 0$ si ottiene

$$m_1 = m_2 = m_3$$

che dimostra il teorema.

Siano ora P, Q due punti qualunque del corpo e per $P_1, P_2, P_3, \mathfrak{R}$ conserviamo le ipotesi precedenti. Uno almeno fra i numeri P_iP_jPV e uno almeno fra i numeri P_iP_jQV non è nullo. Se, ad es., $P_3P_1PV \neq 0$ e $P_1P_2QV \neq 0$, allora il teorema precedente dà

$$P' - P_1' = \mathfrak{R} \mid V(P - P_1'), \quad P_1' - Q' = \mathfrak{R} \mid V(P_1 - Q),$$

che, per somma, dànno

$$P' - Q' = \mathfrak{R} \mid V(P - Q),$$

vale a dire:

Nel caso A *esiste uno, ed un solo, numero* $\mathfrak{R}$ *funzione di* t, *tale che per qualunque coppia di punti* P, Q *del solido si ha*

$$P' - Q' = \mathfrak{R} \mid V(P - Q). \tag{6}$$

Si può *determinare graficamente il numero* $\mathfrak{R}$ nel modo seguente. Si fissino P e Q in modo che la retta PQ sia normale a V, $(P-Q) \mid V = 0$, e che la loro distanza sia l'unità $(P-Q)^2 = 1$; allora dalla (6) si ha

$$\operatorname{mod} \mathfrak{R} = \operatorname{mod}(P' - Q'),$$

il segno di $\mathfrak{R}$ restando determinato dalla (6).

Se $PQV = 0$ allora, per la (6), $P' - Q' = 0$, cioè:

Tutti i punti di una retta parallela a V *hanno, nel tempo* t, *egual velocità.*

5. — Dalla formula (6) operando con *indice* (p. 27) sui due membri si ha

$$\mid P' - \mid Q' = \mathfrak{R} VP - \mathfrak{R} VQ,$$

ovvero

$$\mathfrak{R} PV + \mid P' = \mathfrak{R} QV + \mid Q'. \tag{7}$$

Risulta da questa formula che la forma di seconda specie

$$s = \mathfrak{R} PV + \mid P' \tag{8}$$

dipende da t e dal movimento ma è affatto indipendente dal punto P.

Osservando che

$$Ps = P \mid P' \ (*) \qquad \text{e} \qquad Ps \,.\, \omega = \mid P'$$

(*) La forma s è dunque anche il simbolo dell'*omografia* che ad ogni punto P del solido fa corrispondere il piano $sP = P \mid P'$ normale in P alla traiettoria di P. L'omografia s non è una polarità poichè il suo determi-

si ha, qualunque sia P,

$$P' = | Ps . \omega ,$$

e per conseguenza la forma s rappresenta completamente, nel caso A, le velocità di ogni punto del corpo. E poichè nel caso B il vettore P' non varia col variare di P, è chiaro che la stessa forma nella quale si supponga $\mathfrak{R} = 0$, o anche $V = 0$, rappresenta le velocità anche nel caso B. Dunque:

Essendo dato il movimento di un solido è determinata una sola forma di secondo ordine s, *funzione di* t, *tale che per qualunque punto* P *del solido si ha*

$$P' = | Ps . \omega ; \tag{9}$$

s *essendo data dalla formula* (8) *ove si deve supporre* $\mathfrak{R} = 0$, o $V = 0$, *nel caso* B (*).

I numeri $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$, che sono molto importanti nel moto del corpo, sono determinati dalla forma s. Si ha, infatti, dalla (8),

$$s\omega = \mathfrak{R} V , \qquad ss = \frac{1}{3} \mathfrak{R} \mathfrak{T} , \tag{10}$$

la prima delle quali determina $\mathfrak{R}$ se il senso di V si fissa eguale o contrario al senso di $s\omega$, e la seconda determina $\mathfrak{T}$.

---

nante è emisimmetrico; è invece il così detto *sistema nullo* dal quale deriva immediatamente il *complesso lineare di rette di velocità nulla*. La trattazione, puramente meccanica, da noi indicata, si collega così, sotto forma semplicissima, alle ordinarie considerazioni proiettive che si pongono a base del moto del corpo per semplificare la trattazione analitica.

(*) Questo teorema è stato enunciato sotto tale forma dal Prof. G. Peano (*Calcolo geometrico*, Torino, 1888), che ha chiamato la *s velocità del solido nel tempo* t (*Sopra lo spostamento del polo sulla terra*, " Atti Acc. Torino ", 1895).

In quest'ultima nota si trova pure l'espressione della *quantità di moto* mediante i *momenti principali d'inerzia*, e del *lavoro elementare* che hanno grande importanza pratica e semplificano notevolmente lo studio di tutto ciò che si riferisce al moto di un corpo (Cfr. n° 8 ultima nota).

Se O, I, J, K è un sistema cartesiano ortogonale di riferimento, allora

$$P = O + xI + yJ + zK$$
$$s = pOI + qOJ + rOK + \xi JK + \eta KI + \zeta IJ$$

e dalle formule precedenti si ottengono le ordinarie formule analitiche (Cfr. ad es. G. Koenigs, *Leçons de cynématique*, 1897).

Si osservi che dalla (8) si ha pure

$$PVs = PV|P' = \frac{1}{6} V|P' = \frac{1}{6} \mathfrak{T}.$$

6. — Esaminiamo ora la natura del moto istantaneo del corpo nel tempo dt, a seconda della natura della forma s.

Ricordiamo intanto (p. 36) che: se l'invariante, ss, di s è nullo allora s è una linea o un bivettore secondochè $s\omega \neq 0$ o $s\omega = 0$: se $ss \neq 0$ allora s è, in infiniti modi, riduttibile alla somma di una linea con un bivettore, potendosi della linea fissare ad arbitrio un punto e dipendendo da questo e da s il bivettore.

Sia $ss = 0$ e $s\omega \neq 0$. Allora (10), $\mathfrak{R} \neq 0$ e $V \neq 0$, e siamo nel caso A. Per qualunque punto M della retta s, $Ms = 0$, la (9) dà $M' = 0$, vale a dire: *la retta* s *è immobile durante il tempo* dt. Se M è la proiezione di P sulla retta s allora, dalla (6), $P' = \mathfrak{R}|V(P - M)$ e

$$\operatorname{mod} dP = \operatorname{mod} \mathfrak{R} \,.\, \operatorname{mod}(P - M) \,.\, dt\,,$$

vale a dire: *ogni punto* P *ha una rotazione istantanea intorno all'asse* s, *di cui* $\mathfrak{R}$ *è la velocità angolare.*

Sia $ss = 0$ e $s\omega = 0$. Allora s è un bivettore e per la (9), $P' = Q' = \ldots$ e si ha il caso B, cioè: *il corpo ha la traslazione* dP.

Sia $ss \neq 0$. Qualunque sia O si ha $s = \mathfrak{R}OV + u$ ove u è un bivettore che dipende da O e da s, quindi: *il moto durante il tempo* dt *si compone di una rotazione istantanea di velocità angolare* $\mathfrak{R}$ *intorno all'asse* OV *e di una traslazione istantanea di cui il vettore* |udt *dà la grandezza, la direzione e il senso.* Dalla formula (8) risulta che: *se l'asse di rotazione è* PV *allora* |dP *è la traslazione.*

7. — Supponiamo in questo n° che $ss \neq 0$, vale a dire che $\mathfrak{R} \neq 0$ e $\mathfrak{T} \neq 0$.

Dalla formula (8) si ha identicamente

$$s = \mathfrak{R}PV + |(P' - \mathfrak{T}V) + \mathfrak{T}|V.$$

Essendo $P' - \mathfrak{T}V$ la proiezione di P' sul piano α normale a V, il bivettore $|(P' - \mathfrak{T}V)$ è parallelo al vettore V, vale a dire, la forma di seconda specie,

$$r = \mathfrak{R}PV + |(P' - \mathfrak{T}V) \tag{11}$$

è una linea parallela al vettore V, cioè r è l'*asse centrale* della forma

$$s = r + \mathfrak{T}|V. \tag{12}$$

Il movimento nel tempo dt si compone di una rotazione intorno ad r e di una traslazione parallela allo stesso asse, vale a dire:

Nel tempo dt *il moto è elicoidale,* r *ne è l'asse e* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ *le velocità di rotazione e traslazione.*

Se P_1, P_2 sono punti distinti del solido, le formule (8) e (11), dànno

$$P_1 r = P_1|(P_1' - \mathfrak{T}V), \quad P_2 r = P_2|(P_2' - \mathfrak{T}V):$$

se riprendiamo la costruzione di V fatta nel n° 3 e chiamiamo H il piede della perpendicolare condotta da O ad α, le formule ora scritte dicono che: *l'asse elicoidale è la retta comune ai piani condotti da* P_1 *e* P_2 *perpendicolarmente alle rette* $H(O + P_1')$, $H(O + P_2')$.

Sia P un punto dell'asse elicoidale, $Pr = 0$, allora da (12) e (9) si ha

$$Ps = \mathfrak{T}P|V, \quad Ps \,.\, \omega = \mathfrak{T}|V, \quad P' = \mathfrak{T}V,$$

vale a dire:

La velocità di ogni punto dell'asse elicoidale, nel tempo t, *è* $\mathfrak{T}$V.

Se M è la proiezione sull'asse r del punto generico P, allora, essendo $M' = \mathfrak{T}V$, si ha, per la (6),

$$P' = \mathfrak{T}V + \mathfrak{R}|V(P - M);$$

il mod P' dipende dunque dal mod$(P - M)$ e non dalla direzione di $P - M$; in conseguenza:

Le velocità, nel tempo t, *di tutti i punti di un cilindro circolare avente per asse l' asse elicoidale, hanno egual modulo ed eguale inclinazione sull'asse.*

Si può, in infiniti modi, ridurre s alla somma di due linee s_1, s_2,

$$s = s_1 + s_2,$$

d'una delle quali si può fissare ad arbitrio la retta che la contiene purchè non parallela all'asse r (*).

Il movimento si riduce allora alla somma di due rotazioni intorno agli assi s_1, s_2 delle quali i vettori $s_1\omega$, $s_2\omega$ dànno le velocità angolari. Essendo $ss = 2s_1s_2$, risulta che *il tetraedro* s_1s_2 *non muta di volume e di senso col variare dei due assi di rotazione.*

8. — Il corpo C che si considera sia il sistema (rigido) dei punti P_i con le masse m_i e sia: $m = \Sigma m_i$ la *massa* del sistema; $G = \frac{1}{m}\Sigma m_i P_i$ il *baricentro* e $\varphi = \frac{1}{2}\Sigma m_i P_i'^2$ la *forza viva* del sistema nel tempo t.

Se A, B sono punti e I, J vettori unitari, i numeri

$$(13) \qquad \Sigma m_i (P_i - A)I|(P_i - B)J; \qquad \Sigma m_i \}(P_i - A)I\{^2$$

(*) Infatti. Sia O un punto dell' asse arbitrario non parallelo al vettore $s\omega$ e sia I un vettore unitario parallelo a questo asse. Per la forma s si ha

$$s = O \,.\, s\omega + u$$

ove u è un bivettore, ben determinato, che dipende da O e da s.

I due piani $(O \,.\, s\omega)I$, Ou, hanno, per le ipotesi fatte, una retta a comune. Sia J un vettore unitario parallelo a questa retta. Allora sono determinati i numeri m, n tali che

$$s\omega = mI + nJ,$$

e per s si ha

$$s = O(mI + nJ) + u = mOI + \}nOJ + u\{;$$

ma J è parallelo ad u, e quindi $mOJ + u$ è una linea, c. d. d.

sono, rispettivamente, il *momento d'inerzia misto rispetto agli assi* AI, BJ, *e il momento d'inerzia rispetto all'asse* AI. I numeri (13) li indicheremo con le notazioni

$$\mathrm{MomIner}(C; s_1, s_2); \qquad \mathrm{MomIner}(C; s_1) = \mathrm{MomIner}(C; s_1, s_1),$$

essendo s_1, s_2 linee qualunque delle rette AI, BJ, o le rette stesse, e sopprimeremo il simbolo C considerando un solo corpo (*).

Se nella (6) poniamo P_i e P al posto di P e Q si ha,

$$P_i'^2 = \mathfrak{R}^2 \{ V(P_i - P) \}^2 + P'^2 + 2\mathfrak{R} P' V(P_i - P),$$

e quindi

$$(14) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^2 \mathrm{MomIner}\, PV + \frac{1}{2} m P'^2 + m P' V(G - P).$$

Se, nel tempo dt, il moto si riduce alla sola rotazione intorno all'asse PV (cioè $P' = 0$), ovvero si riduce ad una sola traslazione (cioè $\mathfrak{R} = 0$ e $V = 0$), allora dalla (14) si ha

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^2 \mathrm{MomIner}\, PV, \quad \text{ovvero} \quad \varphi = \frac{1}{2} m P'^2$$

che esprimono relazioni note.

Risulta subito dalla (14) che: *se la velocità* P′ *di* P *sta nel piano* PGV (**) *allora la forza viva del sistema è la somma della*

(*) Risulta immediatamente che: essendo O un punto qualunque, il punto X estremo del *raggio d'inerzia* relativo all'asse OX, soddisfa all'equazione intrinseca $\mathrm{mod}(X - O) . \sqrt{\mathrm{MomIner}(C; XO)} = 1$, cioè per le (13)

$$(\alpha) \qquad \Sigma\, m_i \{ (P_i - O)(X - O) \}^2 = 1.$$

Risulta subito che il luogo del punto X è una *quadrica* e precisamente un *ellissoide di centro O*. Dalla (α) si ottengono facilmente le ordinarie proprietà dell'*ellissoide d'inerzia.*

(**) Se il piano α, (α forma di 3ª specie non nulla), è invariabilmente collegato col solido, allora i punti della retta comuni al piano α e al piano $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ hanno velocità sul piano α. Infatti: se P sta sulla retta $\alpha\alpha'$ si ha $P\alpha = 0$ e $P\alpha' = 0$; derivando la prima si ha $P'\alpha + P\alpha' = P'\alpha = 0$, che dimostra quanto abbiamo affermato.

forza viva dovuta alla sola rotazione intorno all' asse PV *con la forza viva di un punto qualunque dell'asse cui si intenda affissa la massa totale del sistema.*

Nel caso particolare $P = G$ si ha

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathfrak{R}^2\,\mathrm{MomIner}\,GV + \frac{1}{2}\,mG'^2$$

e il teorema dato da questa formula si esprime, di solito, considerando il *moto relativo del sistema rispetto al baricentro*; la considerazione di tal moto relativo è dunque inutile.

Se la forma $s = \mathfrak{R}PV + |P'$ si decompone nella somma di due linee s_1, s_2 (Cfr. n° 7), cui possiamo dare la forma generica $\mathfrak{R}_1 AI$, $\mathfrak{R}_2 BJ$, dalla (9) si ha

$$P_i' = \mathfrak{R}_1 |(P_i - A)I + \mathfrak{R}_2 |(P_i - B)J$$

e quindi

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_1^2\,\mathrm{MomIner}\,s_1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_2^2\,\mathrm{MomIner}\,s_2 + \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2\,\mathrm{MomIner}(s_1, s_2)\ (*).$$

(*) Per fare lo studio completo del moto di un corpo giova considerare gli elementi:

quantità di moto $= q = \Sigma\, m_i P_i P_i'$;

forza motrice $= f = \Sigma\, m_i P_i P_i'' = \dfrac{dq}{dt}$;

lavoro elementare $= dl = \Sigma\, m_i P_i'' \mid dP_i = d\varphi$.

Ricordando che $s = \mathfrak{R}P_i V + \mid P_i'$, qualunque sia P_i, si ha

$$sq = \Sigma\, m_i P_i P_i' \mid P_i' = \frac{1}{6}\,\Sigma\, m_i P_i'^2 = \frac{1}{3}\,\varphi, \text{ cioè } \varphi = 3sq$$

e *la forza viva vale il prodotto di* 3*s per la quantità di moto.*

Analogamente

$$sf = \Sigma\, m_i P_i P_i'' \mid P_i = \frac{1}{6}\,\Sigma\, m_i P_i'' \mid P_i', \text{ cioè } dl = 6sfdt = 6sdq$$

e *il lavoro elementare è il prodotto di* 6s *per la forza motrice e per* dt ovvero *il prodotto di* 6s *per l'incremento della quantità di moto.*

9. — Un punto P, funzione di t, descriva una curva gobba. Noi vogliamo studiare il moto di un solido legato invariabilmente al triedro principale della curva descritta da P (*).

Sieno T, N, B i vettori unitari paralleli alla *tangente, normale principale* e *binormale* in P (p. 106, 107, 119); $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\lambda}$ la *prima, seconda* e *terza curvatura* in P (p. 120-123).

Per i punti P_1, P_2, P_3 considerati al n° 3 poniamo

$$P_1 = P, \quad P_2 = P + T, \quad P_3 = P + N;$$

se $v = \operatorname{mod} P'$, dalle formule di Frenet (p. 121) si ha

$$\frac{1}{v} P_1' = T, \quad \frac{1}{v} P_2' = T + \frac{1}{\rho} N, \quad \frac{1}{v} P_3' = T - \frac{1}{\rho} T - \frac{1}{\tau} B;$$

e, in conseguenza, per il vettore V si ha

$$V = \lambda \left(\frac{1}{\rho} B - \frac{1}{\tau} T \right):$$

l'asse elicoidale è parallelo alla generatrice della rettificante in P (p. 134).

Per la formula (5)

$$\mathfrak{T} = P' \mid V = vT \mid \lambda \left(\frac{1}{\rho} B - \frac{1}{\tau} T \right) = - \frac{v\lambda}{\tau};$$

la traslazione del moto elicoidale è il prodotto della grandezza della velocità nel punto P *per il rapporto della seconda alla terza curvatura, cambiata di segno, in* P.

Essendo, (6),

$$P_2' - P_1' = \mathfrak{R} \mid V(P_2 - P_1)$$

(*) Il sig. Darboux applica la teoria del movimento di un corpo rigido per studiare le proprietà delle curve. Noi facciamo l'applicazione inversa perchè lo studio diretto, fatto con metodi convenienti, delle curve, è più semplice dello studio del movimento (Cfr. C. Burali-Forti, *Le formule di Frenet per le superfici*, seconda nota).

si ha

$$\frac{v}{\rho} N = \mathfrak{R} \left| \lambda \left(\frac{1}{\rho} B - \frac{1}{\tau} T \right) T = \frac{\mathfrak{R}\lambda}{\rho} \right| BT = \frac{\mathfrak{R}\lambda}{\rho} N$$

e quindi

$$\mathfrak{R} = \frac{v}{\lambda};$$

la velocità angolare di rotazione del moto elicoidale è il prodotto della grandezza della velocità in P *per la terza curvatura.*

Osservando che

$$(P' - \mathfrak{T} V) = v \left| \left\{ T + \frac{\lambda^2}{\tau} \left(\frac{1}{\rho} B - \frac{1}{\tau} T \right) \right\} = v \left| \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} T + \frac{\lambda^2}{\rho\tau} B \right) = \frac{v\lambda^2}{\rho} NV, \right.\right.$$

si ha per l'asse elicoidale r,

$$r = \frac{v}{\lambda} \left(P + \frac{\lambda^2}{\rho} N \right) V;$$

l'asse elicoidale passa per il punto centrale (o di stringimento) della generatrice PN *della rigata delle normali* (p. 137).

Torino, Dicembre 1902.

Sullo sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti.

Nota del Dott. TOMMASO BOGGIO.

Il Prof. PEANO nelle sue: *Lezioni di Analisi infinitesimale* (*), ha dimostrato con metodo assai semplice la seguente notevole proprietà:

Se x *è una quantità positiva,* senx *è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie. Lo stesso avviene per* cosx.

Questo teorema trovasi dimostrato in alcuni trattati sotto la condizione $x < \frac{\pi}{2}$, la quale è affatto inutile.

In questa Nota mi propongo di stabilire l'analoga proprietà per le funzioni di Bessel, per la serie ipergeometrica e per le funzioni:

$$e^{-x}, \quad \log(1+x), \quad tg^{-1}x, \quad (1+x)^{-m}, \quad \log(x+\sqrt{1+x^2}),$$

ove x, m sono quantità positive qualunque.

Tale proprietà è senz'altro evidente se $x < 1$, come si riconosce subito partendo dallo sviluppo in serie di quelle funzioni; però essa sussiste senza questa restrizione, cioè è valida per un valore positivo qualunque di x.

1. — Sia x una quantità positiva, si ha evidentemente $e^{-x} < 1$, cioè:

$$1 - e^{-x} > 0.$$

Ora il primo membro è la derivata di $-1 + x + e^{-x}$, dunque, per un noto teorema di Calcolo, questa funzione è crescente, e poichè si annulla per $x = 0$, sarà per $x > 0$:

$$(1) \qquad -1 + x + e^{-x} > 0,$$

(*) Torino, a. 1893, vol. I, pag. 83.

ossia:

$$e^{-x} > 1 - x.$$

Il 1° membro della (1) è la derivata di $1 - x + \frac{x^2}{2!} - e^{-x}$, quindi questa funzione sarà crescente, e siccome si annulla per $x = 0$, avremo per $x > 0$:

$$(2) \qquad 1 - x + \frac{x^2}{2!} - e^{-x} > 0$$

cioè:

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}.$$

Il 1° membro della (2) è la derivata di:

$$-1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + e^{-x},$$

dunque questa funzione sarà crescente, e poichè si annulla per $x = 0$, sarà per $x > 0$:

$$-1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + e^{-x} > 0,$$

da cui:

$$e^{-x} > 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}.$$

Così continuando a passare dalle derivate alle funzioni primitive e prendendo queste in modo che si annullino per $x = 0$ si otterrà:

$$x \in Q \,.\, n \in N_0 \,.\, \supset \,.\, \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r \frac{x^r}{r!} > e^{-x} > \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

cioè:

Se $x > 0$, la funzione e^{-x} è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie.

2. — Occupiamoci ora della funzione $\log(1 + x)$, ove x è una quantità positiva. Si potrebbe procedere come dianzi; però sarà forse più semplice applicare quest'altro metodo che differisce dal precedente più per la forma che per la sostanza.

Si ha evidentemente, per $x > 0$:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} > 1 - x \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} < 1 - x + x^2 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x} > 1 - x + x^2 - x^3 \end{cases}$$

e in generale:

$$x \in Q \,.\, n \in N_0 \,.\, \supset \,.\, \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r x^r > \frac{1}{1+x} > \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r x^r,$$

onde moltiplicando per dx ed integrando fra 0 ed un valore qualunque x positivo, avremo per un noto teorema di Calcolo:

$$\log(1+x) < x$$

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

e in generale:

$$x \in Q \,.\, n \in N_0 \,.\, \supset \,.\, \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r \frac{x^{r+1}}{r+1} > \log(1+x) > \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r \frac{x^{r+1}}{r+1},$$

onde: *Se $x > 0$ la funzione $\log(1+x)$ è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie.*

3. — Leggendo nelle (1) § 2 x^2 al posto di x, poi moltiplicando per dx ed integrando fra 0 ed un valore positivo qualunque x, si ottiene:

$$\operatorname{tg}^{-1}x < x$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x > x - \frac{x^3}{3}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x > x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

e in generale:

$$x \in Q \,.\, n \in N_0 \,.\, \supset . \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{2r+1} > \operatorname{tg}^{-1}x > \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{2r+1},$$

onde si ha per arco-tangente x un teorema analogo a quello del § precedente.

4. — Siano m ed x due quantità positive: si ha:

$$(1) \qquad (1+x)^{-m} < 1,$$

ovvero leggendo $m+1$ al posto di m:

$$(1+x)^{-m-1} < 1,$$

moltiplicando per dx ed integrando fra 0 ed un valore positivo qualunque x, si ha:

$$-\frac{1}{m}(1+x)^{-m} + \frac{1}{m} < x,$$

vale a dire:

$$(2) \qquad (1+x)^{-m} > 1 - mx,$$

e ponendo $m+1$ al posto di m:

$$(1+x)^{-m-1} > 1 - (m+1)x$$

ed integrando, come dianzi, fra 0 ed x:

$$-\frac{1}{m}(1+x)^{-m} + \frac{1}{m} > x - (m+1)\frac{x^2}{2},$$

ossia:

$$(3) \qquad (1+x)^{-m} < 1 - mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2,$$

sostituendo $m+1$ ad m, poi integrando fra 0 ed x si deduce:

$$-\frac{1}{m}(1+x)^{-m} + \frac{1}{m} < x - (m+1)\frac{x^2}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2!}\frac{x^3}{3},$$

cioè:

$$(4) \qquad (1+x)^{-m} > 1 - mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3,$$

e in generale:

$$(5) \qquad m,x \in Q \,.\, n \in N_0 \,.\supset.\, \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r \binom{m+r-1}{r} x^r > (1+x)^{-m} >$$

$$> \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r \binom{m+r-1}{r} x^r.$$

Si conclude pertanto:

Se m ed x sono quantità positive, $(1+x)^{-m}$ è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie.

5. — Ponendo $m = \frac{1}{2}$ nelle (1), (2), (3), (4) del § precedente, poi integrando fra 0 ed un valor positivo qualunque x si ottiene:

$$x \in Q \,.\supset.\, \log(x + \sqrt{1+x^2}) < x$$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) > x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}$$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) < x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5}$$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) > x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7}$$

e così via; onde si conclude un teorema analogo a quello del § precedente.

6. — Consideriamo ora la funzione di Bessel:

$$(1) \qquad J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen}\omega)\, d\omega = \sum_0^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \; (*)$$

ove x è una quantità qualunque ($x \in \mathrm{q}$).

Indicando con x, ω due quantità qualunque si ha, dal teorema del Prof. Peano enunciato in principio di questa Nota:

$$\cos(x \operatorname{sen}\omega) < 1$$

$$\cos(x \operatorname{sen}\omega) > 1 - \frac{x^2 \operatorname{sen}^2\omega}{2!}$$

$$\cos(x \operatorname{sen}\omega) < 1 - \frac{x^2 \operatorname{sen}^2\omega}{2!} + \frac{x^4 \operatorname{sen}^4\omega}{4!},$$

e in generale:

$$x, \omega \in \mathrm{q} \,.\, n \in \mathrm{N}_0 \,.\, \supset .\, \sum_0^{2n}{}_r (-1)^r \frac{x^{2r} \operatorname{sen}^{2r}\omega}{(2r)!} > \cos(x \operatorname{sen}\omega) >$$

$$> \sum_0^{2n+1}{}_r (-1)^r \frac{x^{2r} \operatorname{sen}^{2r}\omega}{(2r)!};$$

moltiplicando per $\frac{2}{\pi}\, d\omega$, poi integrando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ed osservando che:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2r}\omega\, d\omega = \frac{\prod_0^{r-1}{}_i (2r-2i-1)}{\prod_0^{r}{}_i (2r-2i)} = \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}$$

si ha:

$$x \in \mathrm{q} \,.\, n \in \mathrm{N}_0 \,.\, \supset .\, \sum_0^{2n}{}_r \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} > J_0(x) > \sum_0^{2n+1}{}_r \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r},$$

quindi confrontando collo sviluppo in serie (1) abbiamo il teorema:

La funzione di Bessel $\mathrm{J}_0(x)$ *è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie.*

(*) Cfr. ad es.: H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik;* Braunschweig, a. 1900, 1. Bd., pag. 157.

Analogamente si può procedere per la funzione di Bessel più generale:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \omega - n\omega) d\omega,$$

ove n è un intero positivo qualunque.

7. — Consideriamo la serie ipergeometrica $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ che, come è noto (*), può porsi sotto le forme seguenti:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots\ldots$$

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} \sum_0^{\infty}{}_r \frac{\Pi(\alpha+r-1)\Pi(\beta+r-1)}{\Pi(r)\Pi(\gamma+r-1)} x^r,$$

$$(2) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha} ds,$$

ove $\Pi(a)$ rappresenta l'integrale euleriano di 2ª specie:

$$\Pi(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^a dx;$$

affinchè poi l'integrale che figura nella (2) abbia un valor finito bisogna che β e $\gamma - \beta$ siano quantità positive; noi supporremo inoltre $\alpha > 0$.

Ciò posto, se $sx > 0$, dalla (5) § 4 si deduce facilmente, osservando che se a è un intero positivo si ha $\Pi(a) = a!$:

$$\sum_0^{2n}{}_r \frac{(-1)^r \Pi(\alpha+r-1)}{\Pi(r)\Pi(\alpha-1)} s^r x^r > (1+sx)^{-\alpha} > \sum_0^{2n+1}{}_r \frac{(-1)^r \Pi(\alpha+r-1)}{\Pi(r)\Pi(\alpha-1)} s^r x^r.$$

Moltiplicando per $s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1} ds$, poi integrando fra 0 ed 1 e ricordando, come è noto, che:

$$\int_0^1 s^a (1-s)^b ds = \frac{\Pi(a+b+1)}{\Pi(a)\Pi(b)}, \qquad (a, b > -1)$$

(*) Cfr. H. Weber, Op. cit.; 2. Bd., pag. 13, 33.

si ottiene:

$$\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1+sx)^{-\alpha}ds < \sum_0^{2n}{}_r \frac{(-1)^r\Pi(\alpha+r-1)}{\Pi(r)\Pi(\alpha-1)}\frac{\Pi(\beta+r-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}{\Pi(\gamma+r-1)}x^r$$

$$\text{"} \qquad > \sum_0^{2n+1}{}_r \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

Sostituendo nella (2) ove vi si ponga $-x$ al posto di x si ricava:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-x) < \sum_0^{2n}{}_r \frac{(-1)^r\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}\frac{\Pi(\alpha+r-1)\Pi(\beta+r-1)}{\Pi(r)\Pi(\gamma+r-1)}x^r$$

$$\text{"} \qquad > \sum_0^{2n+1}{}_r \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

perciò confrontando collo sviluppo in serie (1), dopo avervi cambiato x in $-x$, si ha la proprietà:

Se $x<0$ la funzione $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ è maggiore della somma di un numero pari e minore della somma di un numero dispari di termini del suo sviluppo in serie.

L'Accademico Segretario
ENRICO D'OVIDIO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Gennaio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON
VICE PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Boselli, Brusa, Allievo e Renier Segretario.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 4 gennaio 1903.

Il Socio Allievo presenta una sua Memoria su *La vita oltremondana,* di cui espone il contenuto in un sunto pubblicato negli *Atti.* Assentatosi momentaneamente il Socio Allievo, la Classe, con votazione segreta unanime, accoglie la sua monografia tra le *Memorie* accademiche.

Raccoltasi la Classe in seduta privata, alla quale interviene anche il Socio Carle, si procede alla nomina della Commissione per il premio Gautieri di Filosofia (anni 1900-1902) e riescono nominati i Soci Carle, Allievo e Chironi.

LETTURE

Sunto di una Memoria intitolata: *La vita oltremondana;* del Socio Giuseppe Allievo.

La Memoria è preceduta da una introduzione avente per oggetto il mutabile umano, dove io chiamo ad una generale rassegna i cangiamenti continui che si avvicendano nell'io umano, distribuiti in tre classi, secondochè originano dalla potenza del sentimento e dell'affetto, o dalla potenza intellettiva o dall'attività volontaria. L'introduzione mette capo a questa dimanda: se l'io umano scompaia affatto in mezzo a' suoi mutamenti, oppure mantenga in sè alcunchè di immutabile e di perenne. Così sorge il problema della vita futura oltremondana.

Accennando l'origine, l'importanza e la difficoltà del problema, ne delineo il concetto generale formolandolo e ponendo in chiaro come esso si connetta con tutte le diverse potenze dell'io, ma segnatamente colla ragione.

Venendo di proposito alla discussione del problema, esordisco con una esposizione storico critica dei diversi sistemi che lo riguardano, e li divido in negativi ed in affermativi, secondochè rigettano od ammettono l'immortalità dell'io umano. Alla prima classe io riferisco il panteismo ed il materialismo. I sistemi affermativi li suddivido in compiuti ed incompiuti: compiuti se ammettono che l'io umano prosegue al di là non solo la sua vita puramente mentale, ma altresì la vita fisica; incompiuti se sostengono l'immortalità dell'anima sciolta da ogni involucro corporeo, da ogni contatto colla materia.

Dal campo storico critico passo al campo teorico studiando il problema in sè stesso. Anzi tutto io ricerco le condizioni necessarie per la vita oltremondana, distinguendole in intrinseche, se riguardano l'intrinseca vita dell'io umano, estrinseche se si riferiscono al tempo ed allo spazio; dopo ciò passo a determinare il metodo conveniente allo scioglimento del problema, ricercando se l'immortalità dell'io debba essere dimostrata dalla natura pura dell'anima, o dai fatti psichici e sociali. Instituisco la critica di questi fatti e chiudo considerando il problema dell'immortalità nelle sue attinenze colle diverse scienze filosofiche e sotto il suo aspetto soggettivo.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

PROGRAMMA

PER IL

XIV PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa, ed al Programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1902 si è chiuso il Concorso per le scoperte e le opere scientifiche fatte nel quadriennio 1899-1902, al quale concorso erano chiamati Scienziati di tutte le nazioni.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1901, è aperto il Concorso per il quattordicesimo premio Bressa, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi solamente **Scienziati ed Inventori italiani.**

Questo Concorso ha per iscopo di premiare quello Scienziato italiano, che durante il quadriennio 1901-1904, " a giudizio " dell'Accademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la più in- " signe ed utile scoperta, o prodotto l'opera più celebre in fatto " di scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche " pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non escluse " la geologia, la storia, la geografia e la statistica ".

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1904.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **9600** (novemila seicento).

Chi intende presentarsi al Concorso dovrà dichiararlo, entro il 31 Dicembre 1904, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia, ed inviare l'opera con la quale concorre. L'opera dovrà essere stampata; **non si terrà alcun conto dei manoscritti.** Le opere presentate dai concorrenti non saranno restituite.

Nessuno dei Soci nazionali, residenti o non residenti, dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia dà il premio allo Scienziato che essa ne giudica più degno, ancorchè non si sia presentato al Concorso.

Il Presidente dell'Accademia
E. D'Ovidio.

Il segretario della Giunta
A. Naccari.

PROGRAMMA DEI PREMI

DI

FONDAZIONE VALLAURI

PEI

Quadrienni 1903-1906 e 1907-1910.

L'Accademia delle scienze di Torino annuncia che, in esecuzione delle disposizioni testamentarie del Socio Senatore Tommaso VALLAURI, ha stabilito un premio da conferirsi *a quel letterato italiano o straniero che nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1903 al 31 dicembre 1906, avrà stampato la migliore opera critica* sopra la letteratura latina.

Similmente ha stabilito un altro premio da conferirsi *a quello scienziato italiano o straniero che nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1907 al 31 dicembre 1910 abbia pubblicato colle stampe l'opera più ragguardevole e più celebre su alcuna delle scienze fisiche*, interpretando questa espressione di scienze fisiche nel senso più largo.

Ciascuno di questi premi sarà di lire italiane **trentamila** nette (Lire it. **30.000**), fatta riserva soltanto per il caso che abbia a mutare il reddito delle cartelle di rendita italiana.

I premi saranno conferiti un anno dopo le rispettive scadenze.

Essi non potranno mai essere assegnati ai Soci nazionali dell'Accademia, residenti e non residenti.

Le opere, che venissero inviate all'Accademia perchè siano prese in considerazione per il premio, non verranno restituite.

Non si terrà alcun conto dei manoscritti.

Il Presidente dell'Accademia
ENRICO D'OVIDIO.

Il Segretario della Commissione
A. NACCARI.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Gennaio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, BERRUTI, MOSSO, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI. Funge da Segretario il Socio JADANZA.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza. — Il Socio NACCARI scusa per indisposizione la sua assenza.

Il Prof. D'OVIDIO annunzia alla Classe essere giunto il Decreto Reale che lo nomina Presidente dell'Accademia e rivolge parole di sentito compianto per la perdita del suo predecessore nella carica di Presidente, il prof. A. COSSA, e parole di vivo ringraziamento ai colleghi che lo designarono ad occupare l'alta carica.

È fatto omaggio all'Accademia dal Socio residente professor Guido GRASSI del suo lavoro intitolato: *Sul calcolo delle dinamo e degli alternatori*, Torino, 1902.

Sono accolte per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica, del prof. Francesco SEVERI, presentata dal Socio SEGRE;

Su un nuovo metodo di preparazione degli acidi nitrolici, del dott. Giacomo Ponzio, presentata dal Socio Fileti;

Alcune osservazioni sui protozoi fossili piemontesi, del dott. Alfredo Silvestri, presentata dal Socio Parona.

Il Socio Salvadori presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un suo lavoro intitolato: *Contribuzione all'Ornitologia delle isole del golfo di Guinea;* Parte II: *Uccelli di San Thomé.* La Classe ad unanimità dei votanti approva la stampa di questo lavoro nel volume delle sue *Memorie.*

Il Presidente prof. D'Ovidio presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie,* a nome del Socio Naccari, un lavoro del prof. Antonio Garbasso intitolato: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce.* Sarà esaminato da apposita Commissione.

La Classe, raccoltasi in adunanza privata, procede all'elezione del Socio Segretario, e riesce eletto, ad unanimità di voti, il Socio prof. Lorenzo Camerano, salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.

Nota di FRANCESCO SEVERI, a Bologna.

Lo studio delle superficie che rappresentano serie algebriche ∞^2 di gruppi di punti di una curva algebrica, è un argomento interessante perchè abbraccia una vasta classe di superficie irregolari, le quali, se la serie di cui si tratta non è contenuta in una serie lineare, ammettono integrali di differenziali totali di 1ª specie. Questa Nota contiene i risultati che ho ottenuto relativamente alla classe più semplice di superficie che si presentano in quest'ordine di ricerche: quelle che rappresentano coppie di punti di una curva (*). A questo lavoro spero di poterne far seguire altri sopra le superficie che rappresentano serie algebriche ∞^2 qualsiansi di gruppi di punti (**).

Giacchè le proprietà delle superficie che nascono dalle coppie di punti di una curva del genere due (superficie iperellittiche), sono state oggetto di ricerche esaurienti, specialmente da parte del sig. Humbert, in questa Nota io inizierò lo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere $\pi \geq 3$.

(*) Mentre stavo redigendo questo scritto, ho saputo indirettamente che il sig. M. De Franchis, verso la fine del 1901, si era occupato della stessa questione e che aveva determinato i caratteri invarianti delle superficie in discorso, senza però pubblicare i suoi risultati, che io non conosco affatto. Pensando che un lavoro del sig. De Franchis sull'argomento, per la indipendenza delle nostre ricerche, potrebbe differire dal mio nei metodi ed in qualcuna delle questioni trattate, non stimo inopportuna la pubblicazione di questa Nota.

(**) Su questo argomento ha richiamata la mia attenzione il chiar.mo prof. F. Enriques al quale rendo qui vivissime grazie pei consigli datimi.

I caratteri invarianti di queste superficie, dei quali assegno i valori, sono: il genere geometrico P_g, il genere aritmetico P_a e il genere lineare $p^{(1)}$, che vengono espressi dalle formole:

$$P_g = \frac{1}{2}\pi(\pi-1), \quad P_a = \frac{1}{2}\pi(\pi-1)-\pi, \quad p^{(1)} = (\pi-2)(4\pi-5).$$

Prendendo come immagine delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere π, la congruenza delle corde di una curva canonica $\gamma_\pi^{2\pi-2}$ dello spazio $S_{\pi-1}$, trovo che sulla congruenza suddetta il sistema canonico completo vien segato dai complessi lineari di rette dello $S_{\pi-1}$.

Stabiliti i risultati precedenti per via puramente geometrica, passo ad alcune brevi considerazioni sugli integrali di differenziali totali di 1ª specie annessi alle varietà che rappresentano le coppie, le terne, ..., le π-ple di punti di una curva di genere π, e trovo che la superficie delle coppie di punti possiede π di questi integrali, cioè tanti quant'è la differenza $P_g - P_a$.

Coll'uso degli integrali doppî di 1ª specie ritrovo rapidamente la generazione delle curve canoniche per le superficie delle coppie di punti; e quindi accenno all'uso che si può fare degl'integrali multipli di 1ª specie per dimostrare una proprietà analoga sulle varietà delle terne, delle quaderne, ... di punti.

1. — Cominceremo dal fare un'osservazione che ha per iscopo di ben definire le superficie delle quali ci vogliamo occupare.

Considerando le coppie di punti di una curva possiamo convenire di riguardare come identiche due coppie che differiscano solo per l'ordine, oppure possiamo fare la convenzione opposta. Se pensiamo la nostra curva riferita birazionalmente ad una curva C dello spazio S_4, ogni corda di C rappresenterà in modo sensibile una coppia di punti considerata indipendentemente dall'ordine, sicchè una immagine Φ delle superficie che rappresentano le coppie non ordinate, si otterrà segando la varietà delle corde di C con uno S_3. Invece una superficie Ψ che nasca dalla considerazione delle coppie ordinate, si potrà riferire alla superficie Φ contata due volte, e la curva di diramazione sarà segnata su Φ dalle tangenti di C. Una superficie Ψ si può anche riguar-

dare come immagine delle coppie di punti di due curve *distinte*, razionalmente identiche.

La rappresentazione analitica nello spazio a 4 dimensioni $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ di una superficie in corrispondenza biunivoca colle coppie ordinate della curva piana $f(\xi\eta) = 0$, si può ottenere considerando due punti $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ variabili sulla curva e ponendo:

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \eta_1,\ x_3 = \xi_2,\ x_4 = \eta_2,$$

e la rappresentazione nello stesso spazio di una superficie in corrispondenza biunivoca colle coppie non ordinate, si otterrà p. e. ponendo:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2,\ x_2 = \xi_1\xi_2,\ x_3 = \eta_1 + \eta_2,\ x_4 = \eta_1\eta_2.$$

In questa Nota mi occuperò delle superficie che rappresentano coppie non ordinate, e perciò nel seguito quando si parlerà di coppie di punti di una curva, si sottintenderà " non ordinate ". Un'osservazione analoga deve farsi per le varietà delle terne, delle quaderne, ... di punti.

2. — Prendiamo come modello projettivo dell'ente ∞^1 del genere π (non iperellittico), la curva canonica $\gamma_\pi^{2\pi-2}$ dello spazio $S_{\pi-1}$. Se rappresentiamo le rette di questo spazio coi punti di una varietà V a $2\pi-4$ dimensioni immersa in uno spazio Σ a $\binom{\pi}{2}-1$ dimensioni, assumendo come coordinate di un punto dello spazio Σ le coordinate Grassmanniane di una retta dello spazio $S_{\pi-1}$, un complesso lineare di rette, cioè l'insieme delle rette di $S_{\pi-1}$ le cui coordinate soddisfano un'equazione lineare, verrà rappresentato da una sezione iperpiana di V; un complesso quadratico, cioè l'insieme delle rette le cui coordinate soddisfano un'equazione di 2° grado, dalla sezione di V con una quadrica, e così via.

In questa rappresentazione la congruenza delle corde di γ ha per immagine una superficie F di V, i cui punti corrispondono biunivocamente *senza eccezione* alle corde di γ. Tenendo conto di ciò e del fatto noto che sulla curva γ, non iperellittica, non ci sono serie razionali di gruppi di 2 punti, si conclude che *la superficie* F *è priva di curve eccezionali.*

Ad una rigata generata dalle corde di γ che appartengono ad un dato complesso lineare, rispondono su F i punti di una sezione iperpiana, sicchè l'ordine $p^{(2)}$ di F uguaglierà il numero delle corde di γ appartenenti a due dati complessi lineari. Se assumiamo come complessi lineari seganti quelli (speciali) costituiti dalle rette che si appoggiano a due dati $S_{\pi-3}$ incidenti secondo uno $S_{\pi-4}$, si hanno $\binom{2\pi-3}{2} - \pi$ corde appoggiate allo spazio intersezione, e $\binom{2\pi-2}{2}$ corde giacenti nello $S_{\pi-2}$ congiungente.

Sarà dunque:

$$p^{(2)} = \binom{2\pi-2}{2} + \binom{2\pi-3}{2} - \pi = (\pi-2)(4\pi-5) - 1.$$

Fissiamo uno spazio a $\pi - 3$ dimensioni, α, e consideriamo la rigata Γ delle corde di γ appoggiate ad α. Gli $S_{\pi-2}$ per α segano su Γ una serie lineare di gruppi di $\binom{2\pi-2}{2}$ generatrici, e su quella sezione iperpiana f di F che rappresenta Γ, si ha in corrispondenza una serie lineare ∞^1, della quale A indicherà un gruppo generico. Con $|A|$ s'indicherà la serie stessa, e quando occorra anche la serie completa da essa individuata.

Fra gli $S_{\pi-2}$ per α ce ne saranno $6(\pi-1)$ tangenti a γ, e ciascuno di questi $S_{\pi-2}$ segherà γ ulteriormente in $2\pi-4$ punti. Le corde che congiungono il punto di contatto di ogni tale $S_{\pi-2}$ coi $2\pi-4$ punti ulteriori, son rappresentate su f dai punti doppi della serie $|A|$. Sicchè dicendo $p^{(1)}$ il genere di f avremo:

$$2\binom{2\pi-2}{2} + 2p^{(1)} - 2 = 6(\pi-1)(2\pi-4),$$

donde:

$$p^{(1)} = (\pi-2)(4\pi-5).$$

3. — Per un punto di γ passano $2\pi-3$ generatrici di Γ, a ciascuna delle quali risponde un punto su f; viceversa ad un punto di f rispondono due punti di γ. Mediante la corrispondenza fra γ ed f i gruppi canonici di γ si trasformano in gruppi di $(2\pi-2)(2\pi-3)$ punti di f, che appartengono ad una medesima serie lineare di ordine $(2\pi-2)(2\pi-3)$. Per caratteriz-

zare questa serie lineare si osservi che un gruppo canonico segato da uno $S_{\pi-2}$ per α, dà luogo, trasformandosi mediante la corrispondenza, ai punti di un gruppo A, ciascuno da contarsi due volte, perchè rappresenta due punti del gruppo canonico dal quale siamo partiti. Dunque i gruppi canonici di f dànno gruppi $2A$.

Ciò posto diciamo B il gruppo dei punti di f che rappresentano le tangenti di γ appoggiate ad α. Queste tangenti coi loro punti di contatto segnano su γ un gruppo jacobiano della serie canonica, il quale, essendo equivalente al triplo di un gruppo canonico, trasformandosi nel passaggio da γ ad f, dà luogo ivi ad un gruppo $6A$. D'altra parte le generatrici di Γ che passano pei punti del gruppo jacobiano suddetto, sono le tangenti a γ in questi punti, e le rette che congiungono ciascuno di essi alle ulteriori intersezioni dei rispettivi $S_{\pi-2}$ tangenti a γ e passanti per α. Queste ultime generatrici di Γ sono rappresentate su f dal gruppo jacobiano della serie $|A|$, ossia da un gruppo $K+2A$, ove $|K|$ indica la serie canonica di f. Dunque:

$$|6A| = |B+K+2A|. \tag{1}$$

La varietà delle corde di γ taglia α in una curva a, in corrispondenza biunivoca con Γ (nel caso $\pi=4$, a sarà una retta sestupla). La serie segata su a dagli $S_{\pi-4}$ del suo spazio si rispecchia in una serie lineare di ordine $\binom{2\pi-3}{2}-\pi$ di gruppi di generatrici della Γ, e quindi in una serie lineare $|C|$ sopra la f.

Consideriamo una quadrica Q fra quelle che passano per γ. Il complesso quadratico delle tangenti a Q taglia Γ in $2p^{(2)}$ generatrici, che sono le tangenti di γ appoggiate ad α e le rette di Γ che escono dai $2\binom{2\pi-3}{2}-2\pi$ punti in cui Q taglia a, ciascuna da contarsi due volte. Poichè i punti di f che rappresentano le generatrici di Γ uscenti dai punti aQ, costituiscono evidentemente un gruppo $2C$, le generatrici di Γ appartenenti al complesso quadratico, saranno rappresentate su f da un gruppo $B+2.2C$. D'altronde le sezioni di Γ coi complessi quadratici sono rappresentate su f da gruppi che appartengono al doppio della serie $|A+C|$ segata dagli iperpiani; quindi avremo:

$$|2A+2C| = |B+4C|. \tag{2}$$

Dal confronto delle (1) e (2) segue:

$$|K| = |2(A + C)|.$$

Dunque la serie canonica di f è il doppio della serie individuata da una sua sezione iperpiana.

Poichè evidentemente la superficie F non possiede punti multipli isolati, in forza di quanto ora abbiamo dimostrato, il doppio del sistema $|f|$ delle sue sezioni iperpiane, costituirà il sistema aggiunto ad $|f|$. Da ciò segue che:

Le sezioni iperpiane di F *sono curve del sistema canonico.*

4. — Nel corso del ragionamento svolto al n° precedente abbiamo tacitamente ammessa la proposizione seguente, che ora dimostreremo:

Se fra due curve C, C′ *si ha una corrispondenza algebrica d'indici qualunque, ad una serie lineare di* C *rispondono su* C′ *gruppi di una serie algebrica contenuti in una medesima serie lineare.*

Supponiamo prima che fra C, C' si abbia una corrispondenza $(1, x')$, cioè ad un punto di C ne rispondano x' di C' e ad un punto di C' uno di C. È ben noto allora che ad una serie lineare di C risponde su C' una serie lineare. Prendiamo invece su C' una serie lineare g_m e rappresentiamo con γ_m la serie algebrica che si ha su C come trasformata di g_m. Se facciamo vedere che due gruppi qualsiansi di γ_m stanno sempre in una serie lineare d'ordine m, potremo asserire che γ_m è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine.

Ora, se diciamo $\Gamma_1\Gamma_2$ due gruppi di γ_m e G_1G_2 due gruppi di g_m costituiti rispettivamente da punti omologhi a punti di $\Gamma_1\Gamma_2$, a ciascun gruppo della g_m^1 congiungente G_1 e G_2 risponde *un* gruppo di una serie razionale γ_m^1 contenente Γ_1 e Γ_2.

Da ciò, profittando di una proposizione del prof. Enriques (*), si deduce che γ_m^1 è contenuta in una serie lineare.

Il caso in cui fra C, C' si ha una corrispondenza (x, x'), si riconduce al precedente considerando l'ente ausiliario D costi-

(*) *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (" Rendiconti di Palermo ", t. 10, 1896).

tuito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza fra C, C', ed osservando che fra C e D si ha una corrispondenza $(1, x')$ e fra D e C' una corrispondenza $(x, 1)$.

5. — Ritorniamo adesso alla superficie F della quale ci siamo occupati ai n^i 2, 3, e proviamo anzitutto che essa è normale.

I coni che projettano la curva γ dai suoi punti, son rappresentati su F da un sistema ∞^1 di curve h, razionalmente identiche a γ, e di ordine $2\pi - 3$. Per ogni punto di F passeranno due curve h, e due qualunque di queste curve si taglieranno in un punto. Alle rette dello spazio $S_{\pi-1}$ passanti per un dato punto rispondono sopra V punti di uno spazio $S_{\pi-2}$, sicchè ogni curva h appartiene ad un tale spazio. Di più giacchè i complessi lineari di rette dello $S_{\pi-1}$ segano sopra un cono projettante γ da un suo punto, la serie completa che vien segata sul cono stesso dagli $S_{\pi-2}$ pel vertice, sopra ogni curva h gli iperpiani di Σ taglieranno una serie completa; ossia le curve h saranno normali. Da ciò si trae che *ogni* curva canonica di F taglierà una h in $2\pi - 3$ punti appartenenti ad uno spazio $S_{\pi-3}$.

Sopra una curva h consideriamo $\pi - 2$ punti *indipendenti* e diciamo $h_1, h_2, \ldots, h_{\pi-2}$ le altre curve h uscenti dai punti scelti. Poichè queste h si segano a due a due in un punto, potremo condurre per esse uno $S_{(\frac{\pi}{2})-2}$, e quindi esisterà almeno una curva canonica contenente $h_1, h_2, \ldots, h_{\pi-2}$. Dicasi k il resto di una tal curva canonica quando se ne tolgano le h. Pel modo col quale abbiamo scelto le curve $h_1, h_2, \ldots, h_{\pi-2}$ esse tagliano una h generica in $\pi - 2$ punti indipendenti, e quindi la k sega una h generica in un gruppo di $\pi - 1$ punti ben determinati, che stanno nello $S_{\pi-3}$ congiungente i punti in cui la h stessa è segata dalle $h_1, h_2, \ldots, h_{\pi-2}$. Giacchè, variando la h nel sistema ∞^1, questo gruppo di $\pi - 1$ punti descrive *una* curva, sarà unica la curva canonica che contiene come parti $h_1, h_2, \ldots, h_{\pi-2}$; il che non avverrebbe se F non fosse normale.

Combinando questo risultato con quello ottenuto al n° 3, potremo enunciare:

La superficie F *è una superficie canonica, ossia il sistema delle sue sezioni iperpiane costituisce il sistema canonico completo.*

Sotto altra forma potremo dire che:

Sulla congruenza delle corde di una curva canonica $\gamma_\pi^{2\pi-2}$ *dello* $S_{\pi-1}$, *il sistema canonico completo è segato dai complessi lineari di rette dello spazio* $S_{\pi-1}$.

Siccome i punti d'appoggio su γ di una corda incidente a un dato $S_{\pi-3}$, α, fanno parte di un gruppo della $g^1_{2\pi-2}$ canonica segata su γ dagli $S_{\pi-2}$ per α, e inoltre alle corde di γ appoggiate ad α rispondono, come s'è visto, i punti di una sezione iperpiana di F, la proposizione precedente si potrà presentare sotto forma invariantiva nel modo che segue:

Sopra una superficie rappresentante le coppie di punti di una curva di genere π, *il sistema canonico è individuato da ogni curva che provenga dalle coppie appartenenti ad un gruppo variabile di una* $g^1_{2\pi-2}$ *canonica.*

6. — Poichè F è normale nello spazio Σ, avremo subito l'espressione del suo *genere geometrico*:

$$P_g = \binom{\pi}{2}.$$

Il genere $p^{(1)}$ delle sue sezioni iperpiane non sarà altro che il *genere lineare* di F:

$$p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Passiamo a calcolare il genere aritmetico P_a. Consideriamo perciò il fascio di sezioni iperpiane di F, che rappresentano le rigate delle corde di γ appoggiate ai varî $S_{\pi-3}$ di un fascio, cioè agli $S_{\pi-3}$ che giacendo in un dato $S_{\pi-2}$, σ, passano per un dato $S_{\pi-4}$, ω. I punti doppi staccati di curve del fascio si ottengono in due modi:

a) Considerando le rigate che hanno per $S_{\pi-3}$ direttori quelli che congiungono ω coi punti $\sigma\gamma$. Le sezioni iperpiane corrispondenti si spezzano in curve h, le quali rappresentano i coni che dai punti $\sigma\gamma$ projettano γ, e in parti residue di ordine $p^{(2)} - 2\pi + 3$. Sia H_1 un punto $\sigma\gamma$, e sia h_1 la curva h corrispondente. I punti comuni ad h_1 ed alla relativa parte residua, rappresentano le rette che vanno da H_1 ai punti ove lo $S_{\pi-2}$ per ω e tangente a γ in H_1, sega ulteriormente γ. Sicchè per ognuna di quelle sezioni iperpiane spezzate si ottengono $2\pi - 4$ punti doppi staccati.

b) Considerando le rigate che hanno per $S_{\pi-3}$ direttori le traccie sopra σ degli $S_{\pi-2}$ bitangenti a γ e passanti per ω. Sopra ogni sezione iperpiana di F rappresentante una tale rigata, si ha un punto doppio. In questo modo si ottengono dunque $2(\pi-1)(9\pi-20)$ punti doppi staccati, tante essendo le bitangenti della projezione generica di γ sopra un piano.

Chiamando I *l'invariante di Zeuthen-Segre* relativo ad F, avremo perciò:

$$I = 2(\pi-1)(9\pi-20) + (2\pi-2)(2\pi-4) - p^{(2)} - 4p^{(1)} = \\ = (\pi-1)(2\pi-3) - 4.$$

Applicando la relazione fondamentale di Nöther (*):

$$p^{(1)} + I = 12P_a + 9,$$

facilmente trarremo che il *genere aritmetico* di F è espresso dalla formola:

$$P_a = \binom{\pi}{2} - \pi.$$

7. A prima vista può sembrare che i ragionamenti svolti per la superficie F che rappresenta, nel modo projettivamente fissato, le coppie di punti della γ_π, non valgano più nel caso $\pi=3$; ma è facile persuadersi che interpetrati convenientemente essi continuano a sussistere. La curva canonica γ del genere 3 è una quartica piana generale, della quale diciamo ρ il piano. Rappresentando le rette di ρ coi punti di un secondo piano, poichè sopra ogni retta di ρ si trovano 6 coppie di punti di γ, la superficie F che rappresenta le coppie di punti di γ, si ridurrà in tal caso ad un piano sestuplo. Sopra F avremo come curva di diramazione una curva γ' del 12° ordine (duale di γ) da contarsi due volte, perchè sopra ogni tangente di γ due delle 6 coppie di punti coincidono fra loro, e così pure altre due. Le coppie di punti di γ allineate con un punto α di ρ, son rappresentate su F dai punti di una retta sestupla f. Per ogni retta di ρ passante per α si hanno 6 punti di f; sicchè sopra f nasce una serie

(*) Cfr. p. e. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* („ Annali di Mat. „, (3), t. VI, 1901, n° 6).

lineare di 6° ordine, la quale ha i suoi punti doppi nei punti comuni ad f ed alla curva γ', ciascuno da contarsi due volte. Dicendo $p^{(1)}$ il genere di f avremo dunque:

$$2 \,.\, 6 + 2p^{(1)} - 2 = 24,$$

donde:

$$p^{(1)} = 7.$$

I ragionamenti dei n^i 3, 5 non subiscono che modificazioni formali per essere applicati al caso attuale, e si giunge alla conclusione che:

Il sistema canonico completo del piano sestuplo F *è il sistema delle sue rette.*

Sicchè il *genere geometrico* P_g di F è:

$$P_g = 3,$$

ed il *genere lineare* è:

$$p^{(1)} = 7.$$

Per calcolare il genere aritmetico P_a si applica il ragionamento del n° precedente e non è forse inutile riprodurlo brevemente colle opportune modificazioni.

Per ogni punto di una retta σ del piano ρ, otteniamo sopra F una retta sestupla f, che varia in un fascio. I punti doppi staccati delle curve f si ottengono in due modi:

a) Considerando i punti comuni a σ e a γ. Al fascio di rette avente il centro in uno H_1 di tali punti, risponde una certa curva f_1 la quale si spezza in due rette triple sovrapposte; l'una di queste rette triple rappresenta le coppie di γ di cui un punto è H_1, l'altra le coppie di γ allineate con H_1. Le due rette triple hanno comuni i punti che rappresentano le coppie di γ situate sulla tangente in H_1, e di cui uno dei punti è H_1. Dunque per ogni curva come f_1 si hanno 2 punti doppi staccati.

b) Considerando i punti comuni a σ ed alle 28 bitangenti di γ. Al fascio di rette avente il centro in uno di tali punti risponde una f, che ha un punto doppio in un punto doppio di γ'.

Indicando come al solito con I *l'invariante di Zeuthen-Segre*, avremo:

$$I = 2 \,.\, 4 + 28 - 6 - 4 \,.\, 7 = 2,$$

e usando della relazione di Nöther, otterremo il *genere aritmetico* di F:

$$P_a = 0.$$

Si può mettere in relazione il modello projettivo qui considerato per studiare le coppie di punti di una curva del genere π, con quello dato dal sig. HUMBERT in due Note dei *Comptes-Rendus* (*).

Ad ogni coppia di punti di γ se ne può associare un'altra: quella in cui la retta congiungente i punti della prima coppia, taglia ulteriormente γ. Questa ∞^2 di coppie di coppie, ai cui elementi corrispondono su F i gruppi di un'involuzione quadratica, si può rappresentare sopra un piano triplo T. Orbene, il piano triplo T non è altro che la projezione fatta sopra un piano, dal punto triplo della superficie di 6° ordine S, che il sig. Humbert definisce geometricamente così: Si prenda una *superficie di Kummer* K ed un punto generico O dello spazio. Una retta per O taglia K in quattro punti e ad ognuna delle 3 possibili distribuzioni di quei quattro punti in due coppie, corrispondono 3 involuzioni quadratiche sulla retta segante. Se si prendono i 3 coniugati di O in quelle involuzioni, al variare della retta segante il luogo dei punti costruiti è la S di Humbert, la quale ha in O il punto triplo.

8. — Passiamo ora ad alcune considerazioni sugli integrali semplici e multipli annessi alle varietà delle coppie, delle terne, ..., delle π-ple di punti di una curva γ di genere π.

Immaginiamo la varietà algebrica V_π a π dimensioni, i cui elementi (punti) sono le π-ple di punti della curva γ. Fissando sopra γ $\pi - q$ punti arbitrarii e considerando tutte le π-ple di cui fan parte i punti fissati, ad esse corrisponderanno su V_π i punti di una varietà algebrica V_q che rappresenta le q-ple di punti di γ. Sopra V si hanno $\infty^{\pi-q}$ varietà V_q razionalmente identiche, e per ogni punto di V_π passano $\binom{\pi}{q}$ varietà V_q.

Supponendo che la varietà V_π sia immersa in uno spazio $S_{\pi+1}$,

(*) Anno 1895, 1° semestre, pag. 365 e pag. 425.

le coordinate $x_1\, x_2 \dots x_{\pi+1}$ dei suoi punti si esprimeranno come funzioni abeliane a 2π periodi degli argomenti $u_1\, u_2 \dots u_\pi$:

$$x_1 = M_1(u_1 \dots u_\pi), \ \dots, \ x_{\pi+1} = M_{\pi+1}(u_1 \dots u_\pi),$$

legate dall'equazione di V_π:

$$H(x_1\, x_2 \dots x_{\pi+1}) = 0.$$

Se l'equazione della curva piana γ è $f(\xi\eta) = 0$, dicendo $I_1\, I_2 \dots I_\pi$ gli integrali abeliani di 1ª specie annessi a γ, cioè ponendo:

$$I_i = \int \frac{\varphi_i(\xi\eta)}{f\eta'} d\xi \qquad (i = 1, \dots, \pi),$$

avremo:

$$u_i = I_i(\xi_1\eta_1) + \dots + I_i(\xi_\pi\eta_\pi),$$

ove $\xi_1\eta_1, \dots, \xi_\pi\eta_\pi$ sono π punti variabili di γ.

Poichè il differenziale algebrico:

$$du_i = \frac{\varphi_i(\xi_1\eta_1)}{f\eta'_1} d\xi_1 + \dots + \frac{\varphi_i(\xi_\pi\eta_\pi)}{f\eta'_\pi} d\xi_\pi$$

è funzione simmetrica dei π punti variabili su γ, e ad una π-pla generica di punti di γ risponde un sol punto di V_π, e viceversa, sarà:

$$(1) \qquad du_i = A_{1i} dx_1 + \dots + A_{\pi i} dx_\pi,$$

ove le A_{ki} son funzioni razionali di $x_1\, x_2 \dots x_{\pi+1}$.

Ne viene che:

$$u_i = \int A_{1i} dx_1 + \dots + A_{\pi i} dx_\pi$$

sarà un integrale di differenziale totale ovunque finito sopra V_π.

Viceversa sia:

$$dv = P_1 dx_1 + \dots + P_\pi dx_\pi$$

un differenziale totale di 1ª specie annesso a V_π. Passando dalle variabili $x_1 \dots x_\pi$ alle variabili $u_1 \dots u_\pi$, avremo:

$$dv = du_1 \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_1} + du_2 \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \dots + du_\pi \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_\pi}.$$

Le espressioni $\sum P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$ risultano *a priori* funzioni abeliane di $u_1 \dots u_\pi$; ma se effettivamente dipendessero da queste variabili l'integrale v non sarebbe dovunque finito sopra V_π. Dunque sarà:

$$dv = \lambda_1 du_1 + \dots + \lambda_\pi du_\pi,$$

ove le λ sono costanti.

La varietà V_π *ammette* π *integrali distinti di differenziali totali di 1ª specie.*

Ogni integrale di differenziale totale annesso a V_π, considerato sopra una varietà subordinata V_q, dà luogo ad un integrale analogo relativo a questa. In particolare si hanno così π integrali di differenziali totali sopra le superficie V_2 che rappresentano le coppie di punti della γ. È facile vedere che una tal superficie V_2 non può ammettere integrali distinti da quelli. Infatti sopra V_2 si ha un sistema ∞^1 d'indice 2, di curve V_1 che a due a due *si tagliano in un punto.* Un integrale di V_2 diverso dai precedenti, essendo costante sopra ciascuna delle V_1, è perciò costante su tutta la superficie.

Riandando alla immagine projettiva F delle coppie di punti della curva di genere π, considerata ai numeri precedenti, potremo dire:

La superficie F, *che rappresenta le coppie di punti di una curva del genere* π, *ammette tanti integrali di differenziali totali di 1ª specie, quant'è la differenza fra il suo genere geometrico e il suo genere aritmetico.*

9. — Studiamo ora gl' integrali doppî. Se nell' integrale $\iint du_1 du_2$ passiamo dalle variabili u alle x, avremo:

$$\iint du_1 du_2 = \iint \sum_{ik} \frac{D(u_1 u_2)}{D(x_i x_k)} dx_i dx_k.$$

Giacchè, come rilevasi dalla (1):

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = A_{ik},$$

verrà:

$$\iint du_1 du_2 = \iint \Sigma (A_{i1} A_{k2} - A_{i2} A_{k1}) dx_i dx_k,$$

la quale ci dice che $\iint du_1 du_2$ è un integrale doppio di 1ª specie relativo a V_π.

Viceversa sia:

$$\iint \Sigma P_{ik} dx_i dx_k \qquad (P_{ik} = -P_{ki},\ P_{ii} = 0)$$

un tale integrale. Passando dalle variabili x alle u, otterremo:

$$\iint \sum P_{ik} dx_i dx_k = \iint \sum_{ik} \sum_{rs} P_{ik} \frac{D(x_i x_k)}{D(u_r u_s)} du_r du_s.$$

Ora se le $P_{ik} \frac{D(x_i x_k)}{D(u_r u_s)}$ fossero effettive funzioni abeliane delle $u_1 \dots u_\pi$, come *a priori* risultano, l'integrale del 2° membro non sarebbe finito per tutti i valori di $u_1 \dots u_\pi$, e quindi non potrebbe esserlo l'integrale del 1° membro. Potremo dunque porre:

$$\iint \Sigma P_{ik} dx_i dx_k = \Sigma \lambda_{rs} \iint du_r du_s,$$

ove le λ sono costanti. Quindi:

La varietà V_π *possiede* $\binom{\pi}{2}$ *integrali doppî di 1ª specie.*

Così proseguendo si trova che:

La varietà V_π *possiede* $\binom{\pi}{q}$ *integrali q-pli di 1ª specie.*

Gl'integrali doppî di 1ª specie annessi a V_π interpetrati sopra una V_q subordinata, dànno ivi integrali analoghi: in particolare così si ottengono sopra ogni V_2 i $\binom{\pi}{2}$ integrali doppî ad essa relativi. — Così per gl'integrali tripli, ecc. Dunque:

I generi geometrici delle varietà che rappresentano le coppie, le terne, ..., le $(\pi-1)$*-ple, le* π*-ple di punti di una curva del genere* π*, sono rispettivamente* $\binom{\pi}{2}, \binom{\pi}{3}, \dots, \binom{\pi}{\pi-1}, 1$.

10. — Vediamo come con l'uso degli integrali doppî si ritrovi facilmente la generazione delle curve canoniche per le superficie che rappresentano coppie di punti di una curva.

Consideriamo una V_2 contenuta in V_π e projettiamola genericamente sopra lo spazio ordinario $(x\,y\,z)$. Avremo una certa superficie Ψ di ordine n, $[\Psi(xyz) = 0]$, la quale sarà riferita

birazionalmente a V_2, e non ci saranno elementi eccezionali per la trasformazione nè su V_2 nè su Ψ.

Sopra la Ψ sarà:

$$u_i = \int \frac{A_i dx + B_i dy}{\Psi'_z}, \quad \iint du_1 du_2 = \iint \frac{Q_{12}}{\Psi'_z} dx\, dy\,,$$

ove le A_i, B_i sono polinomii aggiunti di ordine $n-2$ in xyz, e Q_{12} è un'aggiunta di ordine $n-4$ (*). Riguardando u_1, u_2 come funzioni di un punto di Ψ, avremo:

$$\iint du_1 du_2 = \iint \frac{D(u_1 u_2)}{D(xy)} dx\, dy = \iint \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\Psi'^2_z} dx\, dy.$$

La superficie V_2 dalla quale siamo partiti, sia ottenuta considerando le π-ple di punti di γ di cui fan parte $\pi - 2$ punti fissati $\xi_3\eta_3, \ldots, \xi_\pi\eta_\pi$. Nei punti di Ψ sarà allora:

$$du_i = \frac{\varphi_i(\xi_1\eta_1)}{f'_{\eta_1}} d\xi_1 + \frac{\varphi_i(\xi_2\eta_2)}{f'_{\eta_2}} d\xi_2$$

ove $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ indicano due punti variabili di γ. In particolare se questi due punti li supponiamo appartenenti ad un gruppo variabile di una $g^1_{2\pi-2}$, formata da gruppi canonici di γ, la quale sia segata dal fascio:

$$\varphi_1(\xi\eta) + \lambda\varphi_2(\xi\eta) = 0\,,$$

avremo:

$$\varphi_1(\xi_1\eta_1) + \lambda\varphi_2(\xi_1\eta_1) = 0\,, \quad \varphi_1(\xi_2\eta_2) + \lambda\varphi_2(\xi_2\eta_2) = 0.$$

Sicchè dicendo h la curva di Ψ che rappresenta le coppie $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ variabili nel modo detto, nei punti di h sarà:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = 0\,, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = 0.$$

Moltiplicando la prima di queste per $\frac{\partial \xi_1}{\partial x}$, la seconda per $\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$ e sommando viene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

(*) Cfr. ad es. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1897, t. I).

In modo analogo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.$$

Ossia avremo:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0\,, \quad B_1 + \lambda B_2 = 0\,,$$

donde:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0\,,$$

e quindi:

$$Q_{12} = 0.$$

Viceversa se si considera la curva che $Q_{12} = 0$ sega sopra Ψ, fuori delle linee multiple, risalendo si vede che essa coincide colla curva h. Ritroviamo così la proposizione del n° 5.

Il procedimento attuale si estende anche alle varietà che rappresentano terne, quaderne, ... di punti di una curva, e permette di affermare che sopra la V_q delle q-ple di punti di una curva del genere π, le varietà a $q-1$ dimensioni che rappresentano q-ple di punti appartenenti ad un gruppo variabile di una $g^{q-1}_{2\pi-2}$ canonica, appartengono al sistema canonico di V_q (*).

Se si assume come modello projettivo della varietà V_q che rappresenta le q-ple di punti di una curva del genere π, la varietà costituita dagli S_{q-1} q-secanti della curva canonica $\gamma^{2\pi-2}_{\pi}$ dello $S_{\pi-1}$, siccome gli iperpiani passanti per uno spazio $S_{\pi-q-1}$ segano su γ una $g^{q-1}_{2\pi-2}$ canonica, gli spazî S_{q-1} q-secanti appoggiati al dato $S_{\pi-q-1}$ costituiranno nella varietà di tutti gli S_{q-1} q-secanti, una varietà appartenente al sistema canonico. E giacchè fra i complessi lineari di S_{q-1} dello spazio $S_{\pi-1}$, cioè fra i sistemi di S_{q-1} le cui coordinate Grassmanniane soddisfano ad un'equazione lineare, ve ne sono precisamente $\binom{\pi}{q}$ linearmente indipendenti, avremo che:

Sopra il sistema degli spazî S_{q-1} q-*secanti della curva canonica del genere* π, *i complessi lineari di spazî* S_{q-1} *segano il sistema canonico.*

Bologna, gennaio 1903.

(*) Il sistema canonico di una varietà a q dimensioni (che fu considerato per la prima volta da Nöther) si può introdurre estendendo la definizione data da Enriques pel sistema canonico di una superficie (Cfr., p. e., *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche,* " Atti della R. Acc. di Torino ", 1901), oppure mediante la considerazione degli integrali q-pli di 1ª specie annessi alla varietà.

Su un nuovo metodo di preparazione degli acidi nitrolici.

Nota del Dott. GIACOMO PONZIO.

I metodi finora conosciuti per la preparazione degli acidi nitrolici $R.CHN_2O_3$ richiedono tutti molto tempo, dovendosi partire da composti difficili ad ottenersi, come sarebbero i mononitroidrocarburi $R.CH_2NO_2$ od i loro dibromoderivati $R.CBr_2NO_2$, sui quali si fa poi rispettivamente agire l'acido nitroso o l'idrossilamina.

Nella presente Nota espongo una reazione molto semplice la quale permette di preparare rapidamente, ed anche in grande quantità, gli acidi nitrolici, con un rendimento quasi teorico.

Il nuovo metodo di preparazione consiste nell'azione del tetrossido d'azoto N_2O_4 sugli α-isonitrosoacidi della serie grassa R.C(NOH).COOH (ossime degli acidi α-chetonici R.CO.COOH). A tale scopo gli isonitrosoacidi vengono trattati colla quantità equimolecolare di tetrossido d'azoto sciolto in etere anidro: la reazione comincia tosto con regolare svolgimento di bollicine gassose incolore, e l'isonitrosocomposto, generalmente insolubile nell'etere, a poco a poco scompare. Se la reazione diventa troppo viva, la si può moderare immergendo nell'acqua fredda il palloncino ove si opera, senza però raffreddare al disotto di 0°, perchè allora cessa lo sviluppo gassoso. Quando la reazione è terminata e l'etere, che prima era colorato in rosso-bruno, è diventato quasi incoloro, lo si lava con poca acqua e poi lo si agita con soluzione di idrato potassico al 10 %. La soluzione alcalina, avente la colorazione rosso-sangue caratteristica dei sali degli acidi nitrolici, si lava con etere, si acidifica con precauzione mediante acido solforico diluito ed il liquido, così di-

ventato incoloro, si estrae con etere ripetute volte. Questo si secca su solfato sodico anidro, si distilla a bagno maria per la maggior parte, e poi si elimina completamente con una corrente d'aria secca. Si ottiene così come residuo l'acido nitrolico quasi puro.

La formazione degli acidi nitrolici dagli α-isonitrosoacidi per azione del tetrossido d'azoto:

$$R.C(NOH).CO_2H \xrightarrow{N_2O_4} R.CHN_2O_3$$

è dovuta evidentemente alla trasformazione del gruppo isonitroso NOH nel gruppo N_2O_3 ed alla successiva rottura del legame fra due atomi di carbonio; fatto molto notevole, che io però ho già osservato in un altro caso e precisamente per l'amilchetopseudonitrolo (1) $CH_3.CO.C(N_2O_3).CH_2.CH_3$ che ottenni dall'isonitrosometilpropilchetone per mezzo del tetrossido d'azoto e che per azione degli alcali dà acido propilnitrolico $C_2H_5.CHN_2O_3$.

Che il tetrossido d'azoto possa facilmente provocare la rottura di una catena aperta di atomi di carbonio risulta poi anche da altri miei lavori sugli isonitrosochetoni (2), i quali per azione del tetrossido d'azoto si trasformano prima negli acilderivati dei cosidetti dinitroidrocarburi primari e poi, per idrolisi, in questi ultimi ed in acidi grassi:

$$\begin{array}{c} R.CO \\ | \\ R'.C(NOH) \end{array} \xrightarrow{N_2O_4} \begin{array}{c} R.CO \\ | \\ R'.C(N_2O_4) \end{array} \xrightarrow{H_2O} \begin{array}{c} R.COOH \\ \\ R'.CHN_2O_4 \end{array}$$

Anzi la reazione è generale ed io l'ho applicata con successo alla preparazione di dinitroidrocarburi (p. es. del fenildinitrometano $C_6H_5.CHN_2O_4$) i quali non si potevano ottenere coi metodi soliti.

È probabile che anche nel caso degli α-isonitrosoacidi si formino prima, per azione del tetrossido d'azoto, dei composti

(1) Gazz. Chim., *29*, I, 358 (1899).
(2) Gazz. Chim., *27*, I, 271 (1897) e *31*, II, 133 (1901).

intermedi $R . C(N_2O_3) . COOH$ i quali poi per idrolisi dànno gli acidi nitrolici ed acido carbonico:

$$\begin{array}{c} R . C(NOH) \\ | \\ COOH \end{array} \xrightarrow{N_2O_4} \begin{array}{c} R . C(N_2O_3) \\ | \\ COOH \end{array} \xrightarrow{H_2O} \begin{array}{c} R . CHN_2O_3 \\ H_2CO_3 \\ \widetilde{H_2O + CO_2} \end{array}$$

ma su questo argomento mi riservo di ritornare quanto prima; come pure mi riservo di studiare l'azione del tetrossido d'azoto sui β- e γ-isonitrosoacidi della serie grassa.

Acido metilnitrolico — $CH_2 . N_2O_3$. — Si forma facendo agire, nel modo sopra descritto, il tetrossido d'azoto sull'acido isonitrosoacetico $CH(NOH) . CO_2H$, ottenuto dall'acido bicloroacetico ed idrossilamina secondo le indicazioni di Hantzsch (1). Cessato lo svolgimento gassoso bisogna, in questo caso, aver cura di fare i successivi trattamenti con idrato sodico e con acido solforico sempre raffreddando bene con ghiaccio, a causa della poca stabilità del prodotto, ed allora si ha un rendimento quasi teorico.

L'acido metilnitrolico si può avere in lunghi aghi appiattiti aggiungendo alla sua soluzione eterea una quantità sufficiente di eteri di petrolio bollenti fra 50° e 80°, e si fonde a 68° con decomposizione. Tscherniak (2) aveva dato come punto di fusione 64°, però riferendosi al prodotto ottenuto dalla soluzione eterea per svaporamento del solvente e non purificato colla cristallizzazione.

Acido etilnitrolico — $CH_3 . CHN_2O_3$. — Fu ottenuto facendo agire il tetrossido d'azoto sull'acido isonitrosopropionico $CH_3 . C(NOH) . COOH$, il quale si prepara facilmente trattando l'acido piruvico con cloridrato di idrossilamina e carbonato sodico, secondo le indicazioni di V. Meyer e Janny (3). Da 10 gr. di ossima

(1) Annalen, *289*, 294 (1896).
(2) Annalen, *180*, 168 (1875).
(3) Berichte, *15*, 1527 (1882).

si ebbero gr. 8,1 di acido nitrolico (80 % del teorico) il quale, dopo cristallizzazione dagli eteri di petrolio bollenti fra 50° e 80°, si presenta in splendidi aghi, lunghi parecchi centimetri, di sapore dolce e fusibili a 87-88° con decomposizione (1).

Gr. 0,1170 di sostanza fornirono cc. 26 di azoto ($H_0 = 749,11$, $t = 8°$), ossia gr. 0,031146.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_2H_4N_2O_3$
Azoto	26,72	26,92

Che si tratti realmente di acido etilnitrolico l'ho confermato trasformandolo nel suo *benzoilderivato*:

$$CH_3 . C \begin{cases} NO_2 \\ NOC_7H_5O \end{cases}$$

il quale cristallizzato dal toluene, come consiglia V. Meyer (2), o meglio dall'alcool (dove è poco solubile a caldo e pochissimo a freddo) si presenta in larghe lamine fusibili a 131°.

Gr. 0,1509 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 739,04$, $t = 8°$), ossia gr. 0,020602.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_8N_2O_4$
Azoto	13,67	13,47

Acido propilnitrolico — $CH_3 . CH_2 . CHN_2O_3$. — Fu ottenuto per azione del tetrossido d'azoto sull'acido α-isonitrosobutirico $CH_3 . CH_2 . C(NOH) . COOH$, preparato facendo agire l'idrossilamina sull'acido α-monobromobutirico $CH_3 . CH_2 . CHBr . COOH$ secondo le indicazioni di Hantzsch e Wild (3). Da 10 gr. di ossima si ebbero gr. 5 di acido propilnitrolico, il quale cristallizzato dagli eteri di petrolio bollenti fra 50° e 80° si presenta in aghi splendenti fusibili a 66° con decomposizione. Questo punto di

(1) Il punto di fusione da me trovato per l'acido etilnitrolico, concorda coi dati di Nef (Annalen, *280*, 283 (1899)) e non con quelli di V. Meyer (Annalen, *175*, 98 (1875)) il quale aveva trovato 81-82°.

(2) Berichte, *27*, 1600 (1894).

(3) Annalen, *289*, 297 (1896).

fusione è superiore di 6° a quello dato da V. Meyer (1), ma è lo stesso di quello da me trovato per l'acido propilnitrolico ottenuto dall'amilchetopseudonitrolo (2).

Gr. 0,1263 di sostanza fornirono cc. 25,2 di azoto ($H_0 = 752,5$, $t = 12°$), ossia gr. 0,029795.

Cioè su cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_3H_6N_2O_3$
Azoto	23,60	23,73

Il *benzoilderivato dell'acido propilnitrolico*:

$$CH_3 . CH_2 . C \begin{cases} NO_2 \\ NO . C_7H_5O \end{cases}$$

non è ancora descritto nella letteratura chimica: io l'ho ottenuto col metodo di Schotte e Baumann sciogliendo gr. 1,8 di acido propilnitrolico in gr. 1,1 di idrato sodico (soluzione al 5 %) ed aggiungendo gr. 2,1 di cloruro di benzoile. Dopo breve agitazione, il colore rosso-sangue della soluzione scompare e si separa una sostanza solida la quale, cristallizzata dall'alcool, si presenta in larghe lamine leggermente giallognole e fusibili ad 85°.

I. Gr. 0,2455 di sostanza fornirono gr. 0,4820 di anidride carbonica e gr. 0,1083 di acqua.

II. Gr. 0,1900 di sostanza fornirono cc. 20,4 di azoto ($H_0 = 753,6$, $t = 10°$), ossia gr. 0,024281.

Cioè su cento parti:

	Trovato		Calcolato per
	I	II	$C_{10}H_{10}N_2O_4$
Carbonio	53,96	—	54,05
Idrogeno	4,90	—	4,50
Azoto	—	12,75	12,61

Detto benzoilderivato è abbastanza solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool e negli eteri di petrolio bollenti fra 80° e 110°; è pochissimo solubile nell'etere, solubile invece nel cloroformio.

Torino, Istituto Chimico della R. Università. Gennaio 1903.

(1) Annalen, *175*, 114 (1875).

(2) Gazz. Chim., *29*, I, 358 (1899).

Alcune osservazioni sui Protozoi fossili piemontesi.

Nota di ALFREDO SILVESTRI.

Secondo l'importante riassunto dei risultati relativi alle numerose ricerche paleontologiche eseguite nel bacino terziario piemontese, dovuto al prof. Sacco (1), la fauna protistologica di esso comprendeva nel 1890 il numero di 293 forme distinte, distribuite dal liguriano all'astiano, e più abbondanti nell'elveziano che nelle altre formazioni geologiche, consistendo esclusivamente di Rizopodi reticolari; detto numero venne poi un po' aumentato pei successivi studî dello stesso Sacco, di Dervieux, Di Rovasenda, Tellini, e Schlumberger, ma in seguito alle attive indagini del dott. Prever e ad alcune mie recenti ricerche, ho motivi serî per ritenere che il ramo al quale m'interesso sia stato appena sfiorato (2), con cattiva interpretazione di talune delle forme già elencate. A sostegno di queste mie asserzioni intendo ora produrre qualche argomento, il quale sarà in pari tempo un piccolo, anzi un piccolissimo contributo allo studio assai interessante della microfauna fossile del Piemonte.

A) Esistenza di una fauna a Radiolarii.

Il collega prof. Dervieux mi favorì gentilmente in esame l'anno scorso (1902) certa singolare roccia, che mi scrisse d'aver raccolta a Marmorito (Colli torinesi), nelle formazioni dell'elveziano superiore; roccia bianco-giallastra, tenera, friabile, aspra al tatto, schistoide, la quale dapprima dubitai fosse un calcare marnoso a Rizopodi radiolarii e reticolari, quindi silicifero per la presenza in esso dei Radiolarii stessi, ma però dall'analisi mi-

(1) *Catalogo paleontologico del bacino terziario del Piemonte*, in " Boll. Soc. Geol. It. ", vol. VIII (1889), pag. 281-356; vol. IX (1890), pag. 185-340 (Continuazione e fine). Roma, 1890.

(2) Opinione del resto espressa dal prof. Sacco fin dal 1890 (l. c., pag. 284).

neralogica (1) resultommi così povera di calcare e tanto ricca di silice, da poter essere classificata come una varietà di *tripoli a Radiolarii*. Pel contenuto poi d'enorme quantità di questi, splendidamente conservati e costituenti una bellissima faunula con predominio di SPHAEROIDEA e DISCOIDEA (Haechel), che darà da lavorare a parecchi studiosi, discreta copia di Rizopodi reticolari o Foraminiferi, pochissimi frustoli di Diatomacee (2), qualche spicula di Silicospugna, e la *facies* litologica della roccia, non esitai a rilevarne l'analogia coi ben conosciuti tripoli della Sicilia (Caltanissetta, Licata, Grotte, Monte Cannatone, ecc.), studiati da Hoffmann, Ehrenberg, Fischer, Parodi e Mottura, Sauvage, Frémy, Schwager e Stöhr, De Bosniasky, ecc., e l'affinità con quello del giacimento classico di Grotte (tripoli, come si sa, attribuiti da Stöhr al tortoniano, e da Baldacci, ecc., al sarmatiano, per me sinonimo di tortoniano); anzi *a causa d'alcune forme contenutevi* l'avrei giudicato se non addirittura coetaneo a quest'ultimo, almeno più recente dell'elveziano. Ma il prof. Sacco, alla cortesia del quale mi son rivolto per un parere, ritiene invece che il tripoli di Marmorito provenga dall'elveziano medio superiore, e tale autorevole opinione debbo oggi rispettare, pur attendendone la conferma dal resultato d'uno studio completo della importante fauna la quale esso ricetta, e dal confronto di quest'ultima con l'altra determinata da Stöhr nel tripoli di Grotte (3), non essendone, lo confesso, pienamente convinto (4).

---

(1) Sommaria, non avendo potuto disporre di sufficiente quantità di materiale, già per la maggior parte adoprato alla ricerca dei fossili.

(2) Vi ho potuto riconoscere i generi *Coscinodiscus* ed *Actinocyclus* di Ehrenberg.

(3) *Sulla posizione geologica del tufo e del tripoli nella zona solfifera di Sicilia*, in " Boll. R. Comit. Geol. It. „, vol. XI, pag. 498-517. Roma, 1878. — *Die Radiolarienfauna der Tripoli von Grotte, Provinz Girgenti, in Sicilien*, in " Palaeontographica „, vol. I. München, 1880.

(4) Interessante sarà pure il confronto, malgrado la poca comunanza di forme, della faunula a Rizopodi e Diatomacee del tripoli di Marmorito con quelle del *tufo* tortoniano di Stretto presso Girgenti, del calcare (o tripoli) probabilmente elveziano di Montegibio e Baiso nel Modenese, e dell'argilla marnosa tortoniana del Capo S. Marco in Sardegna, studiate rispettivamente da Schwager (1878; " Boll. R. Comit. Geolog. Ital. „, vol. IX, pag. 519-531, tav. I), Pantanelli (1883; " Boll. Soc. Geol. It. „, vol. I (1882), pag. 142-155), Mariani e Parona (1887; " Atti Soc. It. Sc. Nat. „, vol. XXX, pag. 101-191).

L'esistenza di Radiolarii e della relativa roccia nelle formazioni terziarie piemontesi mi resulterebbe un fatto completamente nuovo, sul quale di conseguenza mi riservo d'insistere; però sarà bene accenni fin d'ora la mia opinione, fondata sempre sul contenuto in fossili, che il sedimento marino di cui trattasi, malgrado la presenza dei Radiolarii, non si sia costituito a grandissima nè a grande profondità: piuttosto a profondità media.

B) Forme poco conosciute.

Pleurostomella brevis, Schwager.

(Fig. 1*a*, lato sinistro ×50; fig. 1*b*, lato anteriore ×50; fig. 1*c*, sezione principale ×80).

Pleurostomella brevis, Schwager, 1866; " Novara-Exped., geol. Theil „, vol. II, pag. 239, tav. VI, fig. 81.

Pleurostomella rapa, Gümbel, 1868; " Abth. m.-ph. Cl. k.-bayer. Ak. Wiss. „, vol. X (1870), pag. 630, tav. I, fig. 54. — Brady, 1884; " Foram. Challenger „, pag. 412, tav. LII, fig. 12 e 13.

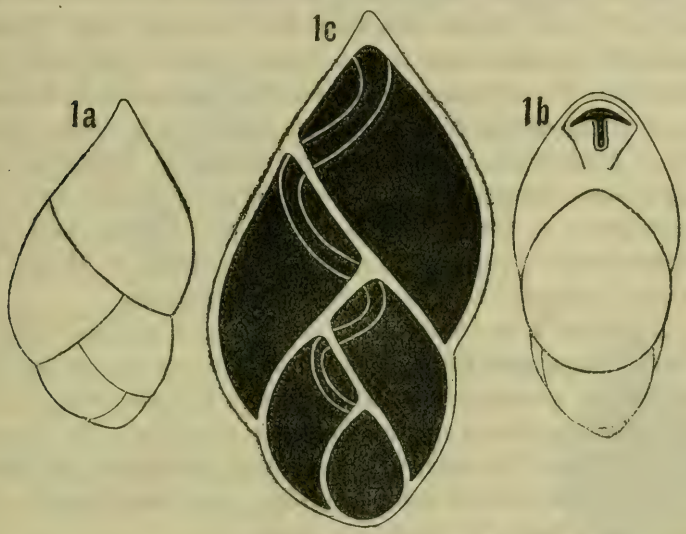
Pleurostomella acuta, Hantken, 1875; " A magy. kir. fôldt. int. evkönyve „, vol. IV (1876), pag. 37, tav. XIII, fig. 18. — 1875; " Mitth. Jahrb. k. ungar. geol. Anst. „, vol. IV (1881), pag. 44, tav. XIII, fig. 18. — Schlumberger, 1883; " Feuille Jeun. Nat. „, pag. 119, tav. II, fig. 5, 5*a*.

Pleurostomella rapa, Gümbel; var. *recens*, Dervieux, 1899; " Boll. Soc. Geol. It. „, vol. XVIII, pag. 77.

Specie dimorfa, la di cui forma **A** era conosciuta sotto il nome di *Pl. brevis* e la **B** sotto quelli di *Pl. acuta* e *Pl. rapa*, la quale ultima era l'unica fin qui rinvenuta nel terziario piemontese (elveziano di Sciolze, collezione Di Rovasenda) e Dervieux aveva voluto farne, ad ogni modo a torto a parer mio, una varietà *recens* " perchè appartenente al terziario superiore ed all'epoca attuale „ (pag. 77, l. c.). Le unite figure 1*a*-1*b* illustrano la forma megalosferica da me raccolta assieme alla microsferica, ed in rarissimi esemplari dal nicchio calcareo, liscio, spulito, biancastro, opaco, poroso ma non perforato, in una marna grigio-chiara dell'elveziano di Marmorito (1). La sezione di tal

(1) Anche questa favoritami dal chiar.mo prof. Dervieux; è una roccia sedimentaria ricchissima di Rizopodi reticolari, in cui dubito esista dello zolfo allo stato libero o facile a rendersi tale (FeS_2?), il residuo della lavatura per staccio della quale resulta costituito quasi esclusivamente da detti esseri, con enorme predominio del genere *Globigerina*: può dunque dirsi " marna a Globigerine „.

forma (fig. 1*c*) mi ha messo in evidenza una cosa assai interessante, e cioè che nell'interno essa contiene un sifone flessuoso, dall' aspetto tubulare e privo longitudinalmente di soluzioni di continuità, il quale va dalla faccia esterna dell'orifizio della prima a quella interna dell'orifizio della seconda loggia, e così via; ma l'esiguo numero degli esemplari in mio possesso, distrutti per sopraggiunta in parte internamente, per invasione di minuti



cristalli di calcite, pirite, o d'entrambi i minerali, mi ha vietato di scoprire maggiori dettagli. Sono però affatto sicuro dell'esistenza del detto sifone, il quale, pel tramite d'una nuova forma da me ultimamente scoperta nella marna ricordata, ma che ho appurato già superficialmente conosciuta da Schlicht, e la quale denomino dedicandola a questi: *Ellipsopleurostomella schlichti*, mi ha schiarito la derivazione del genere *Pleurostomella* dall' *Ellipsoidina*, già sospettata, è doveroso ricordarlo, da Guppy in seguito allo studio di forme del gruppo *Ellipsoidina* (1). E mi ha fatto poi capire che:

(1) 1894; " Proc. Zool. Soc. London „, vol. IV, pag. 651: " *Ellipsoidina* may be found to bear a somewhat similar relation to *Pleurostomella* that *Glandulina* does to *Nodosaria* „.

Polymorphina labiata, Schwager (1); *Dimorphina deformis* (Costa) Fornasini (2); *Dimorphina Capellinii*, De Amicis (3); *Ellipsopolymorphina deformis* (Fornasini) Silvestri (4); sono tutte varietà pleurostomelle attribuibili a dimorfismo (5), variazioni, ecc., di specie unica, *labiata* (Schwager), da assegnarsi ad un nuovo genere, e cioè l'*Ellipsopleurostomella* sopra nominato. Ripudio conseguentemente il genere *Ellipsopolymorphina*, n. (6), il quale non ha ragione per esser mantenuto; nè l'avrebbe poi a causa d'altro fatto nuovo pur venuto alla luce dalle ricerche sulla marna di Marmorito, e consistente in una forma bulimina derivante indubitatamente dalla *Ellipsoidina ellipsoides:* legame fra le *Buliminae* attuali, anche queste dotate di sifone interno, e la stessa *Ellipsoidina*, il quale mi fa escludere la derivazione di *Polymorphina* da *Ellipsoidina*, inducendomi a riferirla invece a *Lagena*, associando *Polymorphina* a *Glandulina (sensu stricto)*. Chiamo tale forma *Ellipsobulimina seguenzai*, in onore di chi fondò lo stipite della famiglia, ossia del compianto prof. G. Seguenza.

Illustrerò a suo tempo con descrizioni e disegni dette due nuove ed importanti forme, sperando di trovare in seguito anche la varietà di passaggio da *Ellipsoidina* a *Chilostomella;* e terminerò quest'argomento esponendo che a mio avviso la *Pleurostomella alternans*, Schwager (7), non è, zoologicamente parlando, se non una buona varietà della *Pl. brevis*, anch'essa dimorfa, come risulta dalle figure di Schwager stesso (8).

---

(1) 1866; " Novara-Exp., geol. Theil ", vol. II, pag. 246, tav. VII, fig. 90.

(2) 1890; " Mem. R. Acc. Sc. Bologna ", ser. 4ª, vol. X, pag. 471, tav., fig. 35-37.

(3) 1895; " Naturalista Siciliano ", anno XIV, pag. 45 estr., tav. I, fig. 18 *a-b*.

(4) 1901; " Boll. Acc. Gioenia ", n. s., fasc. LXIX, pag. 5 estr., fig. 1 e 2 di pag. 2.

(5) P. es.: *Dimorphina deformis* = forma **A**; *D. Capellinii* = forma **B**.

(6) Istituito nel 1901, l. c.

(7) 1866; " Novara-Exp., geol. Theil ", vol. II, pag. 238, tav. VI, fig. 79-80.

(8) Fig. 79 (l. c.) = forma **B**; fig. 80 = forma **A**. — È probabilmente sulla presenza d'un avanzo di tubo interno in esemplare di *Pleurostomella alternans* mancante dell' ultimo segmento, che io fondai nel 1896 (" Mem. Pontif. Acc. N. Lincei ", vol. XII, tav. II, fig. 9 *a-c*) la var. *tubulata* di essa.

Glandulina laevigata, d'Orbigny.

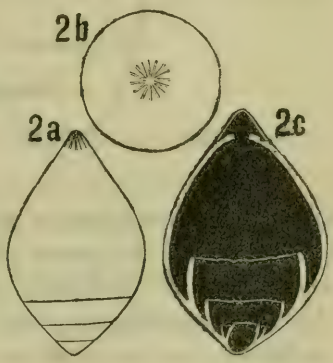
(Fig. 2*a* e 3*a*, lati maggiori × 50; fig. 2*b* e 3*b*, lati superiori × 50; fig. 2*c* e 3*c*, sezioni principali × 57).

Nodosaria (Glandulina) laevigata, d'Orbigny, 1826; " Ann. Sc. Nat. ", vol. VII, pag. 252, tav. X, fig. 1-3. — Brady, 1884, " Foram. Challenger ", pag. 490 e 493, tav. LXI, fig. 17-22.

Glandulina laevigata, d'Orbigny, 1846; " Foram. foss. Vienne ", pag. 29, tav. I, fig. 4 e 5. — Sacco, 1889; " Boll. Soc. Geol. It. ", vol. VIII, pag. 306, n° 516.

Nodosaria laevigata, d'Orbigny. — Dervieux, 1894; " Boll. Soc. Geol. It. ", vol. XII (1893), pag. 597, tav. IV, fig. 1 e 2.

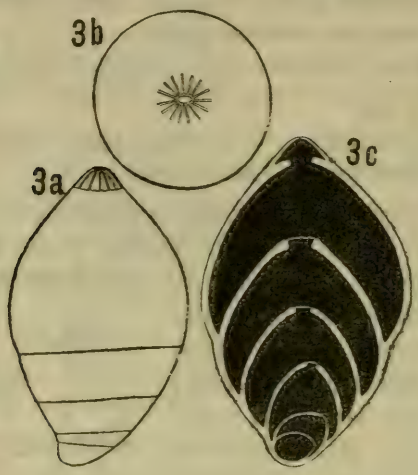
Sacco la ricorda dell'elveziano in generale, Dervieux precisa la provenienza dall'elveziano di Sciolze, io ne ho trovato due forme pure elveziane: la prima (fig. 2*a*-2*b*) dal nicchio calcareo, levigato, biancastro, subopaco, non perforato ma poroso, nel tripoli a Radiolarii di Marmorito, dov'è rara; e questa non differisce nella struttura, caratteristica pei segmenti internamente incompleti, dalle Glanduline che illustrai nel 1900 (1) che per la mancanza d'introflessione tubulare orale. Vi si scorge invece bene (fig. 2*c*) l'orifizio pileato, od in altri termini su cui sta un cappuccio conico, il quale è guarnito esternamente di costicine lungo le generatrici.



La seconda forma di *Glandulina laevigata* (fig. 3*a*-3*b*), provveduta di conchiglia calcarea, liscia, spulita, biancastra o subopaca, porosa e non perforata, l'ho raccolta nella marna a Globigerine di Marmorito (v. la nota a pag. 208): essa presenta internamente (fig. 3*c*) segmenti completi e quindi logge distinte; l'orifizio si mantiene pileato. Ebbi dunque torto ad asserire nel 1900 (l. c.) che la costruzione a segmenti internamente incompleti fosse comune a tutte le *Glandulina laevigata* plioceniche e

(1) *Intorno alla struttura di alcune Glanduline siciliane*, in " Atti e Rendic. R. Acc. Sc. Lett. Arti Acireale ", n. s., Mem. Cl. Sc., vol. X (1899-900), pag. 1-12, tav. — Acireale, 1901 (gli estratti furono pubblicati nel 1900).

recenti (1), ed ho piacere di poterlo qui constatare, perchè in ciò trovo la spiegazione della fig. 2, tav. X (1826: " Ann. Sc. Nat. „, vol. VII) di d'Orbigny, fin qui rimastami oscura, ma dalla quale mi si dimostra oggi chiaramente come l'autore avesse voluto rappresentare la sezione di forma glandulina dai segmenti



internamente completi, e mi rimane in parte giustificata la diagnosi originale del genere *Glandulina*, d'Orbigny (del 1826, come sottogenere del *Nodosaria*; portato poi a genere nel 1846, l. c.), che dice testualmente così: " Loges globuleuses, partiellement enchâssées les unes dans les autres et formant par leur réunion un ovoïde; axe central et droit: ouverture au bout d'un prolongement de la dernière loge et terminale „ (l. c., pag. 251). Ho detto però *parzialmente giustificata*, ed invero le annesse figure 3*a* e 3*c* dimostrano che la disposizione assiale delle logge può in taluni casi iniziarsi curva (var. *dentalinoides*), nè l'orifizio è visibile perchè coperto del pileo (ciò che si osserva nella fig. 3*b* non è l'apertura, ma un'areola limitata da leggiero rilievo prodotto da

(1) Ciò che feci fidandomi delle molte e molte sezioni praticate su esemplari pliocenici di svariate località del Senese, della Sicilia, di S. Pietro in Lama presso Lecce (cava Paladini), di Savona, ecc.; del terziario di Baden (Austria) e di Buda (Ungheria), ecc.; recenti dell'Adriatico e Mediterraneo, e di più in base a figure di vari autori, dalle quali avevo potuto intravedere la costruzione interna degli esemplari rappresentati.

fusione delle costicine); anzi sotto quest'ultimo riguardo sembrami evidente che d'Orbigny (se ne confronti la fig. 2 con la mia 3*c*) abbia fondato il genere *Glandulina* e la specie *laevigata* proprio su individuo incompleto, per mancanza dell'ultimo segmento, nel quale perciò l'orifizio, non terminale, era sprovveduto del pileo.

Dunque si hanno in conclusione due tipi di *Glandulina laevigata*, l'uno a segmenti internamente incompleti, e l'altro a segmenti completi, i quali finchè non avrò accertato o mi venga dimostrato siano un caso semplice di nutazione, ho il diritto ed il dovere di mantenere distinti, anche poi nella considerazione che mi risultano dare origine in modo indipendente a forme nodosarie (1); al tipo illustrato per la prima volta da d'Orbigny (fig. 3*a*-3*c*) mantengo necessariamente il nome da lui assegnatogli: all'altro attribuisco in via provvisoria quello di *Glandulina simulans* (fig. 2*a*-2*c*).

C) Forme nuove.

Ellipsoglandulina labiata (Schwager), var. ***ciofaloi***, n.

(Fig. 4*a*, lato sinistro × 50; fig. 4*b*, lato superiore × 50).

Glandulina labiata, Schwager, 1866; " Novara-Exped., geol. Theil „, vol. II, pag. 237, tav. VI, fig. 77.

Rostrolina (pars), Schlicht. 1870; " Foram. Pietzpuhl „, pag. 73, tav. XXVI, fig. 19-24.

Lingulina brevis, Reuss, 1870; " Sitzungsb. k. Ak. Wiss. Wien „, vol. LXII, pag 478 (figure di Schlicht, l. c.).

Nodosaria (Gland.) abbreviata, Neugeboren. — Sherborn et Chapman, 1866; " Journ. R. Micr. Soc. „, ser. 2ª, vol. VI, pag. 745, tav. XIV, fig. 20*a*, *b* (*fide* Rzehak).

Ellipsoidina exponens, Brady in: Jukes-Browne et Harrison, 1892; " Quart. Journ. Geol. Soc. „, pag. 196. — Guppy, 1894; " Proc. Zool. Soc. London „, vol. IV, pag. 650, tav. XLI, fig. 13.

Dimorphina (?) cfr. *deformis* (Costa). — De Amicis, 1895; " Naturalista Siciliano „, anno XIV, pag. 47 estr.

Glandulina laevigata, d'Orbigny; var. *chilostoma*, Rzehak, 1895; " Ann. k. k. naturhist. Hofmuseums „, vol. X, pag. 219, tav. VII, fig. 6*a-b*.

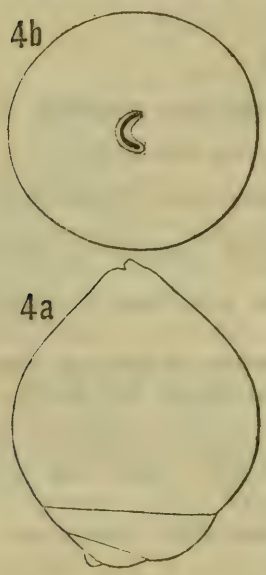
Ellipsoglandulina laevigata, Silvestri, 1900; " Atti R. Accad. Lincei „, Rendic. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., ser. 5ª, vol. IX, sem. 2°, pag. 19. — 1900;

---

(1) Esistono Nodosarie e Nodosaridi a segmenti completi o incompleti; anch'essi con orifizio pileato. — Il pileo è una produzione assai singolare e caratteristica.

" Atti e Rendic. R. Acc. Sc. Lett. Arti Acireale „, n. ser., Mem. Cl. Sc., vol. X (1899-900), pag. 1 e seg., tav., fig. 3-10, 12-13. — 1900; " Atti Acc. Pontif. N. Lincei „, anno LIII (1899-900), pag. 219. — 1900; " Mem. Acc. Pontif. N. Lincei „, vol. XVII, pag. 247, tav. VI, fig. 25, 26-29, 31-33, 37-39, 47-48, 53. — 1901; " Atti Acc. Pontif. N. Lincei „, anno LIV (1900-901), pag. 104, fig. 1*a-b*.

Questa forma notevole, di cui oggi restituisco allo Schwager la priorità che riconosco spettargli, era fin qui affatto sconosciuta nel terziario piemontese, ed il suo rinvenimento nella marna elveziana di Marmorito è molto interessante, in primo luogo per la filogenia di certe Nodosarie, e poi perchè permette di prevedere a breve scadenza quello della *Ellipsoidina ellipsoides*, Seguenza, forma stipite, in piani più antichi dell'elveziano, ma forse addirittura in esso, sembrando che tale specie sia diffusa da un'epoca geologica ancora indeterminata quantunque probabilmente da ricercarsi al principio dell'era terziaria, se non al di là, fino al pliocene inferiore; almeno a giudicare per quest'ultimo dalla figura 13*a-b* (tav. II, vol. XII, " Mem. Pontif. Acc. N. Lincei „) da me pubblicata nel 1896, e relativa ad esemplare del Senese (di Pienza nella provincia di Siena) in allora attribuito alla *Lagena apiculata*, Reuss (l. c., p. 107), perchè mi parve mancante d'un contenuto interno, mentre, e l'ho riconosciuto con l'esperimento, un giuoco di luce riflessa potrebbe avermi ingannato. Certo si è che dalla sua forma esterna, disegnata esattamente come l'osservai, oggi mi risulta assai sospetto, ma per disgrazia non ho più mezzo di sottoporlo ad esame avendolo smarrito e forse addirittura perduto, in uno dei tanti viaggi cui è andata incontro la mia collezione micropaleontologica.



La varietà *ciofaloi* della *Ellipsoglandulina labiata*, qui riprodotta con le figure 4*a*-4*b*, e della quale ho accertato la specie mediante sezione, non figurata perchè incompleta a causa delle solite cristallizzazioni interne di calcite, sebbene sufficiente per

me all'identificazione, è estremamente rara nella marna sopra citata, ha un nicchio calcareo, biancastro, spulito, opaco e, come al solito, poroso ma non bucherellato; offre una notevole variabilità di forma, pur mantenendosi nei limiti di varietà ad asse curvo nell'inizio, del tipo specifico di Schwager. Essa già la conoscevo (1900; "Mem. Acc. Pontif., ecc., „ tav. VI, fig. 38 e 39) fossile della marna giallastra di Sansepolcro (Arezzo) attribuita da me al miocene superiore, ma che dopo questa comparsa nell'elveziano della varietà in discorso sono costretto a ritenere più antica e riferire all'epoca mediomiocenica; ma soprattutto poi l'avevo riscontrata comune (figure inedite) nei *trubi* di Bonfornello (Termini-Imerese), tantochè mi piace ora dedicarla al chiar.mo prof. S. Ciofalo, il quale così cortesemente mi diede mezzo di studiarvela.

Gli esemplari di Marmorito, come del resto quelli di Bonfornello, hanno le pareti così sottili o così fragili, da non permetterne l'isolamento dalla roccia che li racchiude senza il sussidio d'opportuni artifizî tecnici; e ciò forse spiega come mai sia sfuggita ad altri ricercatori (Fuchs, Sacco, e Dervieux), che pur trovarono nell'elveziano piemontese l'*Ellipsonodosaria rotundata* (d'Orbigny), e pare anche nella var. *labiata*, chiamandola ora *Lingulina rotundata*, d'Orbigny, ed ora *Nodosaria radicula* (Linné), var. *annulata* (Terquem et Berthelin), la quale *Ellipsonodosaria* io ho dimostrato esser la forma nodosaria dell'*Ellipsoglandulina labiata* (1).

Il ritrovamento di quest'ultima dovrà ripetersi nel bacino piemontese anche in sottopiani più antichi dell'elveziano, essendovi probabilità che sia apparsa in Inghilterra nel suessoniano (*London clay*; secondo Sherborn e Chapman, l. c., e sulla fede (2) di Rzehak), e certezza circa la sua esistenza nel bartoniano della bassa Austria (*Tegel* di Bruderndorf); anzi mi pare opportuno riportar qui un brano di chi la rinvenne in Austria (Rzehak, 1895; l. c.), reputando che, s'intende con le debite modificazioni, possa applicarsi in seguito al bacino terziario del Piemonte:

(1) 1901; "Atti Acc. Pontif. N. Lincei „, anno LIV (1900-901), pag. 103, fig. 1-4.

(2) In questo momento non sono in possesso del lavoro di Sherborn e Chapman, nè mi è possibile consultarlo per altra via.

" die Formen mit spaltförmiger Mündung dort, wo die typische *Glandulina laevigata* häufig vorkommt, nämlich in den miocänen Ablagerungen, anscheinend fehlen oder wenigstens sehr selten vorkommen, während merkwürdigerweise im bartonischen Thone von Bruderndorf gerade diese Formen ausschliesslich auftreten und mithin eine gewisse Selbständigkeit zu besitzen scheinen " (l. c., pag. 220).

Altra forma nuova è pure l'*Ellipsobulimina seguenzai* della marna a Globigerine di Marmorito già ricordata, ma ho detto precedentemente di volerla illustrare in seguito.

D) Forme male interpretate.

Una di queste è quasi con certezza l'*Ellipsopleurostomella schlichti* n. (*v. ante*), essendochè, se si possono generalizzare per altre località i resultati ottenuti dalla marna testè nominata, sarebbe la forma pseudoglandulina meno infrequente nell'elveziano; trovasi di solito rovinata nell'apertura, in mancanza dei connotati della quale, malgrado la disposizione alternante ed in doppia serie delle sue prime logge, è estremamente facile scambiarla, in seguito ad esame superficiale, con la *Glandulina laevigata*, d'Orbigny, o con certe varietà dell'*Ellipsoglandulina labiata* (Schwager). Ed ecco qui una riprova dell'assoluta necessità di trascurare un po' nello studio dei Rizopodi reticolari quelle minuzie e minuziosaggini esterne innumerevoli, derivanti da variazioni d'ornamentazione, da maggiore o minore accrescimento di qualche segmento per un verso o per l'altro, da figure accidentali causate dalla luce in conseguenza a modificazioni nella trasparenza od opacità del nicchio, ecc., per dedicarsi preferibilmente alla ricerca della loro struttura, di cui finora si sa così poco, da riuscire necessariamente manchevole qualunque tentativo di classificazione veramente naturale, e cioè basata su rapporti accertati e non supposti di parentela e affinità delle singole forme.

Anche l'*Ellipsopleurostomella schlichti* verrà, ripeto, e spero fra breve, da me descritta e figurata, meritando uno studio a sè, perchè per essa, l'*Ellipsoglandulina labiata* e l'*Ellipsobulimina seguenzai*, parmi possa stabilirsi la successione delle ellissoforme

descritte o dichiarate in questa ed altre precedenti note, nel seguente modo:

Ellipsoidina
(ellipsoides)

Ellipsopleurostomella	***Ellipsoglandulina***	***Ellipsobulimina***
(schlichti e *labiata)*	*(labiata)*	*(seguenzai)*
Pleurostomella	***Ellipsonodosaria***	***Bulimina***
(brevis e *alternans)*	*(rotundata)*	(le forme recenti).

Insisto però sul fatto che non tutte le forme pleurostomelle conosciute appartengono all'importante gruppo ora indicato (1), che certamente si complicherà sempre più, come non vi appartiene la *Polymorphina subcylindrica*, Hantken (2), la quale, pur essendo Pleurostomella, è da dirsi *Glandulopleurostomella subcylindrica*, appartenendo invece al gruppo delle glanduloforme, che per ora comprenderebbe: *Lagena* (entosoleniana), *Glandulina* (*sensu stricto*) e *Glandulonodosaria*, *Glandulopleurostomella* e *Polymorphina*.

E qui sospendo temporaneamente la presente breve serie d'osservazioni, porgendo sentiti ringraziamenti a quelle gentili persone che per l'una o l'altra via, materiali da studio, pareri od altro, mi hanno dato mezzo di compilarla e pubblicarla: alludo in particolar modo ai sigg. Dervieux, Fornasini, Millet, Parona, Sacco, e Wright.

---

(1) Sì, nel caso delle: *Pleurostomella eocaena*, Gümbel, 1868 (1870), e Hantken, 1875 (1876); *Pl. Barroisi*, *obtusa* e *Reussi*, Berthelin, 1880; tutte forme che per la specie difficilmente saprei distinguere dalla *Pl. alternans*, ad eccezione forse della *Pl. Barroisi*, d'altronde più nodosaria che pleurostomella.

(2) 1875; " A magy. kir. föld. int. évhönyve „, vol. IV (1876), pag. 51, tav. XIV, fig. 14. — 1845; " Mitth. Jahrb. k. ungar. geol. Anat. „, vol. IV (1881), pag. 60, tav. XIV, fig. 14.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Febbraio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peyron, Vice-Presidente dell'Accademia, Carle, Pizzi, Chironi e Renier Segretario. — Il Direttore della Classe Ferrero ed il Socio Brusa scusano l'assenza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 18 gennaio 1902.

Il Presidente, comunicando il decreto 21 dicembre 1902 col quale fu approvata la sua nomina, saluta i colleghi presenti ed assenti della Classe ed augura in particolar modo prosperità al venerando Vice-Presidente, il quale risponde ringraziando in nome proprio e della Classe.

Quindi il Presidente comunica il decesso del Socio corrispondente della Sezione di Filosofia Eugenio Rendu, seguìto il 23 gennaio u. s. Egli era Socio corrispondente dell'Accademia dal 30 giugno 1859. Il Presidente lo commemora brevemente.

Il Segretario fa omaggio del vol. II, sez. 1ª dell'opera del prof. Ulisse Manara, *Delle società e delle associazioni commerciali,* Torino, Unione tip.-editrice, 1902. Il Socio Chironi, che ha già presentato il I vol. dell'opera del Manara, mentre si riserva di ritornare su di essa, ne dice parole di elogio.

Il Socio Carle fa omaggio alla Classe del *Manuale di filosofia del diritto,* del prof. Vincenzo Lilla, Milano, 1903, esponendone brevemente il contenuto ed i pregi col seguente giudizio:

Il Prof. Vincenzo Lilla della R. Università di Messina, già noto alla Classe per altre sue pubblicazioni filosofiche, mi ha incaricato di presentare un suo recente volume col titolo: *Manuale di filosofia del diritto,* Milano, 1903, Società Editrice Libraria, pagg. 612.

Nota l'autore che la filosofia del diritto in questi ultimi tempi ha attraversato una lunga crisi, la quale ha posto a repentaglio la sua esistenza come insegnamento speciale nella Facoltà giuridica: ma che essa è pervenuta ora a superarla, uscendone rinvigorita e ringiovanita mediante il contatto fecondo cogli studii storici e sociologici. Ormai scompare il preteso antagonismo fra la filosofia del diritto e la sociologia contemporanea e si viene riconoscendo all'una e all'altra un proprio còmpito ed una propria funzione. Ne consegue che la filosofia del diritto nel suo indirizzo odierno non deve più fondarsi esclusivamente sul ragionamento astratto, ma deve valersi largamente degli studii storici e sociologici e tener anche dietro allo studio del diritto positivo, cercando di metterne in rilievo il fondamento etico o razionale (pag. 11). Il Lilla quindi si dichiara seguace convinto della scuola filosofico-storica di Giambattista Vico e ritiene con questo che il diritto naturale e positivo, anzichè essere in antagonismo fra di loro, si debbono reciprocamente integrare e convertirsi l'uno nell'altro.

Per quanto breve e concisa la trattazione del Lilla appare organica e coerente in tutte le sue parti. — Essa comprende:

1° una introduzione generale in cui egli discorre del concetto, del metodo, dell'importanza della filosofia del diritto, ed espone la sua dottrina circa il fondamento etico e l'origine del diritto ed intorno ai rapporti fra diritto naturale e positivo;

2° la teoria filosofica del diritto privato, in cui parte dal concetto di persona e dall'analisi dei diritti spettanti alla medesima, per venire alla teoria della persona giuridica, arrestandosi poi più specialmente alla trattazione del diritto di proprietà e del diritto di famiglia;

3° e infine la teoria filosofica del diritto pubblico, la quale, ancorchè meno sviluppata, contiene però una esposizione chiara ed ordinata delle idee dell'autore circa la teoria generale dello Stato, e circa al fondamento razionale del diritto costituzionale, amministrativo, penale ed internazionale.

Il lavoro del Lilla, pur essendo di carattere elementare, è dettato con grande coscienza ed amore, e dimostra il lungo studio che l'autore ha fatto intorno ai problemi filosofici del diritto. Egli ha cercato di richiamare la filosofia del diritto al suo vero còmpito senza perdersi in divagazioni troppo astratte, ha cercato di integrare la trattazione del diritto privato con quella del diritto pubblico; e, senza avversare le tendenze scientifiche contemporanee, si è proposto di rannodarle alle tradizioni del passato nella parte in cui queste meritavano di essere mantenute.

Il piccolo volume del Lilla è grandemente opportuno e potrà essere utile non solo alla gioventù studiosa, ma anche ai provetti in quest'ordine di studii.

Il Socio Chironi tributa molta lode agli scritti del prof. Vittorio Polacco, che presenta, e le parole da lui pronunziate saranno in seguito inserite negli *Atti*. Le opere del Polacco presentate sono le seguenti: *Della divisione operata da ascendenti fra discendenti,* Verona-Padova, 1885; *Della dazione in pagamento,* vol. I, Padova, 1888; *La questione del divorzio e gli Israeliti in* Padova-Verona, 1894; *Le obbligazioni nel diritto civile italiano, Italia,* Padova-Verona, 1899; più trenta opuscoli d'argomento giuridico, i cui titoli figurano specificati nell'elenco a stampa dei doni.

Il Socio Pizzi presenta per la inserzione negli *Atti* una sua nota col titolo: *Il trattato persiano " Esposizione delle Religioni „ di Abû 'l-Maâli.*

LETTURE

Il trattato persiano " Esposizione delle Religioni „ di Abû 'l-Maâli.

Nota del Socio ITALO PIZZI.

Avvertenza. — Il regno dei Califfi Abbâssidi (750-1258 d. C.) va segnalato in particolar modo per le lunghe e frequenti dispute, tenute alla loro corte di Bagdad e altrove, in materia di religione e di filosofia, e per le numerose opere, in arabo e in persiano, che in quel tempo furon composte intorno a questi due gravi argomenti, laddove il regno dei loro predecessori di Damasco, i Califfi Ommiadi (661-750 d. C.), più che della religione si curò della politica e dell'amministrazione dello Stato. Questi furono Musulmani nel vero senso della parola, perchè il Profeta aveva detto: " Voi dovete obbedire a Dio, non disputare intorno alla essenza di Dio „. Quelli invece, avendo accolto tra i loro studi anche la teologia e la filosofia, di credenti ciechi si fecer teologi capziosi e filosofi sillogizzanti, per cader poi nel panteismo e nel materialismo. E appartengono appunto al loro tempo le dottrine panteistiche che vennero da noi nel Medio Evo sotto il nome di filosofia araba (1). Dilettavansi, questi Abbâssidi, del far disputare in lor presenza non solo i cultori delle scienze esatte e delle naturali, ma anche i filosofi e i teologi professanti or questa or quella religione, musulmana, cristiana, giudaica, zoroastriana, e uno dei più celebri esempi si è quello di Abâlîsh, che fu sacerdote zoroastriano, disputò in favore della sua fede nel cospetto del Califfo Al-Mamûn (813-833 d. C.), e, ridotto al silenzio,

(1) Non era araba che nella lingua (lingua dotta di quel tempo era appunto l'araba), ma d'origine greca o alessandrina. La maggior parte dei così detti filosofi arabi sono, invece, persiani, come p. e. Avicenna. Vedi la mia *Storia della Poesia persiana*, cap. IX.

ebbe in pena la morte. Veggasi appresso, poichè l'autore di cui intendiamo ora parlare, ne fa un cenno, una nota in proposito.

Copiosissima poi, per non dire infinita, è la letteratura che si connette a tutto questo movimento intellettuale. Prevalgono di numero e d'importanza i libri scritti in arabo, sebbene quasi tutti di scrittori persiani, come, per esempio, quello di Al-Shahristâni ch'era del Khorassan, morto nel 1153: *il Libro delle religioni e delle sette* (1). Ma non mancano quelli scritti in persiano come quello attribuito ad un Murtadha della prima metà dell'XI secolo che reca in arabo (secondo l'uso dei libri persiani) il seguente titolo: *Ciò che drizza lo sguardo ai più nella conoscenza delle dottrine religiose delle diverse genti* (2). Al quale sta degnamente accanto quest'altro di cui parliamo e che gli è contemporaneo: *il Libro della esposizione delle religioni* (3). Queste due si possono considerare come le più antiche opere persiane che, pur con molti errori, si sono provate a ricompor la storia delle religioni passate e delle contemporanee per soddisfare ai bisogni ognor crescenti della indagine teologica e filosofica; e se ne composero molte altre nei secoli susseguenti, e taciamo delle altre innumerevoli, o mistiche e ascetiche, o razionaliste e panteiste, che si dilungano da queste essenzialmente storiche, sebbene con intento di disputa.

L'autore della *Esposizione delle religioni* era Abû 'l-Maâli Muhammed Ibn Obeyd-allâh, onorato del titolo d'*imâm*, parola araba che denota dignità e autorità in materia religiosa, discendente da Alì, genero del Profeta. Pare ch'egli vivesse alla corte di Ghasna nel Khorassan, alla celebre corte persiana che già aveva veduto la gloria militare e civile di Mahmûd e la poetica di Rûdeghi e di Firdusi, e che ora, verso la fine del secolo XI, occupavasi di lunghe discussioni teologiche nel cospetto d'uno dei discendenti di esso Mahmûd, cioè Abû Saîd Masûd, che regnò dal 1089 al 1099. In servizio del principe e de' suoi filosofi e teologi disputanti, il nostro Abû 'l-Maâli compose il suo libro dividendolo in cinque parti.

---

(1) In arabo: *Kitâb al-milal va 'l-nihal* (Ed. W. Cureton. London 1846; trad. tedesca dell'Haarbrücker, Halle 1850).

(2) *Tabsirat al-'avvâm fi ma'rifat maqâlât al-anâm.*

(3) Titolo arabo: *Kitâb bayân al-adyân.*

Nella prima, egli intende di assodare questo principio: che ogni gente umana ha ammesso l'esistenza di Dio. Nella seconda, alquanto troppo alla breve va esponendo le opinioni religiose degli Arabi prima dell'Islamismo, quelle dei Giudei, dei Samaritani, dei Cristiani, dei Zoroastriani, degli Indiani, dei filosofi atei, dei sofisti. Daremo appresso, sebbene non per intero, la traduzione di questa seconda parte. La terza è intesa a dichiarare quale sia il vero senso di quelle parole che la tradizione attribuisce a Maometto e che suonano: " Dopo di me, il popolo mio sarà diviso in settantatrè sette religiose ". La quarta tratta delle due principali sette musulmane, della sunnitica o ortodossa e della shiitica o dei partigiani di Alì. La quinta, secondo l'intendimento espresso dall'autore stesso, doveva dar notizia di tutti quelli che vollero farsi credere o profeti, o una incarnazione di Dio, o Dio stesso, o il Messia; in una parola, degl'impostori. Ma o essa è andata perduta, o Abû 'l-Maâli, per qual ragione non si sa, non l'ha composta. E sarebbe per noi documento prezioso per questa materia veramente molto oscura e controversa. Certo è che non si trova nel manoscritto su cui lo Schefer (1) ha fatto l'edizione dell'importante operetta, che è anche la prima edizione europea.

Quantunque l'illustre editore ne parli con molta lode, noi non crediamo ch'essa abbia molto merito in sè. È valevole documento per sapere qual conoscenza si aveva in Oriente, in generale, ai tempi dell'autore, della storia delle religioni; come se ne apprezzavano e giudicavano le dottrine; che stima si faceva dei loro fondatori e dei loro libri sacri. Ma, al di là di tanto, non è essa, a parer nostro, che una povera e smunta compilazione (la forma poi vi è misera e pedestre, senz'alcun pregio d'arte) dalla quale appare che le scarse notizie, accattate qua e là, sono rese anche più misere dalla fretta e dal desiderio di abbreviare e di raccorciare. Che poi Abû 'l-Maâli fosse uomo erudito e dotto, s'intende dalle fonti che cita, dai giudizi che dà, dal riferire qualche volta i testi sacri d'altri popoli nella lor lingua originale, la Bibbia in ebraico, l'Avesta in zéndo, certe preghiere cristiane in siriaco; ma ciò non lo scusa dell'aver confuso molte cose, dell'essere incorso in molti errori, ripetuti anche,

(1) Nella sua *Chrestomathie persane* (vol. I. pag. 132-171), Parigi 1883.

dell'aver tenuto conto di fatti minimi e trascurato molti altri importanti, dell'aver messo insieme cose che insieme non stanno. Ciò si vedrà manifesto dal saggio che sotto riferiremo tradotto. Forse lo scusa, ma in parte soltanto, perchè egli, dotto, poteva informarsi meglio, il fatto che la conoscenza sua della storia delle religioni e il modo suo di giudicarne sono quelli stessi degli altri dotti del suo tempo, nè egli poteva far di più, nè a noi è lecito pretender troppo. Quanto poi a certo disordine del suo scrivere, potrebbe darsene la colpa ai copisti. Il testo, infatti, sembra esser guasto in più d'una parte. Ad ogni modo, giudichino gli studiosi. L'opera non fu mai tradotta, ch'io sappia, in alcuna lingua europea, e questo mio, benchè modesto, è il primo saggio d'una traduzione.

Opinioni religiose anteriori all'Islamismo

(dal cap. II del Trattato persiano *Esposizione delle religioni* di Abû 'l-Maâli).

Opinioni religiose degli Arabi. — Abû Isa 'l-Varrâq (1) asserisce, nel libro suo, che una parte degli Arabi antichi credeva nel Creatore e nella risurrezione dei morti, ma non già nei profeti (pace a loro!) e che il figlio di Zobeyr Ibn Abî Solma argomentava così: " Si procrastina e si affretta in ogni libro religioso; ma si procrastina per il giorno del giudizio ovvero si affretta. La punizione però toccasi nel mondo presente! „ (2). Altri invece adoraron già gl'idoli, nè stimarono essere stato Creator del mondo nessun altro fuor che un idolo. Altri tenevano cotesti loro idoli nel santuario della Kaaba (3) e a ciascun d'essi avevan posto un nome. Iddio altissimo ha riferito il nome d'alcuni d'essi nel suo Corano glorioso. Dice infatti: " Voi non dovete abbandonare le divinità vostre; non abbandonate nè Vadd nè Suvâ', non Yaghûth, non Yaûq, non Nasr! „ (4).

---

(1) L'autore qui citato era apparentemente musulmano, ma segretamente manicheo (*Kitâb al-Fihrist*, pag. 338, Schefer).

(2) Non so se io abbia inteso a dovere l'oscura argomentazione, in arabo, del miscredente figlio di Zobeyr, cioè Kaab, che fu poeta come suo padre, e poi, fattosi musulmano, compose una celebre canzone in lode del Profeta.

(3) È il celebre santuario alla Mecca che Maometto mantenne e rispettò pur atterrando di sua mano gl'idoli ivi già posti dagli Arabi.

(4) *Corano*, 71, 22-23. Son parole poste in bocca a certi capi d'idolatri come rivolte da loro ai loro soggetti. Gli strani nomi son nomi d'antichi idoli dei quali si sa ben poco.

E in altro luogo dice: " che vi pare di Al-Lât e di Al-Uzza e di Manât, terzo fra loro? „ (1). Poichè Iddio altissimo ha rammentato qualche nome di tali idoli, noi pure rammentiamo il nome degl'idoli d'ogni tribù secondo che son rimasti noti, acciocchè sappiasi dal lettore che Suvâ' era la divinità dei Benî Hudheyl (2), che Vadd era quella dei Benî Kalb, che Yaghûth era di quelli di Hamdân, Nasr dei Benî Kilâ'; che, nel territorio di Himyâr (3), Yaûq era di quei di Madhig' e del Yemen, e Dûmat al-Ǵandal (4) n'era il confine; che Lât era di quei di Thaqîf, che, nel territorio di Tâif, Uzza era di quei di Qoreysh e di quei di Kinâna, che Manât era di quei di Aus, di Khazrag' e di Ghassân. Solevasi porre nella Kaaba l'idolo di Hubal che era il maggiore dei loro idoli. Asâf, invece, e Nâila li avevan posti in Safa e in Marva. Sa'd era l'idolo dei re di Kinâna. Oltre questi ve n'erano altri molti, proprî, ciascuno, di ciascuna tribù, come ora abbiam detto.

Invece, altre fra le tribù arabe professavano l'ateismo ed erano fataliste secondo che Iddio altissimo ha pur notato di loro nel Corano: " Non v'è altra vita se non questa del mondo. Noi moriamo, noi viviamo, e nulla ci fa perire se non il Fato „ (5). Disse già un loro poeta, negando la riunione dei morti per il giudizio finale e il giorno della risurrezione:

Noi rivivrem! l'Apostol (6) ci assicura.
Ad ossa e a cranî come mai si addice
Vita futura?

Alcuni altri poi fra loro adoravano gli Angeli e asserivano ch'essi sono le figliuole di Dio altissimo. Iddio, invece, dice: " Oh! Egli è ben più alto e più grande di ciò che affermano! „. Iddio altissimo ha fatto menzione di loro dicendo: " Essi attribuiscono a Dio delle figliuole! Oh! gloria a Lui! „ (7). Altri, invece, credevano nella risurrezione come già ebbe a dire uno dei loro poeti:

(1) Altri nomi d'idoli. *Corano*, 53, 19-20.

(2) Cioè dei figli *(benî)* di Hudheyl. Questo e i seguenti son nomi d'antiche tribù dell'Arabia centrale, tribù beduine.

(3) Dell'Arabia meridionale.

(4) Nome d'un castello a sette giornate da Damasco, detto dall'autore erroneamente (o è errore del copista) Rumat al-Ǵandal.

(5) *Corano*, 23, 39. Parole poste in bocca a questi atei. Veramente il testo comune, in ultimo, ha: " Noi non sarem punto risuscitati! „.

(6) Maometto.

(7) *Corano*, 16, 59. " Gloria a Lui! „, nel senso ch'Egli è superiore a tante favole.

Figlio mio, quand'io muoia e tu sollecito
Provvedi al caso mio!
Comodi arcioni manda e una cammella
Appo il sepolcro mio.
Al levarsi dei morti, io vo' montarla
Quando dirassi: Uscite,
Uscite insieme tutti, all'assemblea
Partecipi di Dio (1).

Alcuni, tuttavia, furon di fede musulmana (2), e fra le tradizioni (3) trovasi pur questa, secondo cui fu già un uomo che chiamavasi Tobba' Ibn Koleybkarib di Himyar, anteriore al profeta Maometto (a lui la pace!), che pur credeva in lui e che, appunto in questo senso, aveva composto certa poesia. Essa diceva:

Testifico d'Ahmèd (4) ch'egli è di Dio
L'apostol genuino.
Se al viver suo toccasse il mio, sarei
Suo ministro e cugino (5).

Di tutti questi fu pure Quss Ibn Sâida Al-Iyâdi che fu giudice fra gli Arabi. Il Profeta (a lui la pace!) diceva: " Io l'ho veduto, nel mercato di Okâz, montato su di un cammello rosso, ed egli pure predicava alla gente „. Ma questo racconto è troppo lungo (6). Ci basti che il Profeta (a lui la pace!) ne fece l'elogio. Abû Qeys Sarma Ibn Abî Anas era dei Benî Naggiâr. D'adorare gli idoli, non voleva saperne. Ridusse a moschea la sua propria casa e soleva dire: " Io adoro il Dio d' Ibrâhîm „ (7). Quando poi venne il Profeta (a lui la pace!), credette in lui ed ebbe alto grado nell'Islamismo (8). Che Iddio si compiaccia di lui! Khâlid Ibn Sinân era

---

(1) Son versi di Khudheyma Ibn al-Eytham, da lui rivolti a suo figlio Saad (Sa'd) a modo di esortazione e di testamento.

(2) Prima ancora dell'Islamismo. Cioè vi credettero in antecedenza e aspettarono un Profeta come i Patriarchi della Bibbia, aspettando il Messia, mostrarono di credervi.

(3) Parole e sentenze del Profeta che non sono nel Corano, ma che, accertate da autorevoli mallevadori, hanno valore dogmatico per i Musulmani. D'esse, in gran parte, è costituita la *sunna* o dottrina ortodossa, fondamento della giurisprudenza musulmana.

(4) Nome equivalente a quello di Muhammed o Maometto.

(5) Nel senso di *amico, consigliere, compagno.*

(6) Quss era un vescovo dei Cristiani del Neǵrân in Arabia, celebre per la sua eloquenza, divenuta proverbiale fra gli Arabi. Non era adunque musulmano.

(7) Abramo Patriarca.

(8) Aveva abbandonato il culto degl'idoli per farsi cristiano, ma poi si fece musulmano. È noto che, poco prima di Maometto, molti personaggi eminenti tra gli Arabi s'eran dati attorno per cercare una religione più razionale, stanchi omai dei loro idoli.

dei Benî Abs Ibn Bueyth (1). Anche prima del Profeta (a lui la pace!) egli ne professava la fede, mentre esso Profeta (a lui la pace!) non era ancor nato dalla madre sua quand'egli credette in lui. Fu ucciso, ma la figlia di lui, come vide il Profeta (a lui la pace!), gli credette. Anche Nâbigha Ibn Abî Salb Al-Thâqifi (2) non voleva saperne del culto degl'idoli e andava dicendo: " Apparirà un Profeta, ed è prossimo il tempo della sua venuta! „. Sahbân (3) pensava d'essere egli appunto quel profeta, e però quando apparve l'Apostolo nostro (piacciasi Iddio di lui e gli dia pace!) e si rese pubblica la sua vocazione alla profezia, n'ebbe invidia, non volle credere e morì senza religione (4). Altri lesse nel cospetto del Profeta (pace a lui!) le poesie di lui, ed egli disse: " Oh costui! La sua lingua è credente, ma il cuore n'è miscredente! „ (5). Omar Ibn Nufeyl, Amir Ibn al-Zarb al-Advâni il saggio, e Amr Ibn 'Yazîd al-Kalbi (6), questi tre desideravano che la durata della lor vita potesse protrarsi di tanto da giungere al tempo del Profeta (a lui la pace!) perchè essi potessero credere in lui. Tutti e tre però moriron prima.

Alcuni altri degli Arabi erano indovini, quali Satîh e Shiqq (7), e son noti a tutti i loro casi. Altri erano giudei come gli abitanti di Kheybar, e altri erano cristiani come i Benî Ghassân e i Benî Thalab, e altri erano zoroastriani come i Benî Temîm e i Benî Abs.

Poichè abbiam terminato di enumerar tutte queste opinioni religiose, esporremo ora, se Iddio eccelso e glorioso vorrà, le opinioni dei filosofi.

Opinioni religiose dei filosofi. — Aristotele, a proposito di Platone suo maestro, riferiva ch'egli era stato discepolo di Socrate. Il quale soleva dire che l'opinione dei maggiori e più illustri filosofi che furon già i Savi del tempo antico, quali Aghadîmûn, Hermes, Pitagora (8) e altri ancora, asserivano che Iddio altissimo è un Essere eterno, perfetto, in-

---

(1) Il vero nome è Gheyth. Errore o dell'Autore o del copista.

(2) Nome errato. Trattasi, invece, del poeta Omeyya Ibn Abî Salt, che da alcuni si crede cristiano.

(3) Costui era reputato l'uomo più eloquente degli Arabi.

(4) Senza religione vera, che, secondo l'Autore, è la musulmana.

(5) Parole in arabo, come le altre di sopra poste in bocca al Profeta.

(6) Vedi, intorno a questi personaggi che ebbero alte cariche civili e militari, Caussin de Perceval, *Essai sur l'Histoire des Arabes*, I, p. 323; II, p. 259-262.

(7) Satîh, celebre indovino, che visse, si dice, 300 anni. Shiqq predisse la venuta d'un profeta che avrebbe assoggettato tutti gli Arabi.

(8) *Aghadîmûn* è il greco Ἀγαθοδαίμων, il buon Genio, qui diventato un sapiente. Hermes, s'intende, è Mercurio, diventato anche lui un sapiente. Il nome di Pitagora è reso, nel testo, per *Feythaqurs!*

defettibile, causa delle cause, origine delle origini. Essenza pura, facitore delle cose tutte. Iddio vero, tutto benefico, increato, non rappresentabile, incomprensibile, senza contrapposto, senza uguale, senza pari, non bisognoso di compagni. Reputavano esser dovere di ciascun uomo di favellare di Dio altissimo con l'atto della maggiore glorificazione ed esaltazione, e ritenevano per necessaria l'abluzione con acqua dopo un bisogno corporale quando non ne venga danno alla salute, obbligo tuttavia per i sani in quanto conferisce al buono stato della persona. Stimavano esser cosa degna della gente per bene l'agricoltura e onoravano assai chi l'esercita. Avevano fra lor leggi e costumi quello anche dell'imparar le scienze e la sapienza (1). Non uccidevano alcun animale se non quello da cui vengon danno e offesa alla gente. Onoravano i principi e pagavan loro il decimo e il quinto delle rendite. La loro opinion religiosa era una credenza negli spiriti asserendo che l'Essere universale è uno spirito e che ogni spirito umano n'è una particella. Questo spirito, ch'è una particella, entra in un corpo umano per esservi purificato, indi ne esce e ritorna all'Essere universale. Quello che ne esce ancora impuro, resta nell'atmosfera e non può ritornare all'Essere universale (2).

Opinioni religiose dei Giudei. — I Giudei s'accordano in ciò che il Creatore è uno solo; ma alcuni fra essi, in riguardo a Dio, sono antropomorfisti e professano l'antropomorfismo mentre altri non lo professano. Credono nella profezia di Mosè, di Aronne e degli altri profeti (a loro la pace!) che li precedettero, e credon pure in quei profeti che, come Giosuè e altri come lui, furon della religione di Mosè e di Aronne. Ma negan fede a Gesù e a Maometto (ad ambedue la pace!) e credono nel libro della legge mosaica, nei salmi e nei diciannove altri libri di Dio (insigne la gloria sua!). — *Opinioni dei Samaritani.* Questi non credono che nella legge mosaica e in tre profeti: Mosè, Aronne e Giosuè figlio di Nûn (a loro la pace!). — *Gli Anânei* (3). Fu già un tale della famiglia di Davide (a lui la pace!) che era chiamato Anâni il pio; altri, invece, lo chiamava Aâni (A'âni). Attirò a sè molta gente dei Giudei. — *I Pastorali* (4). Questa setta ebbe origine da uno di essi Giudei che comparve fra loro e si riprometteva di far gran cose. — *L'Esilarca* (5).

---

(1) Scienze esatte e naturali, e scienze morali. Così all'ingrosso.

(2) Gran confusione e disordine! Si vede che il nostro Autore e le sue fonti ne sapevan ben poco dei filosofi greci.

(3) Non ho trovato nulla intorno a questa setta religiosa, e l'Autore mostra di saperne ben poco.

(4) Chi sono? Ripeto ciò che ho detto nella nota antecedente. Il titolo della setta è arabo: *Al-Râ'iyyah.*

(5) È il capo dei Giudei nel Medio Evo in Oriente, detto con locuzione caldaica: *Rêsh galâthâ*, cioè il capo degli esuli, esilarca.

È questo il nome del Capo dei Giudei che credesi aver origine nella discendenza di Davide (a lui la pace!). Il segno peculiare di lui presso di loro si è ch'egli abbia tanto lunghe le braccia che la punta delle dita oltrepassi la sommità del ginocchio quand' egli stende in giù le mani. — *Habr*. È questo il nome dei loro maestri (1). — *Râhib*. È un monaco (2). Il plurale, in arabo, dei due nomi è *aḥbâr* e *ruhbân*. I *qissîs* sono come i *ruhbân*. Iddio altissimo dice: " Hanno assunto per lor signori lor rabbini e lor monaci „ (3). — *La Bibbia degli Ottanta* (4). È la Bibbia per la quale un re de' Giudei raccolse ottanta tra dottori e monaci e li richiese poi di tradur la Bibbia. Assegnò a ciascuno, per cotesto, un luogo separato. Quando poi quella versione fu al termine, si trovò che gli ottanta interpreti s'accordavano perfettamente l'uno con l'altro e che non v'era differenza alcuna fra loro, I Giudei la dicono la Bibbia degli Ottanta, ne fanno una gran stima ed essa è per loro il loro giuramento più solenne (5).

Opinioni religiose dei Cristiani. — Essi affermano che il Creatore è una Sostanza unica in tre Persone, e queste tre Persone distinguono così: Padre, Figliuolo, Spirito Santo (6). Si dividono in tre sètte: Giacobiti, Nestoriani, Melchiti. — *Giacobiti*. Questi provengono da un tale che aveva nome Yaqûb (7), ma chi illustrò e dichiarò la dottrina di lui, fu un loro vescovo chiamato Matta Ibn al-Temîm Giacobita (8). Sostengono essi che il Creatore, sotto un aspetto, è eterno; sotto altro aspetto, è creato. Nella prima qualità, è una *lâhût*, cioè una Divinità; nella seconda, è una *nâsût*, cioè una umanità (9). Iddio altissimo è ben supe-

(1) I Rabbini, ma la parola *ḥabr* è araba e significa sapiente.

(2) Anche *râhib* è parola araba. Si noti la confusione delle cose. Gli Ebrei non ebbero mai monaci, e *râhib* designa sempre il monaco cristiano. Ma l'errore dell'Autore proviene da un passo del Corano, da lui citato e riferito appresso. Veggasi, inoltre, come egli attribuisca agli Ebrei anche i *qissîs* (parola d'origine siriaca, *qashîshâ*, lett. *anziano*, ὁ πρεσβύτερος), che sono i sacerdoti cristiani.

(3) *Corano*, 9, 31.

(4) Altro strafalcione. È la Bibbia dei Settanta. E ne segue un altro maggiore, quello del re dei Giudei, promotore della versione.

(5) Vedi Castelli, *Gli Ebrei*, pag. 196, che conferma questa grande stima da parte degli Ebrei per questa versione.

(6) L'Autore riferisce nel testo, per designar le tre Persone della Trinità, le tre parole siriache usate dalla Chiesa cristiana d'Oriente, essendo la siriaca la lingua liturgica di questa Chiesa.

(7) Giacomo, vescovo di Edessa nel 541.

(8) Matteo, vescovo di Aleppo nella prima metà del VII secolo.

(9) Altre due parole siriache sebbene alquanto storpiate.

riore a tutto ciò e più grande! (1). — *Nestoriani.* Questi provengono da un tale che era chiamato Nestorio (2). Asseriscono che il Figliuolo è nato dal Padre non per modo di generazione, ma come la luce procede dal sole mentre il sole non scema mai di luce. Altri fra loro sostengono che il Messia era un Essere (3) nel cui spirito era discesa la potestà angelica di Dio altissimo e la virtù di Lui, ch'Egli era dio e uomo, ungente insieme e unto, e che perciò appunto era detto il Messia (4). — *I Melchiti.* Questi provengono da un certo Malka (5), e la maggior parte dei Cristiani sono di questa setta dei Melchiti. Sostengono che il Messia è una unica sostanza pura quale entrò per un orecchio nel seno di Maria e ne uscì dal fianco destro, nè fece con essa alcuna azione men bella. Asseriscono perciò che lo Spirito Santo entrò in Maria allo stesso modo con cui entra l'acqua in un acquedotto, e che chiunque di noi si astiene da ogni cibo corporale, vede Iddio, di cui ben grande è la gloria! — *Heykal* (6). Così chiamano il luogo in cui vanno ad adorare, e in esso hanno dipinto le immagini dei Profeti e l'immagine di Gesù (a lui la pace!). — *Lor modo di operare in riguardo alla religione e alla guerra.* Le dignità più ragguardevoli presso di loro sono i Patriarchi (7), e ne hanno avuto sempre quattro, dei quali il primo risiede a Costantinopoli, il secondo a Roma, il terzo ad Alessandria, il quarto ad Antiochia, e chiamano cattedre (8) questi quattro luoghi. Il Metropolitano (9), invece, è da meno del grado di Patriarca, e la sua residenza è nell'Impero musulmano, cioè a Bagdad, sede del Califfato. È soggetto al Patriarca di

(1) Espressione (in arabo) di orrore per le cose dovute dire, da un musulmano, sul conto di Dio.

(2) Eresiarca, patriarca di Costantinopoli nel 428, siro di nazione.

(3) Così per congettura. Il testo ha una parola araba: *nubdhat*, frammento, particella, atomo.

(4) È noto che *Messia* (ebr. *mashîaḥ*) significa l'*Unto di Dio.*

(5) Altro sproposito. Un Malka non è mai esistito, ma è nome siriaco per dire re, imperatore, e i Melchiti sono Cristiani scismatici d'Oriente che seguono i canoni del Concilio di Calcedonia, radunato nel 451 dall'imperatore Marciano. Da ciò il loro nome. O forse la fonte siriaca da cui venne questa notizia, diceva soltanto *malkhâ*, cioè l'Imperatore, e non altro; e la parola fu intesa come nome proprio.

(6) Parola araba, ma venuta in arabo dal siriaco *(hayklâ)*. In ebraico, è pure *hêkhâl*, tempio.

(7) L'Autore confonde *batriq*, patrizio, generale bizantino, con *batrak*, patriarca. Da ciò lo strano titolo del paragrafetto e la confusione in ciò che vi si legge.

(8) Così, alla lettera. S'intende chiesa cattedrale.

(9) Il Metropolitano caldeo. Nel testo è detto *ǵâthalîq*, cioè καθολικός.

Antiochia. Il Primate è soggetto al Metropolitano, e sua residenza è nel Khorassan, e da lui son creati i vescovi d'ogni paese (1). I diaconi sono i discepoli dei preti. L'Imperatore poi lo chiamano ora il grande dell'Impero romano, ora il tiranno di esso, ora il cane (2). Bisogna ch'egli tenga seco dodici Patrizi (3), cioè dodici Generali, che comandano a dodicimila uomini. Sei di essi stanno sempre al suo fianco, mentre gli altri sei vanno attorno per le terre dell'Impero. Il Turungâr dipende dal Patrizio, e lo chiamano anche Fistiyâr. Ha con sè mille uomini a lui soggetti. Il Qûmis gli sta sotto, e ha al suo comando duecento uomini. Gli sta di sotto l'Istartig con quaranta uomini al suo comando, e a lui sottostà il Zâuć che ha sotto di sè dieci uomini (4).

Opinioni religiose dei Magi (5). — Fra le tradizioni trovasi pur questa secondo cui il Profeta (a lui la pace!) disse un giorno: " Dovete riconoscere nei Magi una dottrina religiosa quale di gente che ha ricevuto una rivelazione; ma non sposate le lor donne, non mangiate animali stati uccisi da loro „ (6). La loro fede è questa, ch'essi dicono che tutte le cose buone (7) vengono da Dio e tutte le cattive da Satana. Iddio altissimo essi chiamano Yezdân, e Satana chiamano Ahriman (8). Affermano che Yezdân è eterno fin dal principio e che Ahriman è creato. Il principio del genere umano dicono esser venuto da Gayûmerth (9), e raccontano che il Creatore, essendo sapiente, pensò a questa sua sapienza, e che da questo pensiero Ahriman ebbe origine (10). Oh! Iddio altissimo

---

(1) Cosa strana che, nell'Iran più orientale, fosse allora e prima un arcivescovo cristiano da cui dipendessero i vescovi del paese. Ma forse la notizia è erronea.

(2) Probabilmente altra confusione. O, piuttosto, il testo è guasto.

(3) Vedi una delle note antecedenti.

(4) L'Autore ha qui ricordato diverse dignità e cariche bizantine, cioè: il Πατρίκιος, il Δρουγγάριος, il Βεστιάρις, il Κόμης (il Conte, *Comes*), lo Στρατηγός, il Τζαούσιος. Quest'ultima è parola turca, *čâush*.

(5) Cioè dei seguaci di Zoroastro.

(6) Parole in arabo che l'Autore traduce nel suo persiano. Ommettiamo, s'intende, di ritradurre questa traduzione.

(7) Aggiungo questa parola: *buone*, di cui manca la corrispondente nel testo.

(8) È Anra Mainyu, il genio del male secondo l'*Avesta*. Il Dio del bene, qui detto Yezdân (Iddio), nell'*Avesta* è Ahura Mazdâo, cioè Ormuzd.

(9) Il Gaya-meretan dell'*Avesta*, primo uomo. V. anche Firdusi, *Il Libro dei Re*, vol. I, pag. 123-129 (della mia trad.).

(10) Ciò si riferisce (senza che l'Autore, come pare, lo sappia) ad un postulato della setta zoroastriana dei Zervâniti secondo i quali il Tempo Infinito *(zervâne akerene)* esisteva a principio. Da un suo pensiero dubbioso fu prodotto Ahrimane. Ciò non è zoroastrismo ortodosso, ma l'Autore l'ignora.

è ben superiore e più grande di cotesto! (1). Onorano e venerano il Fuoco e gli prestano culto. Non offendono l'acqua, cioè non la intorbidano d'alcuna cosa nè l'adoperano se non per bere. Fare allegria e ber vino reputano esser atto d'obbedienza a Dio. Inchinano il sole tre volte al giorno volgendosi verso quella parte in cui esso si trova. Quando mangiano, non dicon parola, ma pensano essere opera meritoria mormorar preghiere nel momento del mangiare. Si guardano dal toccar cadaveri. Credon leciti i matrimoni coi congiunti, con la madre, con le sorelle, con le figlie (2). Lapidano i sodomiti. Non pongono i morti nel sepolcro, ma li espongono all'aria in certi recinti. Chiamano *herbedh* il sacerdote addetto in particolare al culto del Fuoco (3).

Opinioni religiose di Zerdusht (4). — Dicono i Magi: " Noi abbiamo avuto un profeta di nome Zerdusht che ci ha dato le nostre leggi e recato tre libri che si chiamano *Zend, Pâzend, Avesta* " (5). Sono, in questi libri, certe parole oscure, ma molti di essi vi hanno apposto un commento e una interpretazione.

Religione di Mazdak (6). — Fu già un tale che apparve al tempo di Qobâd figlio di Fîrûzân (7), della città di Nasâ, detto Mazdak. Si vantò d'aver la profezia; abrogò parte delle leggi di Zerdusht e voleva comunanza di beni e di donne. Molta gente gli credette, e sua massima era questa, che i beni e le ricchezze, in origine, erano in comune per tutti, e che anche ora dovrebbe esser così. Ma Anûshirvân (8), venuto a disputar con lui, lo confutò e fece morire.

Religione di Mâni (9). — Costui era maestro nell'arte della pittura

---

(1) Solite esclamazioni in arabo di buon musulmano scandalizzato.

(2) Questi matrimoni erano inculcati appunto dall'*Avesta* come opera meritoria. Cambise aveva sposato una sua sorella. L'uso, contro cui tuonarono i Padri della Chiesa, procedeva dal desiderio di mantenere intatta da elementi stranieri la famiglia.

(3) Asserzione erronea, perchè l'*herbedh* persiano non è che l'*aéthrapaiti* dell'*Avesta* e significa *maestro spirituale*. Il sacerdote del Fuoco è, invece, l'*âtharvan*.

(4) Cioè Zoroastro che è il Zarathustra dell'*Avesta*.

(5) L'*Avesta* è il libro sacro di Zoroastro. Per *Zend* (erroneamente poi applicato da noi alla lingua dell' *Avesta*) s'intende il commento. Dicesi Pâzend ogni testo pehlevico trascritto in caratteri avestaici. Ma l'A. sembra voler dire tutt'altro.

(6) Vedi: E. Fr. De Salles, *Mazdac réformateur socialiste de la Perse Sassanide*, Paris, 1840; e Spiegel, *Erânische Alterthumskunde*, II, p. 232.

(7) Re di Persia dal 488 al 531 d. C.

(8) Cioè *anima immortale*, soprannome di Chosroe il grande, re di Persia dal 531 al 578 d. C.

(9) Manete, capo dei Manichei, penetrati nel Medio Evo fino in Occidente.

e apparve tra i Magi al tempo di Shâpûr figlio di Ardeshîr (1). Si vantò di esser profeta, e per prova di ciò recava innanzi l'abilità sua nello scrivere e nel dipingere. Raccontasi ch'egli, sovra un drappo bianco di seta, tirò una linea in modo che, detrattone un solo filo del tessuto, quella linea non fu più visibile (2). Compose anche un libro con diverse specie di figure che si chiamò poi *Arzheng i Mânî* e che ora si trova nei tesori regali di Ghasna (3). La sua dottrina è quella stessa di Zerdusht, ed egli professava il dualismo.

Religione dei dualisti. — Questi tutti sostengono Zerdusht avere affermato che due sono i Creatori; uno, la luce, che è il Creatore del bene; l'altro, la tenebra, che è il Creatore del male. Quanto di lieto, di splendido, di pio, di buono, v'ha nel mondo, va riferito al Creatore del bene, e quanto v'ha di reo, di turbolento, d'infermo, di tenebroso, va riferito al Creatore del male. Dicono però che ambedue i Creatori sono eterni fin dal principio. Stimano doveroso pagar la decima di ciò che ognuno possiede. Portano una veste per tutto un anno. Stimano illecito ritenere il cibo rimasto d'un sol giorno. Digiunano una settima parte della vita (4). Fanno quattro preghiere. Credono nel libro (5) di Adamo (a lui la pace!), in quello di Seth e in quello di Noè (a loro la pace!) e anche in quello d'un uomo d'India che chiamavasi Badavah (6), mentre il libro di Zerdusht era di Persia. Dicono che Mâni è il suggello dei profeti (7). Onorano però grandemente questo Badavah. I Sabei hanno le stesse opinioni religiose (8). — *Aneddoto.* Al tempo di Al-Mamûn (9) avvenne ch'egli permise che tutte le religioni si disputassero in sua presenza. Si presentò allora anche un teologo che professava questa dottrina del dualismo, e venne a disputare in favore della sua fede. Comandò Al-Mamûn di radunare tutti i teologi e dottori musulmani perchè disputassero con esso lui, ed egli, quando incominciò a parlare, disse: " Io penso che esista un Creatore del bene e uno del male, uno della luce e uno

---

(1) Cioè Sapore I, re di Persia dal 241 al 272 d. C.

(2) Espresso male per dire che, trattone quel solo filo di seta su cui Manete aveva tirato la linea, essa linea non fu più visibile.

(3) Vedi: Flügel, *Mani, seine Lehre und seine Schriften*, Leipzig, 1862; e Spiegel, *Erânische Alterthumskunde*, II, p. 195.

(4) Così, mi pare, alla lettera; ma non son certo d'aver colto nel segno.

(5) Credo si tratti di libri apocrifi.

(6) Nulla ho trovato intorno a questo personaggio.

(7) Cioè l'ultimo, talchè non ne verrà nessun altro dopo di lui. Espressione araba (*khâtam al-nabiyyîna*) che i Musulmani applicano, invece, a Maometto.

(8) Confusione e spropositi su spropositi.

(9) Califfo Abbâsside. Vedi l'*Avvertenza* premessa a questa traduzione.

delle tenebre. Di cose buone o ree d'ogni specie, di queste così opposte fra loro, è necessario che differente sia anche il rispettivo Autore, perchè la ragione non può ammettere che uno stesso Creatore faccia il bene e faccia anche il male „. E seguitava a dire con simili argomenti. Da tutto il consesso, allora, si levò un grido: " O Principe dei credenti (1), con un uomo simile non si deve disputare se non con la spada! „. Al-Mamûn, invece, stette qualche tempo in silenzio, quindi gli domandò: " Qual'è la tua dottrina? „. Rispose: " La dottrina mia è che vi son due Creatori, uno del bene, l'altro del male, e l'azione e creazione di ciascuno son manifeste in ciò che quale d'essi crea il bene, non crea il male, e quale d'essi crea il male, non crea il bene „. Disse Al-Mamûn: " Ciascuno dei due ha o non ha potere nell'azione sua? „. Rispose: " Ambedue hanno potere, ciascuno nell'azione sua, nè un Creatore può esser mai impotente „. Disse Al-Mamûn: " Dunque nessuna impotenza s'insinua in loro „. Disse: " No. Come potrebbe un Ente a cui si presta culto, essere impotente? „. Disse Al-Mamûn: " Gran Dio! Se il Creator del bene desidera che ogni cosa facciasi per lui e che il Creator del male non sia, ovvero se il Creator del male desidera che il Creator del bene non sia, possono essi toccare il fine di questo lor desiderio e intento, o no? „. Disse: " Non possono, perchè l'uno non ha potere sull'altro „. Al-Mamûn disse: " È manifesta adunque in ambedue certa impotenza, e l'impotenza non si addice alla Divinità „. Il teologo del dualismo rimase confuso, e allora Al-Mamûn comandò di metterlo a morte. Gli astanti gli fecer plauso (2).

Opinioni religiose degl'idolatri. — Quantunque già avanti siasi fatta menzione degl'idolatri e siansi ricordati alcuni nomi degl'idoli che son più celebri fra gli Arabi, intendiamo assegnare un paragrafo a parte per trattarne, perchè non v'è gente più stolida di questa che con le mani proprie tagliasi o legno o pietra e ne fa una immagine e poi la prende per sua propria Divinità e l'adora. Le loro sette sono molte fra gli Indiani, fra gli Arabi e altre genti. Dicono che principio del culto degli idoli fu questo, cioè che Hôsheng (3) ebbe già una figlia della cui bel-

---

(1) Titolo assunto dai Califfi da Omar I (634-644 d. C.) in poi.

(2) Non v'ha dubbio che questo è un ricordo, per quanto confuso e manchevole, d'una celebre disputa sostenuta appunto nel cospetto di Al-Mamûn da un sacerdote zoroastriano detto Abâlîsh. Se n'è conservato un testo in lingua pehlevica pubblicato dal Barthelemy, *Gujastak Abalish, relation d'une conférence théologique présidée par le Calife Mâmoun, texte pehlvi*, etc. Paris, F. Vieweg, 1887. Vedine una mia trad. ital. nel *Bessarione* (a. VII, v. III).

(3) È il re di cui Firdusi (vol. I, pag. 129-133 della mia traduzione) racconta l'invenzione del fuoco e di molte arti. Nell'*Avesta* è detto Haoshyanha.

lezza egli erasi invaghito. La fanciulla morì ed egli comandò che se ne dipingesse l'immagine in un tempio. Andava poi ogni giorno a contemplarla finchè gli venne necessità di far certo suo viaggio. Non potendo omai fare a meno di quella immagine della figlia, comandò che si facesse una statua conforme ad essa immagine; quindi, dovunque andava, la portava con sè. Quando venne il tempo suo ed egli morì, quest'uso dell'adorare immagini si sparse per il mondo (1).

Affermano gl'Indiani che coteste immagini ch'essi si son fatte nei loro monasteri (2) e nei loro templi, son fatte per dar modo di avvicinarsi (3) agli Angeli e ai Pianeti rappresentati da essi nelle immagini stesse, e però le adorano. Secondo ciò che dicono, il Santuario della Mecca è sotto l'influenza di Saturno; quello di Nav-behár (4), in Balkh, sotto quella della Luna, e così nominano sette santuarî, ciascuno dedicato ad uno dei sette pianeti. Chiamano pertanto adoratori degl'idoli quelli che son dati al culto degl'idoli (5). Un giorno, ve n'eran pure fra gli Arabi, ma oggi, a gloria di Dio, non v'è presso loro altra religione all'infuori della musulmana. Il Profeta (a lui la pace!) disse già: " Non accoglierai nella terra degli Arabi due religioni! „ (6). E però, necessariamente, gli Arabi son stati purificati d'ogni bruttura, e ciò per l'intimità con Dio e per l'intercessione del Profeta (a lui la pace!). Ma, in India, gl'idolatri son molti, e noi intendiam qui di accennare alla loro religione e alle loro sètte.

Sètte degl'Indiani. — Niuna gente ha tanta perspicacia e tanto ingegno per le cose anche le più opposte quanta ne hanno gl'Indiani, perchè nessuno è che sappia la medicina, l'astronomia, il calcolo così come essi conoscon queste discipline. Di queste, anzi, la medicina in particolare e la conoscenza dei semplici e delle varie specie dei medicinali e dei veleni e dei contravveleni, e l'astronomia e la scienza degli oroscopi e dei pronostici (7). tutto ciò dall'India è passato nel Khorassan e nel-

---

(1) Nulla di questa fandonia nel *Libro dei Re* di Firdusi e nell'*Avesta*.

(2) Intendasi monasteri buddhistici (pers. *behár* dal sanser. *vihâra*).

(3) Termine del misticismo musulmano (arab. *taqarrub*) nel senso di elevarsi in santità come accostandosi a Dio.

(4) Celebre tempio del fuoco a Balkh, già governato dai Barmekidi, nobile famiglia persiana che poi si fece musulmana e diede ai Califfi Abbâssidi i suoi più gloriosi ministri.

(5) L'osservazione è molto ovvia per non dir puerile.

(6) Precetto attribuito dalla tradizione al Profeta ed eseguito poi dal Califfo Omar I discacciando d'Arabia Cristiani e Giudei. Il testo delle parole di Maometto è, s'intende, in arabo.

(7) Se pure il testo va inteso così.

l'Irâqa (1) e in altri luoghi. È poi tutta loro propria la scienza della fisiognomonia e del penetrare nel pensiero altrui a tal grado che fanno impazzire un loro nemico e lo fanno morire (2). Io ho letto, a questo proposito, molte storie e racconti, ma non v'è utilità alcuna nel riferirle, massime in questo libro. Il loro ingegno adunque e la loro scienza sono a questo punto, mentre la stoltezza loro in fatto di religione e di legge divina è di tal misura che una gran parte di essi è idolatra, ed essi, per i loro idoli, si ammazzano e si gettano nel fuoco. Credono nella profezia di Adamo (a lui la pace!) e alcuni anche in quella d'Ibrâhîm (a lui la pace!). Altri negano il Creatore e sono fatalisti in religione. Altri adorano i Pianeti, e altri prestano culto a tutto ciò che si mostra piacevole ai loro occhi. Altri professano la dottrina della metempsicosi, e affermano che l'anima umana da un corpo passa in un altro. Abû Zeyd il sapiente (3) dice che, nella lor lingua, idolo si chiama *qâqalît* (4). Essi poi si fanno illecita la carne, in particolare quella di bue, e molti di loro non bevon vino, anzi lo credono illecito. Ciò di cui si cibano, sono erbaggi, non carni. Tengon però molto alla lealtà e alla giustizia. I loro asceti diconsi Brahmani.

La dottrina della metempsicosi. — Quelli che la professano, asseriscono che tutte le anime umane sono tutte uguali e che la metempsicosi è di quattro maniere, cioè per trasmigrazione, per metamorfosi, per degradazione, per materializzazione (5). Per ogni anima che esce da un corpo umano ed entra in altro corpo umano, dicono che ciò è trasmigrazione. Per ogni anima che esce da un corpo umano ed entra in un corpo di bruto, dicono che ciò è metamorfosi. Per ogni anima che esce da un corpo umano ed entra in un rettile della terra o in un insetto, dicono che ciò è degradazione; e per tutto ciò che entra in alberi o vegetali, dicono che ciò è materializzazione. Dicono infine che il mondo è infinito e divino (6) e che la punizione delle anime è in ragione delle colpe,

---

(1) L'antica Mesopotamia.

(2) Ora si direbbe per ipnotismo o per suggestione.

(3) Abû Zeyd Ahmed, della città di Balkh, del secolo X d. C., autore d'un'opera storica: *Al-badâ ra 'l-tarikh* (titolo arabo), cioè: *la Creazione e la storia.*

(4) Non so a quale vocabolo della sanscrita o di quale altra lingua indiana corrisponda questo strano nome.

(5) Non so se così vadano intese le quattro parole arabe (*naskh, maskh, faskh, raskh*, di strana assonanza) usate dall'autore nel suo persiano. Mi sono aiutato con ciò che viene appresso. Nè son certo che la traduzione mia: *le anime umane son tutte uguali*, vada bene. Il testo ha: *in jânhâ yakîst*, alla lettera: *queste anime sono una sola* (si pronunci il *j* alla inglese).

(6) È la dottrina panteistica indiana.

onde avviene che, se accade che muoia un violento, essi affermano che l'anima di lui entra in un giumento o in un topo o in una belva. Se invece il morto era di vita intemerata, l'anima sua entra in un uomo pio o diventa un Angelo. E questa è la peggiore di tutte le dottrine religiose.

Religione dei Sabei. — Professano questa religione alcuni dell'Impero greco che si chiamano Sabei (1), e *sabeo*, nella loro lingua, significa colui che passa da una religione all'altra (2). Tutti insieme però si dicono Sabei, e i loro capi furono Adâni, Aghadîmûn, Hermes e Solano, che fu avolo di Platone da parte di madre 3). D'essi tutti ha trattato Abû 'l-Hasan Nuveyzi (4) nei suoi *Compendi*. Fanno tre preghiere al giorno: la preghiera dell'alba, quella della mattinata, quella della sera. Fanno alle stelle fisse adorazione di devozione spontanea, ogni giorno a quella stella a cui quel tal giorno è consacrato, come, per esempio, il Sabato che appartiene a Saturno (5). Il lor digiuno dura trenta giorni interi per ogni anno..... Ogni quattro mesi sacrificano un gallo in onore degli astri; versano il sangue del gallo in una fossa, ma ne ardono le ossa e le penne. Non mangiano carne di cammello, di pernice, di colombo, e nemmeno pesci. Ammettono la pena delle anime per le colpe commesse secondo che già abbiam detto parlando della religione dei filosofi.

Opinioni religiose dei Qarmathi e dei Zindîq (6). — In ogni tempo sono stati uomini che, per leggerezza e stoltizia, hanno professato l'irreligione e hanno negato tutto. I Qarmathi appunto e i Zindîq e i Liberali (7) hanno pur tenuto parola per negare l'esistenza di Dio (che Dio

---

(1) Erano, cioè, della Mesopotamia o dell'Arabia, ma soggetti a Costantinopoli.

(2) Dev'essere una falsa etimologia volgare, tratta forse dall'arabo *ṣabâ*, inclinar dell'animo ad alcuna cosa; ma erronea sempre.

(3) Vedi una nota antecedente. Ma chi è Adâni?

(4) Chi sia questo scrittore, non so. Non c'è da pensare, per difetto di scrittura nel testo, a Nuveyri, posteriore all' Autore di quasi tre secoli (m. nel 1332).

(5) Che invece è un pianeta, non una stella fissa. Solita confusione di cose. Ma il testo probabilmente è guasto, massime in un passo che segue e che è inintelligibile, almeno per me, e però, al suo posto, ho messo dei puntini.

(6) Qarmathi, contadini socialisti di Mesopotamia dell'VIII secolo, che volevano la division delle terre e la comunanza delle donne. Furon fatti sterminare dai Califfi.

(7) Veramente si dovrebbe tradurre, se fosse in uso questa parola, *Licitari*, perchè la parola del testo *ibâḥatî* è un aggettivo persiano formato sul nome arabo *ibâḥat* che significa *far lecito ciò che altri crede illecito*. Io ho tradotto *liberali* nel senso cattivo di questa parola (come a dire i nostri

li maledica!). I Qarmathi si riferiscono ad un tale che chiamavasi Ahmed Ibn Qarmath (1), e i Zindîq a un Zindîq di Persia (2). Chiamano *zindîq* chiunque è della religione di lui (3). Così i Khurremdîni (4) sono una setta che s'è data ai piaceri e al vivere allegro e fra tutte le religioni si hanno scelta quella che a loro è piaciuta di più, e i Liberali son pure di questa opinione, eccetto che sono anche più sfrenati degli altri eretici da che dànno in comune anche le loro famiglie. Gli altri poi son pure una sètta, che, per questa stessa via, nega la Divinità.

I Sofisti. — I maestri di logica e di filosofia riferiscono nei loro libri che certi studiosi diconsi Sofisti, i quali credono che tutto ciò che noi vediamo, non abbia alcuna consistenza, ma ciò che vediamo nella veglia, sia uguale a ciò che vediamo nel sonno. Io poi, alla mia volta, ho udito che questo principio fu già posto dai maestri di logica, e che, in altri tempi, nessuno professò mai una simile opinione.

Tali erano i postulati, in materia di religione, dei popoli anteriori all'Islamismo. Ebbero, come si vede, opinioni diverse.

liberaloni). Aveva anche pensato di tradurre *liberi pensatori*, ma me lo ha vietato ciò che si legge appresso. Nè il tradur *libertini* andava del tutto bene.

(1) Contadino di Mesopotamia a cui un settario di tra gl'Ismailiti insegnò le dottrine socialistiche. Lo seguiron gli altri contadini. Vedi sopra. Ma questo punto storico è oscuro e controverso.

(2) Errore. La parola *zindîk* pers. (*zindîq* presso gli Arabi) viene dal greco γνωστικὸς e significa *eretico*. È noto che la filosofia gnostica, penetrata da Alessandria in Siria e in Persia, vi ebbe molto seguito.

(3) Ciò conferma la nota antecedente.

(4) Settarî persiani (*khurrem-dîn* significa, in persiano, *religione allegra*; da ciò il loro nome) che si rivoltaron più volte ai Califfi, che poi li sterminarono. La loro setta sembra essere uno svolgimento di quella di Mazdak. Vedi sopra.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Febbraio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Mosso, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Socio Guidi scusa la sua assenza.

Il Socio Camerano presenta a nome del Socio Barone Antonio Manno le opere seguenti inviate dall'Autore in dono all'Accademia: A. L. Donnadieu, Professore alla Facoltà libera di Scienze dell'Università di Lyon: *L'œil et l'objectif*, Paris, C. Mendel Éditeur; *La photographie des objets immergés*, Paris, Mendel éd.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione negli *Atti* accademici le: *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1902 all'Osservatorio della R. Università*, calcolate dal Dr. Efisio Ferrero.

Il Socio Grassi presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* accademiche un suo lavoro intitolato: *Sugli effetti della dispersione e della reattanza nel funzionamento dei trasformatori a corrente alternata*. La Classe all'unanimità dei votanti approva la stampa di questo lavoro nel volume delle sue *Memorie*.

Il Socio Morera, a nome anche del Socio Naccari, legge la relazione intorno alla memoria del Prof. Antonio Garbasso, intitolata: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce*; la relazione è approvata all'unanimità, e la Classe, pure a voti unanimi accoglie la memoria del Prof. Garbasso per la stampa nel volume delle *Memorie*.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata, procede alla nomina di un membro della Giunta per il premio Bressa e di un membro della Giunta per il premio Vallauri, in sostituzione del Socio D'Ovidio nominato Presidente dell'Accademia. Nella Giunta del premio Vallauri viene nominato il Socio Grassi e in quella del premio Bressa viene nominato il Socio Foà.

LETTURE

Passaggi dei lembi della Luna e determinazione dell'Ascensione retta del cratere Mösting A. osservati al Circolo meridiano di Torino negli anni 1901 e 1902

da VITTORIO BALBI e LUIGI VOLTA.

È noto come sia difficile osservare con precisione il passaggio del lembo illuminato della Luna; la difficoltà proviene per una parte dalle irregolarità della superficie lunare, per l'altra dall' inesattezza del valore del diametro da impiegare nelle riduzioni.

Per ovviare a questi inconvenienti il Maedler aveva proposto fin dal 1837 di osservare piuttosto un punto convenevolmente scelto della superficie lunare. Se questa proposta non ha trovato l' accoglienza che meritava è senza dubbio perchè la riduzione delle osservazioni di un cratere lunare sembrava cosa troppo delicata, a causa dell'insufficienza dei dati che si possedevano a quell'epoca sopra la grandezza della librazione fisica.

Ma quest'ostacolo non esiste più dopo le ricerche del Franz dell' Osservatorio di Koenisberg, ed a questo proposito non sarà inutile un breve cenno sulla teoria della librazione fisica della Luna.

È noto che se noi prendiamo a seguire le posizioni delle diverse irregolarità della superficie lunare, tosto ci si convince che la Luna rivolge sempre verso la Terra la medesima faccia, poichè le sue diverse particolarità conservano la stessa posizione rispetto al suo centro apparente. Ne consegue immediatamente da questo fatto reso facilmente manifesto dall'osservazione, che la Luna, contemporaneamente al suo moto di traslazione in virtù del quale compie la sua rivoluzione intorno alla Terra, è pure sollecitata da un moto di rotazione intorno ad un asse che

passa per il suo centro, intorno al quale compie una rotazione in un tempo uguale a quello impiegato per compiere una rivoluzione periodica.

Questo è un fenomeno stato riconosciuto da lungo tempo, ma non è che dopo l'invenzione del cannocchiale, che si è potuto determinare le leggi della librazione, cioè a dire di quelle oscillazioni che la Luna pare subisca attorno al suo centro, e per la quale, nel corso di ciascun mese, essa ci nasconde e ci scopre alternativamente, verso i suoi bordi, qualche parte della sua superficie. Galileo fu il primo ad accorgersi di questi movimenti libratorî e, pure dandone una plausibile spiegazione, pare non ne abbia conosciuto che una parte, quella che si fa perpendicolarmente all'eclittica e che si chiama librazione in latitudine. Hévélius scoprì in seguito la librazione in longitudine; ma era riservato a Domenico Cassini di dare una spiegazione generale e completa di questo fenomeno. Egli trovò che si poteva soddisfare a tutte le apparenze della librazione supponendo: 1° che la Luna roti uniformemente attorno ad un asse i cui poli, fissi sopra la sua superficie, sieno costantemente elevati sopra l'eclittica di 87° 30′ e sopra il piano dell'orbita di 82° 30′, e sieno sempre posti sopra un circolo massimo che giace nel piano del circolo massimo determinato dal polo dell'eclittica e dall'orbita lunare; 2° che la rotazione della Luna attorno al suo asse si compia nello spazio di 25 giorni e 5 ore, con un periodo eguale a quello del ritorno della Luna al nodo della sua orbita con l'eclittica.

In seguito ad una serie di osservazioni di diverse macchie della Luna, fatte durante gli anni 1748 e 1749, il Mayer trovò che il piano dell'equatore lunare è inclinato sul piano dell'eclittica di 1° 29′, che la sezione di questi due piani è sempre approssimativamente parallela alla linea dei nodi medî dell'orbita della Luna, in modo che il piano dell' eclittica cade tra i due piani dell'equatore e dell'orbita della Luna, e che la Luna rota sopra l'asse del suo equatore d' occidente in oriente, in modo che ciascun punto di quest'equatore ritorna al punto equinoziale lunare, in un tempo precisamente eguale a quello nel quale la Luna ritorna al nodo in virtù del suo movimento medio, cioè a dire nello spazio di 1 mese draconitico. Queste determinazioni, a parte i valori numerici, s'accostano con quelle del Cassini.

Tali sono le leggi della rotazione della Luna che il Cassini e il Mayer hanno dedotte dalle osservazioni, e che, essendo combinate con quelle del movimento attorno alla Terra, sono sufficienti per determinare in ciascun istante la porzione apparente del disco lunare.

Ma, come osserva il Lagrange, se la conoscenza di queste leggi basta per i bisogni dell'astronomia, l'astronomia fisica esige inoltre la conoscenza delle loro cause; e quest'ultima conoscenza è tanto più interessante, poichè darà i mezzi non solamente di constatare e rettificare le leggi già conosciute, ma ancora di scoprirne delle nuove. L'accordo dei nodi dell'equatore della Luna con quelli della sua orbita, e l'eguaglianza tra la rivoluzione di questo satellite nella sua orbita rispetto ai nodi di quest'orbita, sono a rigore i fenomeni più singolari del sistema del mondo. Poichè dalla loro combinazione risulta che la durata della rotazione intiera della Luna deve essere perfettamente eguale a quella del suo tempo periodico; e di quest'eguaglianza è evidentemente conseguenza necessaria il fatto che la Luna ci mostra sempre la medesima faccia.

Ma la vera teoria della librazione della Luna si deve al Lagrange il quale nelle sue due memorie:

1ª *Recherches sur la libration de la Lune*, nella quale egli cerca di risolvere la questione proposta dall'Accademia Reale delle Scienze per il premio dell'anno 1764.

2ª *Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète* (" Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin ", année 1780).

Il Lagrange, in queste due memorie, e segnatamente nella seconda, diede le formule generali della librazione, deducendole dalle formule generali di meccanica per i movimenti rotatori introducendo nel calcolo tutte le forze di attrazione che possono fare oscillare la Luna intorno al suo centro di gravità.

Allo scopo di verificare le leggi del Cassini e le divergenze numeriche trovate dal Mayer, il Lalande intraprese a sua volta una verifica e trovò a sua volta dei valori un po' diversi. Queste divergenze si spiegano facilmente data l'imperfezione degli strumenti e dei metodi d'osservazione d'allora.

Più tardi, nel 1806, furono intraprese dal Bouvard e dal-

l'Arago delle misure più precise allo scopo della determinazione della librazione reale.

Su questo argomento intrapresero delle misure il Nicollet, il Kreil e lo Stambucchi; ma era riservato al Bessel di esporre un metodo di misure fondate sopra l'impiego dell'eliometro. Dietro l'eccitamento del Bessel, lo Schlüter intraprese una serie di misure eliometriche del cratere Mösting A., che durarono dal 29 aprile 1841 al 6 novembre 1843. Questa serie fu continuata dal Wichmann dal dicembre 1844 al gennaio 1846.

L'Hartwig pubblicò poi, nel 1881, i risultati di misure analoghe fatte da lui stesso coll'eliometro di Strasburgo.

Sulle misure dell' Hartwig il Franz pubblicò nelle *A. N.*, N. 2761, la sua prima memoria: *Neue Berechnung von Hartwig's Beobachtungen der physischen Libration des Mondes.*

In questa memoria il Franz riduce nuovamente le osservazioni dell'Hartwig ricavandone valori assai differenti.

Più tardi il Franz pubblicò nel tomo XXXVII delle osservazioni di Königsberg la notevole memoria: *Die Konstanten der physischen Libration des Mondes abgeleitet aus Schlüters Königsberger Heliometer Beobachtungen* (Königsberg, 1887).

In questa memoria si prendono in esame le determinazioni del cratere Mösting A., verificando dapprima i calcoli preliminari del Wichmann pubblicati nei tomi XXVIII e XXXIII delle *Osservazioni di Königsberg* e nelle *A. N.*

Dapprima però il Franz prende ad esporre in modo completo la teoria della librazione reale, sotto una forma più semplice di quella adottata dal Wichmann. Espone egli in seguito la determinazione delle costanti dell'eliometro, il calcolo delle coordinate x, y, del cratere, riferite al centro del disco, e quello delle coordinate selenocentriche che se ne deducono. La comparazione di queste ultime coi numeri dedotti dalla legge di Cassini ha procurato le equazioni di condizione che hanno servito a determinare le correzioni $d\lambda$ e $d\beta$ delle coordinate selenografiche del cratere e le correzioni dI e df dell'inclinazione dell'equatore e della costante f relativa ai momenti d'inerzia.

Per una sintesi più completa di questa memoria, basta consultare la notevole *Informazione storica* del Prof. O. Lorenzoni.

che precede la Memoria del Dott. A. Antoniazzi, *Passaggi dei lembi della Luna, e posizioni del cratere Mösting A. osservato al circolo meridiano di Padova negli anni 1897 e 1898.*

L'importante Memoria del Franz offre non solo un interesse teorico, ma può servire, come fa notare l'A., di base ad un nuovo procedimento d'osservazione. Perchè difatti, in luogo di osservare sempre il bordo più o meno regolare del disco lunare, si può prendere l'abitudine di puntare il cannocchiale sopra un oggetto facile ad identificarsi, come il cratere Mösting A., la cui posizione è oramai determinata con un'approssimazione più che sufficiente.

L'ostacolo che s'opponeva a tale procedimento, cioè a dire l'incertezza sopra l'esistenza e la grandezza della librazione reale, può essere considerata come definitivamente eliminata; le costanti di questa librazione sono ora assai bene note perchè se ne possa tener conto nel calcolo delle effemeridi.

Nei N^{i} 2917, 2927, 2948, 2952, 2966, 2973, 2994, 2997 delle " Astr. Nach. „, sono date dal Franz istesso le effemeridi che determinano la posizione del cratere lunare Mösting A. per l'intervallo dal settembre 1889 fino alla fine del 1890 per mezzo della posizione selenografica

$$\lambda = -5^0\,10'\,19''.0, \qquad \beta = -3^0\,11'\,24''.0$$

rispetto al centro del disco lunare apparente.

Dopo il principio dell'anno 1892 le effemeridi sono apparse in appendice del " Berliner Astronomischen Jahrbuch „ pel 1894 e seguenti.

Queste effemeridi, come dice l'autore, sono date allo scopo di promuovere le osservazioni in meridiano del cratere lunare, e di rendere esenti le osservazioni della Luna dalle incertezze che scaturiscono: dall'ineguaglianza dei bordi, dall'insufficiente conoscenza di un raggio lunare medio, dalle equazioni personali, particolarmente messe in evidenza a Greenwich, circa l'apprezzamento del contatto di un bordo lunare coi fili, e dall'irradiazione variabile dovuta allo splendore dello sfondo.

Il Franz, perciò, s'augura che per mezzo dell'osservazione di questo cratere, di piccole dimensioni, luminoso, circolare, affatto paragonabile ad una stella, la Luna possa essere osservata con maggior sicurezza e minor fatica, che non per mezzo del contatto dei bordi.

Le effemeridi forniscono inoltre il mezzo più conveniente per collegare, mediante l'eliometro, altri crateri col Mösting A., e determinare così le loro coordinate selenografiche.

Il Franz poi nella sua Memoria: *Darlegung der Ephemeridenrechnung von Mösting A.*, espone brevemente i metodi di calcolo, principalmente pel fatto che questi hanno subìte varie semplificazioni, benchè le basi siano rimaste le medesime.

Per queste ricorda egli come la librazione u in longitudine, δI in inclinazione dell'equatore lunare sull'eclittica, e $d\mho$ del relativo nodo sono date dalle equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} u = +2'.2 \sin \odot - 0'.4\,(m - \pi) + 0'.3 \sin 2\omega \\ \delta I = -1'.6 \cos (m - \pi) \\ \sin I d\mho = -1'.6 \sin (m - \pi) \end{cases}$$

e termini più piccoli, che, computati dalla Terra non superano $0''.05$.

Quivi è

$\odot$ l'anomalia media del Sole
m la longitudine media lunare
π „ del Perigeo dell'orbita lunare

e quindi $m - \pi$ l'anomalia media della Luna; infine $\omega = \pi - \Omega$ la distanza del Perigeo dell'orbita lunare dal suo nodo ascendente sull'eclittica. Le grandezze sono ridotte all'equinozio apparente del giorno.

$I = 1^\circ\, 31'\, 22''.1$ è l'inclinazione costante dell'equatore della Luna sull'eclittica;

Ω = longitudine del nodo ascendente dell'orbita lunare, contata sull'eclittica dell'equinozio di primavera;

$\mho = \Omega \pm 180^\circ$ = longitudine del nodo ascendente della Luna contata sull'eclittica secondo la legge del Cassini.

Sia inoltre, per uniformità di notazioni:

i = l'inclinazione dell'equatore lunare sull'equatore terrestre;
☊′ = la longitudine del nodo relativo contata dall'equinozio di primavera;
Δ = l'arco di equatore lunare tra l'equatore terrestre e l'eclittica;
ϵ = obbliquità apparente dell'eclittica;
m = longitudine media della Luna secondo gli Annuari;
λ e β la longitudine e la latitudine selenografiche del cratere

$$(\lambda = -5^\circ\, 10'\, 19''.0 \qquad \beta = -3^\circ\, 11'\, 24''.0);$$

α e d l'ascensione retta e la declinazione selenocentriche di esso cratere.

Sia inoltre k l'angolo secario selenocentrico:

cratere — centro della Luna — luogo d'osservazione;

σ = l'angolo visuale:

cratere — luogo d'osservazione — centro della Luna;

π = angolo di posizione del cratere al centro del disco lunare.

Finalmente il Franz nella memoria citata pone:

α, δ e h i valori affetti dalla parallasse dell'ascensione retta e della declinazione e dal raggio lunare secondo le effemeridi;
α_k e δ_k l'ascensione retta apparente e la declinazione apparente del cratere.

Secondo (1) sono ora:

$$\lambda + u \qquad I_1 = I + \delta I \qquad ☋_1 = ☋ + d☋,$$

i valori, affetti dalla librazione fisica, della longitudine selenografica del cratere, dell'obbliquità e della longitudine del nodo dell'equatore lunare coll'eclittica.

Per determinare da questi la posizione dell'equatore della Luna rispetto all'equatore terrestre, si consideri il triangolo sferico, i cui lati giacciono: ☊′ sull'equatore terrestre, ☋ sull'eclittica e Δ sull'equatore lunare, ed hanno come angoli opposti

rispettivamente I, $180^\circ - i$, ϵ. Rappresentano δi, $\delta \Omega'$, $\delta \Delta$ l'effetto della librazione fisica su i, Ω' e Δ; si ha inoltre:

$$i_1 = i + \delta i \qquad \Omega'_1 = \Omega' + \delta \Omega', \qquad \Delta_1 = \Delta + \delta \Delta.$$

Si ottengono allora, pel calcolo di i, Ω'_1 e Δ_1, dal triangolo sferico alterato della librazione fisica le equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \sin \Delta_1 \sin i_1 = \sin \epsilon \sin \Theta_1 \\ \cos \Delta_1 \sin i_1 = \sin \epsilon \cos \Theta_1 \cos I_1 + \cos \epsilon \sin I_1 \\ \cos i_1 = - \sin \epsilon \cos \Theta_1 \sin I_1 + \cos \epsilon \cos I_1 \\ \cos \Omega'_1 \sin i_1 = \cos \epsilon \cos \Theta_1 \sin I_1 + \sin \epsilon \cos I_1 \\ \sin \Omega'_1 \sin i_1 = \sin \Theta_1 \sin I_1. \end{cases}$$

Si ottiene inoltre la longitudine selenocentrica λ_1 del cratere, contato lungo l'equatore lunare dal nodo ascendente dell'equatore lunare sull'equatore terrestre dalla:

$$(3) \qquad \lambda_1 = m + 180^\circ + \Delta_1 - \Theta_1 + \lambda + u.$$

Nel triangolo sferico che ha per vertici: il luogo selenocentrico del cratere, il polo dell'equatore terrestre, ed il polo dell'equatore lunare, ed in cui sono contrapposti a questi vertici i lati i_1, $90^\circ - \beta$, e $90^\circ - d$; l'angolo al polo dell'equatore terrestre è $90^\circ + a - \Omega'_1$, quello al polo dell' equatore lunare $90^\circ - \lambda$. Si ha perciò per il calcolo di a e d:

$$(4) \quad \begin{cases} \cos (a - \Omega'_1) \cos d = \cos \beta \cos \lambda_1 \\ \sin (a - \Omega'_1) \cos d = \cos \beta \sin \lambda_1 \cos i_1 - \sin \beta \sin i_1 \\ \sin d = \cos \beta \sin \lambda_1 \sin i_1 + \sin \beta \cos i_1. \end{cases}$$

Considera finalmente l'A. il triangolo sferico coi vertici nel luogo selenocentrico del cratere, nel polo dell'equatore terrestre e nel luogo selenocentrico del luogo d'osservazione: a questi vertici stanno opposti rispettivamente i lati $90^\circ + \delta$, K e $90^\circ - d$,

mentre gli angoli agli ultimi due vertici sono $180^\circ + \alpha - a$, $360^\circ - \pi$. Si ricavano così π e K dalle equazioni:

$$(5)\quad \begin{cases} \sin\pi \sin K = \cos d \sin(a - \alpha) \\ \cos\pi \sin K = -\cos d \cos(a - \alpha) \sin\delta + \sin d \cos\delta \\ \cos K = -\cos d \cos(a - \alpha) \cos\delta - \sin d \sin\delta\,, \end{cases}$$

delle quali poichè K è sempre minore di 17°, le due prime sono sufficienti al calcolo.

Nel triangolo piano del luogo d'osservazione, del centro della Luna e del cratere si hanno, nei rispettivi punti gli angoli σ, K e $180^\circ - K - \sigma$; il rapporto del raggio lunare alla distanza del centro della Luna al luogo d'osservazione è $\sin h$. Si ha quindi:

$$(6)\qquad \sin\sigma = \sin h \sin(K + \sigma)\,,$$

o risolvendo quest'equazione rispetto a σ:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sin h \sin K}{1 - \sin h \cos K}\,.$$

Ora si ha esattamente:

$$\begin{cases} \sin(\alpha_K - \alpha)\cos\delta_K = \sin\sigma \sin\pi \\ \cos(\alpha_K - \alpha)\cos\delta_K = -\sin\sigma \cos\pi \sin\delta + \cos\sigma \cos\delta \\ \sin\delta_K = \sin\sigma \cos\pi \cos\delta + \cos\sigma \sin\delta\,, \end{cases}$$

e, essendo σ, $\alpha_K - \alpha$, $\delta_K - \delta$ assai piccoli, si trova la riduzione al centro del disco lunare da applicarsi alle osservazioni meridiane del cratere Mösting A. della forma:

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha - \alpha_K = -\sigma \sin\pi \sec\delta_K \\ \delta - \delta_K = -\sigma \cos\pi \end{cases}$$

e si trova così il luogo lunare per l'istante della culminazione del cratere, affetto dalla parallasse in δ ed anche in α.

In tal modo il Franz calcola le effemeridi delle " Astr. Nach. „ e le effemeridi pel 1892, nel " Berliner Jahrbuch „. Solo furono, invece delle soprascritte, adoperate formole equivalenti onde facilitare il calcolo logaritmico.

Il calcolo vale per l'istante della culminazione della Luna in Greenwich, che può ritenersi valevole per l'istante della rispettiva culminazione del cratere, poichè le variazioni della librazione ottica e fisica nel breve intervallo di tempo sono insensibili.

Il Franz dà in seguito il modo per applicare le effemeridi in qualunque altro luogo.

Tralasciando ora di parlare delle diverse modificazioni introdotte nelle effemeridi per gli anni 1895, 1896, 1897, pubblicate in Appendice al " Berliner Astronomischen Jahrbuch „ degli anni 1897, 1898 e 1899, ci limiteremo a far notare come l'Effemeride per il 1895 si distingua da quella dell'anno precedente in questo, che invece di fornire le quantità $\alpha_{☾} - \alpha_k$, $\delta_{☾} - \delta_k$, da applicare alle α_k, δ_k osservate dal cratere alla sua culminazione al meridiano di Greenwich, onde ottenere le coordinate apparenti $\alpha_{☾}$, $\delta_{☾}$ del centro della Luna nell'istante della predetta culminazione, ed invece di dare a lato a quelle differenze i quozienti differenziali rispetto a φ del primo ordine per $\alpha_{☾} - \alpha_k$ e di primo e secondo ordine per $\delta_{☾} - \delta_k$; essa dà le differenze $\alpha_{☾} - \alpha_k$, $\delta_{☾} - \delta_k$ sempre per l'istante delle culminazioni a Greenwich, ma geocentriche, e, accanto ad esse, dà il logaritmo del seno della parallasse orizzontale equatoriale p_k del cratere, con la quale, con il raggio ρ e con la latitudine φ si calcola la riduzione al centro della Terra di qualunque δ_k osservato sotto il meridiano di Greenwich. Naturalmente l'α_k osservato in meridiano eguaglia l'α_k geocentrica. Per un altro meridiano non si ha che a trasportare ad esso l'effemeride con la interpolazione, prendendo per argomento di questa la differenza di longitudine con il meridiano di Greenwich e tenendo conto rigoroso delle differenze seconde.

Per notare le ulteriori modificazioni e semplificazioni comparse nelle effemeridi del 1896 e 1897, diremo che queste non sono più calcolate per il meridiano di Greenwich, ma invece per quello di Berlino; le effemeridi per gli anni 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, non presentano più nessuna differenza con quelle dei due anni superiormente citati.

Le osservazioni meridiane del cratere Mösting A., s'iniziarono col 2 agosto 1901 e furono alternativamente fatte, come

si vede dalle note in piede della pagina, dal Dr Balbi e dal Dr Volta.

L'istrumento adoperato è il circolo meridiano di Reichenbach. Questo strumento ha la forma e le dimensioni di quello dell' Osservatorio di Koenigsberg, descritto particolareggiatamente dal Bessel nella VI sezione delle sue osservazioni.

Questo strumento ha un circolo fisso del diametro di m. 0.95 diviso su argento di 3 in 3 minuti, il circolo alidada porta quattro nonii che, divisi in 90 parti, dànno per conseguenza i 2 secondi. Il cannocchiale ha un obbiettivo di mm. 109,4 ed una lunghezza focale di m. 1,624; per uso dell'istrumento si hanno quattro oculari cogli ingrandimenti 60, 107, 129, 182; quello adoperato nell'osservazione del cratere Mösting è il 3°.

Il cannocchiale è provvisto nel suo piano focale, di 9 fili verticali, e di due fili orizzontali tra i quali si porta l'oggetto che si vuole osservare.

La parte ottica è del celebre Fraunhofer, ed è notevole il potere penetrante del cannocchiale.

Il meridiano nel quale deve rotare l'asse di collimazione del cannocchiale è stato fissato dal Plana con 3 mire. La più vicina è al Nord, a m. 223.215 dal centro del circolo, sopra un arco della chiesa del S. Sudario. La mira intermedia è a Sud, a m. 1895 dal centro del circolo, sui tetti del Castello del Valentino; la mira più lontana è al Sud, sopra le antiche mura che formano la cinta di un giardino di Cavoretto.

Il Plana istituì una piccola triangolazione e trovò che la distanza di quest'ultima mira dal centro del circolo è di m. 4488,91, ciò che corrisponde ad un arco terrestre di 146″,1.

Per gli errori d'inclinazione dell'istrumento si ha un grande livello a braccia, e per misurare l'ampiezza delle divisioni del livello esiste un verificatore della livella.

Il pavimento della Sala del Circolo Meridiano ha l'altitudine di m. 275,75 ed è a m. 36,171 al disopra delle soglie del portico del Palazzo Madama. La Sala è prossimamente cilindrica, col diametro di m. 7,10 e coll'altezza di m. 4,20.

A questo circolo il Plana ed il Capelli, mediante osservazioni della Polare, determinarono la latitudine; in seguito determinarono la longitudine rispetto a Milano; osservarono inoltre dei passaggi meridiani di stelle fondamentali. Questa prima serie

d'osservazioni è stata pubblicata in Torino nel 1828, sotto il titolo: *Observations astronomiques faites en 1822, 1823, 1825 à l'Observatoire Royal de Turin.* Queste osservazioni furono eseguite dal 9 ottobre 1822 alla fine del 1825 (20 dicembre).

In seguito quest'istrumento fu adoperato per la determinazione del diametro orizzontale solare; questa serie d'osservazioni fu iniziata il 15 ottobre 1822 e fu continuata con diverse interruzioni, sino alla fine del 1886. Dal 10 giugno 1901 si è riattivata nuovamente quest'operazione, col proposito di stabilire una serie di osservazioni a termini continui. Inoltre lo strumento servì all' osservazione meridiana di stelle per la determinazione del tempo, e servì pure al Dott. Aschieri per le sue osservazioni sul cratere Mösting A. pubblicate nel n° 3037 delle " Astr. Nach. ".

Certamente le condizioni presenti del Circolo di Reichenbach non sono tali da permettere determinazioni di posizioni, ma, nullameno, imitando l'esempio di altri osservatori che non dispongono di strumenti migliori, furono in questo tempo intraprese le seguenti osservazioni:

1° Determinazione del tempo,

2° Determinazione del diametro solare,

3° Osservazione di stelle di culminazione lunare, osservazioni del bordo illuminato della Luna ed osservazione del cratere Mösting A.

Le osservazioni di cui pubblichiamo i risultati in questa nota comprendono tutte quelle fatte dal 2 agosto 1901 al 16 novembre 1902: sono in numero di 55, tante quante le condizioni del cielo permisero di effettuare: in questo periodo quelle in cui il numero delle stelle di culminazione lunare non arrivasse a 2 furono escluse come incomplete.

Sebbene le condizioni sopraddette del Circolo meridiano non ci abbiano consentito di rendere complete queste osservazioni colle misure di declinazione, tuttavia crediamo opportuno di portare il nostro modesto contributo al già abbondante materiale in argomento, sia pel carattere di continuità delle osservazioni, sia per le cautele e la cura con cui esse furono condotte allo scopo di poter ottenere i migliori risultati che l'istrumento ci potesse dare.

Perciò contemporaneamente alle stelle di culminazione lunare si osservò sempre un numero sufficiente di stelle, atte a

fornire con bastante sicurezza gli errori istrumentali e la correzione dell'orologio: l'errore d'inclinazione si deduceva colla lettura delle livelle sopraddette, in principio ed in' fine dell'osservazione. Solo nel caso di osservazioni comprese tra due contigue si ritenne legittimo di poter rinunciare ad un' apposita determinazione di tempo.

Le stelle di culminazione lunare osservate sono tra quelle portate dal *Nautical Almanac* e dalla *Connaissance des Temps;* alcune furono tolte dal *Catalogo del Berl. Jahrbuch;* una sola dal catalogo fondamentale dell'A. G. che si trova nell'annata 1901 del *B. A. I.*

Per le posizioni loro si fece ricorso naturalmente alle effemeridi date da questi Annuari: noteremo solo che nel caso di posizioni comuni al N. A. ed alle C. d. T. preferimmo, per valori differenti nei c^{mi} di secondo, quelle del primo: nel caso di posizioni comuni anche al B. A. I. si adottarono queste ultime, effetto delle correzioni dell'Auwers.

Si procurò altresì che le serie di stelle di culminazione lunare si collegassero, quand'era possibile, una sera coll'altra, per modo che le ultime osservate una sera entrassero tra le prime da osservarsi la sera seguente, come appare nelle tavole che seguono. Nella preparazione del programma di osservazione si procurò di ottenere la maggior simmetria nella disposizione e nella distribuzione sia delle stelle per la determinazione di tempo, sia per quelle di culminazione lunare, per modo che l'istante del passaggio in meridiano della luna fosse prossimamente l'istante medio dei passaggi delle une e delle altre.

Le stelle di culminazione lunare naturalmente servirono anche da stelle orarie nel calcolo della determinazione di tempo, e, quando si prestarono, entrarono esse stesse nella deduzione degli errori istrumentali.

Le riduzioni al filo di mezzo furono eseguite separatamente per ogni appulso, escludendo quelle stelle per le quali la riduzione al filo di mezzo, per le cattive condizioni di osservazione o per altre cause non dessero un accordo soddisfacente: così furono escluse quelle per le quali non fosse stato possibile dare un numero sufficiente di appulsi.

Seguendo il metodo tenuto dal Dr. Antoniazzi, nella citata memoria, le riduzioni si fecero nel modo seguente.

Dal tempo del passaggio di ciascuna stella confrontata colla ascensione retta ricavata dal catalogo originario, col mezzo della nota formola di Mayer

$$\alpha = T + k + bi + az + ce$$

si ottenne nella Tab. I un valore della correzione dell'orologio.

Mediante le due formole

$$\frac{1 - \rho \operatorname{sen} \pi \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda) \cos \delta} f \quad \text{e} \quad \frac{1 - \rho \operatorname{sen} \pi \cos \varphi' \sec \delta}{1 - \lambda} (m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta')$$

si sono ridotti i tempi registrati dei passaggi del cratere per i fili del reticolo al filo di mezzo e la riduzione al meridiano.

Nella Tab. II si trova l'ascensione retta del cratere ottenuta dal tempo del suo passaggio e applicando la media delle correzioni dell'orologio determinate nella sera; lo stesso procedimento si seguì per la riduzione delle osservazioni del lembo lunare.

Dalla ascensione retta del cratere, determinata nel modo sopra descritto, si ottenne poi l'ascensione retta geocentrica del centro della luna, per l'istante del passaggio del Mösting A., aggiungendo a quella la differenza $\alpha_{☾} - \alpha_k$ desunta con la interpolazione nell'effemeride di Mösting A.

Aggiungendo o togliendo, secondo che trattavasi del primo o del secondo lembo, il tempo del passaggio del raggio della luna dato nelle effemeridi lunari, si ottenne l'ascensione retta della luna come desunta dall'osservazione del lembo.

Il valore risultante corrisponde all'istante del passaggio del centro della luna.

I valori $O - C$ che si trovano nella Tab. III, sono il risultato dei confronti con le effemeridi contenute nella *Connaissance des Temps*: rappresentano quindi gli errori delle Tavole originarie di Hansen. Sottraendo da quelli i valori della correzione di Newcomb, che si estraggono nelle Tabelle date dalla *C. d. T.*, si hanno i valori $O - C$, che si otterrebbero confrontando direttamente le osservazioni con le effemeridi del *Nautical Almanac*.

Le osservazioni nell'anno 1901, del 2, 24, 27, 28, 31 Agosto, del 28, 29, 30 Novembre; 1, 30, 31 Dicembre; e nell'anno 1902, quelle del 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 Marzo; 23, 24, 25 Maggio, sono state eseguite dal Dr. Balbi, le altre invece lo furono dal Dr. Volta.

TAV. I. — **Correzioni dell'orologio dedotte dalle osservazioni delle stelle.**

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1901			h m s		h m s	m s
2 Agosto . . .	η Aquarii		23 23 6.05	— 0.33	22 30 20.01	— 52 45.71
	x Aquarii	5.5	25 27.97	0.55	32 41.57	45.85
	16 Piscium	5.6	0 24 9.81	0.22	23 31 23.72	45.87
3 Agosto . . .	x Piscium	5.0	0 14 42.17	— 0.26	23 21 55.14	— 52 46.77
	51 Piscium	5.7	19 7.68	+ 0.04	0 27 20.63	47.09
24 Agosto . . .	ξ Ophiuci		17 17 15.84	+ 0.24	17 15 7.94	— 2 8.14
	58 Ophiuci		39 41.56	0.22	37 33.68	8.10
	21 Sagittarii	4.9	18 21 39.27	0.26	19 31.31	8.22
	6287 B. A. C.	5.7	26 34.63	0.32	24 26.72	8.23
27 Agosto . . .	α Capricorni		20 14 22.70	+ 1.67	20 12 13.89	— 2 10.48
	7087 B. A. C.		30 54.28	1.63	28 45.31	10.60
	ν Aquarii	4.6	21 6 24.68	1.70	21 4 16.36	10.02
	5553 D. M. — 11°	6.5	11 7.77	1.72	8 59.56	9.93
28 Agosto . . .	ν Aquarii	4.6	21 6 23.84	+ 1.68	21 4 16.32	— 2 9.20
	30 Aquarii	5.6	22 0 15.10	1.84	58 8.18	8.76
31 Agosto . . .	35 Piscium		0 12 3.24	+ 1.62	0 9 56.80	— 2 8.06
	51 Piscium		29 27.72	1.52	27 21.20	8.04
	δ Piscium	4.6	45 43.09	1.57	43 36.74	7.92

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1901			h m s		h m s	m s
1° Settembre . .	ε Piscium	4.5	0 59 58.56	+ 0.84	0 57 52.26	— 2 7.14
	π Piscium		1 34 1.21	1.03	1 31 54.82	7.42
24 Ottobre . .	η Aquarii	3.8	1 29 42.42	+ 1.79	1 30 20.05	— 2 35.84
	5539 D. M. — 3°	6.3	52 36.14	1.68	53 13.61	35.79
	3 Piscium	6.5	54 59.60	1.79	55 37.26	35.87
	γ Piscium		23 13 28.33	1.93	23 12 6.12	35.86
	x Piscium	5.3	21 17.89	1.84	21 55.56	35.83
	19 Piscium	5.2	40 26.21	1.94	41 24.10	35.95
28 Novembre . .	1479 D. M. + 17°	6.2	6 46 45.01	+ 3.27	6 56 45.09	+ 9 56.81
	ζ Geminorum	3.7 - 4.5	48 19.16	3.43	58 19.38	56.79
	1 Cancri	5.9	7 41 26.87	3.16	7 51 26.88	56.85
29 Novembre . .	5 Cancri	6.4	7 45 56.05	+ 4.66	7 55 56.49	+ 9 55.78
	A Cancri		8 27 48.96	4.52	8 37 49.37	55.89
	α Cancri	4.3	43 8.33	4.49	53 8.69	55.87
	x Cancri	5.0	51 26.93	4.46	9 2 27.33	55.94
30 Novembre . .	A¹ Cancri		8 27 46.59	+ 3.92	8 37 49.40	+ 9 58.89
	α Cancri	4.3	43 5.89	3.90	53 8.70	58.91
	x Cancri	5.0	52 24.61	3.84	9 2 27.36	58.91
	ξ Leonis		9 16 37.83	3.86	26 40.65	58.96
	3336 B. A. C.	6.0	30 57.89	3.69	41 0.60	59.02
	3380 B. A. C.	6.5	38 32.14	3.67	48 34.90	59.09

Segue TAV. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1901			h m s		h m s	m s
1° Dicembre . .	3336 B. A. C.	6.0	9 30 54.19	+ 3.71	9 41 0.63	+ 10 1.73
	π Leonis	5.0	44 57.24	3.75	55 2.79	1.80
	43 Leonis	6.5	10 7 47.84	3.60	10 17 53.31	1.87
	55 Leonis		40 34.84	3.52	50 40.24	1.88
30 Dicembre . .	p_5 Leonis		10 56 37.07	+ 0.62	11 8 45.77	+ 12 8.08
	ν Leonis	4.8	11 19 47.97	0.62	31 56.96	8.37
	4006 B. A. C.	5.7	33 53.70	0.64	46 2.66	8.32
31 Dicembre . .	4006 B. A. C.	5.7	11 33 46.06	+ 1.05	11 46 2.69	+ 12 15.58
	4007 B. A. C.	6.4	48 43.06	1.04	12 0 59.72	15.62
	η Virginis	3.3	12 2 37.69	1.02	14 54.37	15.66
	f Virginis		20 28.52	1.05	31 45.17	15.60
	χ Virginis	4.7	21 55.30	1.07	34 12.05	15.68
	4312 B. A. C.	6.5	34 0.79	1.07	46 17.65	15.79
	ψ Virginis		36 59.12	1.08	49 16.04	15.84
1902						
17 Gennaio . .	η Piscium	3.6	1 12 10.21	+ 0.28	1 26 15.23	+ 14 4.74
	π Piscium	5.6	17 50.07	0.27	31 55.04	4.70
	54 Ceti	5.8	31 35.96	0.27	45 40.87	4.64
	19 Arietis		53 38.68	0.27	2 7 43.60	4.65
	29 Arietis	6.5	2 13 28.18	0.27	27 33.30	4.85
	0 Arietis	5.8	25 5.05	0.27	39 10.30	4.98
	40 Arietis		28 58.50	0.28	43 3.72	4.94

Segue TAV. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi + az + ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
18 Gennaio . .	29 Arietis	6.5	2 15 57.30	+ 0.38	2 27 33.29	+ 11 35.61
	0 Arietis	5.8	27 34.23	0.38	39 10.29	35.68
	40 Arietis		31 27.76	0.38	43 3.71	35.57
	δ Arietis	4.1	54 26.78	0.38	3 6 3.01	35.85
	τ^2 Arietis		3 5 32.31	0.38	17 8.34	35.65
	564 D. M. + 17°	6.5	14 12.49	0.38	25 48.60	35.73
	1119 B. A. C.	6.4	22 18 71	0.38	34 54.78	35.69
19 Gennaio . .	τ^2 Arietis		3 5 36.43	+ 0.63	3 17 8.33	+ 11 31.27
	564 D. M. + 17°	6.5	14 16.66	0.63	25 48.59	31.30
	1119 B. A. C.	6.4	22 22.83	0.63	33 54.77	31.31
	δ Tauri	4.0	4 5 46.81	0.63	4 17 18.84	31.40
	ε Tauri	3.6	12 23.65	0.63	22 55.57	31.29
	α Tauri	1.0	18 47.83	0.63	30 19.74	31.28
	τ Tauri		29 3.65	0.63	45 40.40	31.04
	1468 B. A. C.	6.5	34 8.71	0.63	40 35.32	31.08
20 Gennaio . .	δ Tauri	4.0	4 5 51.50	+ 0.63	4 17 18.85	+ 11 26.72
	ε Tauri	3.6	11 28.21	0.63	22 55.56	26.72
	α Tauri	1.0	18 52.47	0.63	30 19.73	26.63
	785 D. M. + 20°	5.8	21 3.67	0.63	32 30.99	26.69
	τ Tauri	4.3	24 56.55	0.63	36 23.82	26.64
	1468 B. A. C.	6.5	29 8.18	0.63	40 35.31	26.50

Segue TAV. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
20 Gennaio . .	119 Tauri		5 15 3.10	+ 0.63	5 26 30.24	+ 11 26.51
	ζ Tauri	3.0	20 22.44	0.63	31 49.53	26.46
	130 Tauri	5.5	30 18.48	0.63	41 45.55	26.44
	χ^4 Orionis		46 41.41	0.63	58 8.31	26.27
21 Gennaio . .	119 Tauri		5 11 57.15	+ 0.63	5 26 30.24	+ 14 32.46
	ζ Tauri	3.3	17 16.46	0.63	31 49.52	32.43
	130 Tauri	5.5	27 12.54	0.63	41 54.54	32.37
	χ^4 Orionis		43 35.17	0.63	58 8.31	32.51
	μ Geminorum	3.0	6 2 31.17	0.63	6 17 4.32	32.52
	ν Geminorum		8 37.86	0.63	23 10.93	32.44
	1479 D. M. + 17°	6.2	42 12.72	0.63	56 45.92	32.57
	ζ Geminorum	3.7 - 4.5	43 47.04	0.63	58 20.24	32.57
25 Gennaio . .	υ Leonis	3.8	9 20 58.18	+ 0.54	9 35 57.49	+ 14 58.77
	3398 B. A. C.	6.0	36 17.19	0.54	51 16.44	58.71
	π Leonis	5.0	40 4.91	0.55	55 4.27	58.81
	[4 B. Leonis]	6.5	10 2 55.50	0.55	10 17 54.85	58.80
	35 Lexantis	6.1	23 18.20	0.56	38 17.77	59.01
	37 Lexantis		26 2.12	0.55	41 1.58	58.89
	χ Leonis	4.8	45 0.34	0.55	59 59.65	58.76

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi + az + ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
27 Gennaio . .	75 Leonis		10 57 4.72	+ 0.57	11 12 16.75	+ 15 11.46
	79 Leonis	5.5	11 3 50.46	0.57	19 2.45	11.42
	υ Leonis	4.5	16 45.46	0.59	31 57.73	11.68
	η Virginis		59 42.81	0.59	14 55.16	11.76
	4172 B. A. C.	6.5	12 3 2.25	0.61	18 14.72	11.86
28 Gennaio . .	χ Virginis		12 18 54.71	+ 1.54	12 34 12.92	+ 15 16.67
	ψ Virginis		33 58.67	1.56	49 16.93	16.70
	θ Virginis	4.3	49 35.65	1.50	13 4 53.97	16.82
	α Virginis	1.0	13 4 44.76	1.58	20 3.25	16.91
	m Virginis		21 11.07	1.55	36 29.41	16.79
29 Gennaio . .	α Virginis		13 4 39.37	+ 1.58	13 20 3.22	+ 15 22.27
	m Virginis		21 5.52	1.55	36 29.44	22.37
	4591 B. A. C.	6.3	26 40.00	1.56	42 3.93	22.37
	4697 B. A. C.	6.5	47 51.25	1.50	14 3 15.16	22.41
	4700 B. A. C.		50 6.55	1.67	5 30.36	22.14
	x Virginis	4.3	52 17.29	1.57	7 41.22	22.32
18 Febbraio . .	η Geminorum	3.2 - 4.2	5 51 35.73	+ 1.52	6 8 59.88	+ 17 22.64
	1214 D. M. + 17°	6.5	58 20.83	1.57	15 44.83	22.54
	μ Geminorum	3.0	59 39.85	1.52	17 4.10	22.73

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
18 Febbraio . .	υ Geminorum	4.0	6 5 46.60	+ 1.54	6 23 10.82	+ 17 22.68
	ζ Geminorum	2.3 - 3.3	40 55.82	1.53	58 20.12	22.77
	θ Geminorum	3.6	55 4.59	1.57	7 12 29.96	22.80
	δ Geminorum	3.3	56 54.19	1.52	14 18.64	22.93
	g Geminorum		23 5.09	1.56	40 29.42	22.78
22 Febbraio . .	p^5 Leonis	5.7	10 43 6.50	+ 1.51	11 1 56.65	+ 17 48.64
	p^3 Leonis	5.5	49 56.89	1.52	8 46.99	48.58
23 Febbraio . .	p^3 Leonis	5.7	10 43 59.15	+ 1.51	11 1 56.66	+ 17 56.00
	υ Leonis	4.8	11 14 0.51	1.53	31 58.21	56.17
	2843 D. M. + 0°	6.5	26 6.03	1.53	44 3.85	56.29
	β Virginis	3.3	27 40.17	1.51	45 37.73	56.05
	4077 B. A. C.	6.4	43 3.25	1.56	12 1 1.10	56.29
	η Virginis	3.3	56 57.97	1.53	14 55.76	56.25
17 Marzo . . .	χ^1 Orionis		5 28 40.80	− 0.11	5 48 36.24	+ 19 55.55
	χ_4 Orionis	4.8	38 12.13	0.12	58 7.59	55.53
	68 Orionis	5.6	46 19.17	0.12	6 6 14.64	55.59
	η Geminorum	3 - 4.2	49 3.90	0.09	8 59.41	55.60
	51 Geminorum	5.4	6 47 50.77	0.16	7 7 46.49	55.88
	56 Geminorum		56 16.18	0.11	16 11.89	55.82

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
18 Marzo . . .	51 Geminorum	5.4	6 47 47.07	— 0.26	7 7 46.47	+ 19 59.66
	56 Geminorum		56 12.43	0.21	16 11.86	59.64
	g Geminorum		7 20 29.58	0.23	40 29.07	59.72
	12 Cancri	6.5	43 16.35	0.28	8 3 15.92	59.84
	d^2 Cancri		8 0 19.74	0.25	20 19.24	59.75
19 Marzo . . .	*g* Geminorum		7 19 26.26	— 0.27	7 40 29.06	+ 20 3.07
	5 Cancri	6.4	35 54.39	0.30	55 57.27	3.18
	12 Cancri	6.5	43 13.16	0.33	8 3 15.90	3.07
	d^2 Cancri		8 0 16.47	0.29	20 19.23	3.05
	52 Cancri		25 41.00	0.30	45 42.84	3.14
	x Cancri		42 25.81	0.36	9 2 28.70	3.25
	π^2 Cancri	5.0	49 48.71	0.31	9 51.64	3.24
20 Marzo . . .	52 Cancri		8 25 37.98	— 0.39	8 45 42.83	+ 20 6.24
	α Cancri	4.3	33 4.02	0.43	53 9.96	6.37
	x Cancri	5.0	42 22.71	0.44	9 2 28.69	6.42
	π^2 Cancri		49 45.58	0.40	9 51.63	6.45
	o Leonis	3.8	9 15 51.75	0.45	35 57.64	6.34
	B. A. C. 3398	6.0	31 10.73	0.45	51 16.66	6.38
	A. Leonis		42 38.67	0.45	10 2 44.60	6.38

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
24 Marzo . . .	η Virginis	3.3	11 54 34.10	— 0.31	12 14 56.15	+ 20 22.34
	4200 B. A. C.	5.7	12 2 30.56	0.34	22 52.57	22.35
	4225 B. A. C.	6.3	6 17.04	0.34	26 39.02	22.32
	χ Virginis		13 51.89	0.37	34 13.90	22.38
	50 Virginis	6.5	44 17.94	0.38	13 4 40.11	22.55
	α Virginis	1.2	59 42.23	0.39	20 4.42	22.58
25 Marzo . . .	50 Virginis	6.5	12 44 14.16	— 0.68	13 4 40.12	+ 20 26.64
	α Virginis	1.0	59 38.58	0.69	20 4.44	26.55
	l^2 Virginis		13 6 28.69	0.64	26 54.69	26.64
	4679 B. A. C.		38 45.28	0.73	59 11.36	26.81
	λ Virginis	4.6	53 24.92	0.71	14 13 50.93	26.72
26 Marzo . . .	4679 B. A. C.		13 38 42.37	— 1.06	13 59 11.38	+ 20 30.07
	λ Virginis	4.6	53 21.98	1.03	14 13 50.94	29.99
	5 Librae		14 20 7.04	1.06	40 36.02	30.04
	ν′ Librae	5.4	40 43.06	1.08	15 1 11.91	29.93
27 Marzo . . .	α Librae	3.0	14 24 59.10	— 2.00	14 45 29.93	+ 20 32.83
	υ_1 Librae	5.4	40 41.07	2.01	15 1 11.93	32.87
	ζ^3 Librae		15 4 40.14	2.01	25 11.00	32.87
	41 Librae	5.7	12 47.56	2.01	33 18.53	32.98
	4431 O. M. — 17°	6.5	23 47.45	2.01	44 18.31	32.87

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
			h m s		h m s	m s
28 Marzo . . .	ζ^3 Librae		14 4 37.71	— 2.01	15 25 11.03	+ 20 35.33
	41 Librae	5.7	12 46.22	2.01	33 18.56	35.35
	49 Librae		15 34 18.62	2.01	54 52.00	35.39
	5579 B. A. C.	5.2	16 23.05	2.01	16 35 56.42	35.38
	5700 B. A. C.		30 47.19	2.02	51 20.52	35.35
29 Marzo . . .	χ Ophiuci	5.0	16 0 46.68	— 1.48	16 21 22.85	+ 20 37.65
	5579 B. A. C.	5.3	15 20.11	1.46	35 56.45	37.80
30 Marzo . . .	5839 B. A. C.	6.0	16 53 33.41	— 1.47	17 14 13.16	+ 20 40.82
	ξ Ophiuci		54 30.30	1.54	15 9.14	41.09
	4516 D. M. — 18°	6.3	58 15.12	1.49	18 54.84	41.21
16 Aprile . . .	ζ Hydrae	3.3	8 28 53.06	— 1.01	8 50 14.63	+ 21 22.58
	α Cancri	4.0	31 47.92	0.91	53 9.51	22.50
15 Maggio . . .	*d* Leonis	5.0	10 59 0.70	— 1.20	10 55 32.04	— 3 27.46
	χ Leonis	4.8	11 3 28.40	1.12	59 59.78	27.50
	p^3 Leonis	5.7	5 25.11	1.25	11 1 56.32	27.54
	p_5 Leonis		12 15.44	1.29	8 46.71	27.44
	υ Leonis	4.8	35 26.89	1.31	31 58.15	27.43

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+cc$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
17 Maggio. . .	[γ Virginis]	3.3	12 40 11.78	— 1.16	12 36 44.14	— 3 26.43
	ψ Virginis		52 45.92	1.48	49 17.02	26.42
	θ Virginis	4.3	13 8 22.90	1.39	13 4 55.18	26.33
19 Maggio. . .	α Virginis	1.2	13 23 30.34	— 1.53	13 20 4.58	— 3 24.23
	h Virginis	5.5	31 16.77	1.46	27 51.12	24.19
	88 Virginis		46 38.83	1.39	43 13.02	24.42
	89 Virginis	5.0	48 1.70	1.65	44 35.80	24.25
	4697 B. A. C.	6.5	14 6 42.74	1.50	14 3 16.93	24.21
	λ Virginis	4.6	17 17.26	1.54	13 51.40	24.32
22 Maggio. . .	θ Librae		15 51 43.03	— 1.52	15 48 17.96	— 3 23.55
	β Scorpii	2.0	16 3 12.81	1.59	59 47.66	23.56
	θ^2 Scorpii		9 46.44	1.58	16 6 21.32	23.54
	5580 B. A. C.	5.7	39 36.53	1.60	36 11.36	23.57
23 Maggio. . .	5579 B. A. C.		16 39 23.76	— 1.58	16 35 57.57	— 3 24.61
	29 Ophiuci	6.5	59 36.73	1.61	56 10.59	24.53
	η Ophiuci		17 8 14.87	1.54	17 4 48.73	24.60
	6060 B. A. C.	6.5	53 38.60	1.61	50 12.38	24.61
	6081 B. A. C.	6.5	57 39.76	1.64	54 13.62	24.50

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
24 Maggio . . .	6081 B. A. C.	6.5	17 57 40.28	— 1.68	17 54 13.64	— 3 24.96
	21 Sagittarii		18 23 0.78	1.69	18 19 33.97	25.12
	6294 B. A. C.	5.2	29 11.57	1.63	25 44.98	24.96
25 Maggio . . .	21 Sagittarii		18 23 1.51	— 1.72	18 19 33.99	— 3 25.80
	6294 B. A. C.	5.2	29 12.33	1.67	25 45.00	25.66
	5134 D. M. — 17°	6.5	40 39.25	1.70	37 11.84	25.71
	29 Sagittarii		47 21.80	1.72	43 54.30	25.78
	d Sagittarii		19 15 24.37	1.67	19 11 57.02	25.68
	ρ Sagittarii	6.1	19 38.26	1.67	16 10.87	25.72
	e' Sagittarii	5.5	38 36.60	1.62	35 9.42	25.56
14 Giugno . . .	θ Virginis	4.3	13 8 5.75	— 2.69	13 4 55.01	— 3 8.05
	h Virginis		31 1.91	2.82	27 50.93	8.16
	4647 B. A. C.		53 3.36	2.75	49 52.40	8.21
18 Giugno . . .	γ Librae	4.3	15 26 29.51	— 3.46	15 30 5.94	+ 3 39.89
	41 Librae	5.7	29 43.21	3.65	33 19.53	39.97
	4431 D. M. — 17°	6.5	40 43.00	3.59	44 19.40	39.99
	θ Librae		44 41.75	3.54	48 18.09	39.88

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
18 Giugno . . .	δ Scorpii	2.3	15 50 59.47	— 3.81	15 54 35.90	+ 3 40.24
	β Scorpii	2.0	56 11.40	3.68	59 47.82	40.10
	ψ Ophiuci		16 14 49.09	3.69	16 18 25.66	40.26
	χ Ophiuci	5.0	17 47.61	3.62	21 24.15	40.16
	5567 B. A. C.	6.5	31 14.93	3.71	34 51.44	40.22
	η Ophiuci	2.3	17 1 12.17	3.50	17 4 49.01	
						+ 3 40.34
21 Giugno . . .	Y Sagittarii	var.	18 11 47.46	— 1.70	18 15 40.77	
	21 Sagittarii	4.9	15 41.32	1.73	19 34.56	+ 3 55.01
	ξ Sagittarii		47 41.42	1.74	51 34.68	54.97
	5236 D. M. — 18°	6.5	57 34.43	1.69	19 1 27.88	55.00
	π Sagittarii	3.1	19 0 6.37	1.75	3 59.82	55.14
	ρ′ Sagittarii	3.9	12 9.34	1.67	16 2.92	55.20
						55.25
22 Giugno . . .	π Sagittarii	3.1	19 0 0.99	— 1.75	19 3 59.84	
	ρ′ Sagittarii	3.9	12 3.90	1.67	16 2.94	+ 4 0.60
	57 Sagittarii		42 34.78	1.71	46 33.83	0.71
	α^2 Capricorni		20 8 40.99	1.55	20 12 40.38	0.76
	[β Capricorni]	3.0	11 34.35	1.43	15 33.65	0.94
	[ρ Capricorni]	5.1	19 20.29	1.62	23 19.61	0.73
						0.94

Segue Tav. I.

Data	*	Gr.	Tempo dell'orologio	$bi+az+ce$	Ascensione retta apparente assunta	Correzione dell'orologio
1902			h m s		h m s	m s
15 Novembre . .	430 D. M. + 15°	6.5	3 1 53.98	+ 0.58	2 59 18.07	— 2 36.49
	δ Arietis	4.1	8 41.90	0.63	3 6 6.29	36.24
	1064 B. A. C.	6.5	24 7.90	0.62	21 32.31	36.21
	f Tauri		28 8.05	0.54	25 32.34	36.25
	1096 B. A. C.		30 35.23	0.55	28 38.25	
	1240 B. A. C.		57 50.44	0.61	55 14.81	36.24
	624 D. M. + 18°	5.9	4 17 23.90	0.62	4 14 48.07	36.45
	δ Tauri	4.0	19 57.40	0.60	17 21.75	36.25
	ε Tauri	3.6	25 34.11	0.62	22 58.48	36.25
	α Tauri	1.0	32 58.07	0.59	30 23.56	36.12
16 Novembre . .	1240 B. A. C.		3 57 50.84	+ 0.55	3 55 14.82	— 2 36.57
	624 D. M. + 18°	5.9	17 24.32	0.56	14 48.09	36.79
	δ Tauri	4.0	19 57.81	0.55	17 21.77	36.59
	ε Tauri	3.6	25 34.50	0.57	22 58.50	36.57
	α Tauri	1.0	32 58.61	0.54	30 22.58	36.57
	ι Tauri	5.0	59 55.20	0.61	57 19.18	36.63
	l Tauri		4 4 41.20	0.59	4 2 5.17	36.62
	1651 B. A. C.	6.5	17 50.05	0.58	15 14.07	36.56
	115 Tauri	5.4	24 7.72	0.56	21 31.75	36.53
	ζ Tauri	3.3	34 28.06	0.60	31 52.09	36.57

TAV. II. — **Ascensioni rette osservate del cratere Moesting A. e ascensioni rette dei lembi.**

Data	Oggetto osservato	Tempo dell'orologio	$(bi+az+ce)$	Correzione dell'orologio	Ascensione retta osservata
1901		h m s		m s	h m s
2 Agosto	Moesting A	23 45 58.55	— 0.71	— 52 45.81	22 53 12.03
3 „	Moesting A	0 40 37.53	0.43	52 46.93	23 47 50.17
	Lembo E	0 41 42.17	0.43	52 46.93	23 48 54.81
24 „	Moesting A	17 55 20.92	+ 0.25	2 8.17	17 53 13.00
27 „	Moesting A	20 41 22.77	1.63	2 10.21	20 39 14.14
28 „	Moesting A	20 50.75	1.79	2 8.98	21 34 43.56
31 „	Moesting A	0 24 59.45	1.01	2 8.01	0 22 52.45
1° Settembre	Moesting A	1 23 0.82	+ 1.00	— 2 7.26	1 20 54.56
	Lembo E	1 24 4.09	1.00	2 7.26	1 21 57.83
24 Ottobre	Moesting A	23 24 34.11	+ 1.83	+ 35.86	23 25 11.80
	Lembo E	23 25 26.79	1.83	35.86	23 26 4.48
1° Novembre	Moesting A	7 45 59.73	+ 3.40	— 1 25.99	7 44 37.54
	Lembo E	7 46 56.01	3.40	1 25.99	7 45 33.42
28 „	Moesting A	7 7 34.63	3.32	+ 9 56.82	7 17 34.77
	Lembo E	7 8 33.10	3.32	9 56.82	7 18 33.24
29 „	Moesting A	8 7 15.40	4.69	9 55.83	8 17 15.92
	Lembo E	8 8 12.30	4.69	9 55.83	8 18 12.82
30 „	Moesting A	9 5 54.52	3.90	9 58.96	9 15 57.38
	Lembo E	9 7 5.21	3.90	9 58.96	9 17 8.07
1° Dicembre	Moesting A	9 55 5.78	+ 3.76	+ 10 1.82	10 5 11.36
	Lembo E	9 56 0.41	3.76	10 1.82	10 6 5.99
30 „	Moesting A	11 11 46.54	0.64	12 8.26	11 23 55.44
	Lembo E	11 12 41.50	0.64	12 8.26	11 24 50.40
31 „	Moesting A	12 0 7.47	0.98	12 15.67	12 12 23.92
	Lembo E	12 0 2.18	0.98	12 15.67	12 12 18.83
1902					
17 Gennaio	Moesting A	1 47 4.82	+ 0.28	+ 14 4.79	2 1 9.89
18 „	Lembo W	2 47 38.38	0.38	11 35.67	2 59 14.43
	Moesting A	2 48 53.20	0.38	11 35.67	3 0 29.25
19 „	Lembo W	3 49 43.74	0.63	11 31.25	4 1 15.62
	Moesting A	3 51 1.54	0.63	11 31.25	4 2 33.41
20 „	Lembo W	4 53 48.67	0.63	11 26.54	5 5 15.84
	Moesting A	4 55 8.58	0.63	11 26.54	5 6 35.75

Segue Tav. II.

Data	Oggetto osservato	Tempo dell'orologio	$(bi+az+ce)$	Correzione dell'orologio	Ascensione retta osservata
1902		h m s		m s	h m s
21 Gennaio	Lembo W	5 55 17.96	+ 0.63	+ 14 32.50	6 9 51.09
	Moesting A	5 56 38.32	0.63	14 32.50	6 11 11.45
25 „	Moesting A	9 53 29.92	0.56	14 58.83	10 8 29.31
	Lembo E	9 54 27.96	0.56	14 58.83	10 9 27.35
27 „	Moesting A	11 35 46.44	0.61	15 11.63	11 50 58.68
	Lembo E	9 36 42.48	0.61	15 11.63	11 51 54.72
28 „	Moesting A	12 24 48.25	1.57	15 16.74	12 40 6.56
29 „	Moesting A	13 13 24.87	1.63	15 22.34	13 28 48.84
	Lembo E	13 14 20.46	1.63	15 22.34	13 29 44.43
18 Febbraio	Moesting A	6 31 55.16	+ 1.59	+ 17 22.73	6 49 19.48
22 „	Moesting A	10 18 37.50	1.53	17 48.69	10 36 27.72
	Lembo E	10 19 35.36	1.53	17 48.69	10 37 25.58
23 „	Moesting A	11 9 51.82	1.57	17 56.13	11 27 49.52
	Lembo E	11 10 48.89	1.57	17 56.13	11 28 46.59
17 Marzo	Moesting A	6 10 28.35	— 0.14	+ 19 55.66	6 30 23.87
18 „	Moesting A	7 10 17.38	0.26	19 59.72	7 30 16.84
19 „	Moesting A	8 7 46.64	0.34	20 3.14	8 27 49.44
20 „	Moesting A	9 2 49.43	0.50	20 6.35	9 22 55.28
24 „	Moesting A	12 26 23.72	0.38	20 22.44	12 46 45.78
25 „	Moesting A	13 15 51.08	0.71	20 26.68	13 36 17.05
	Lembo E	13 16 47.69	0.71	20 26.68	13 37 13.66
26 „	Moesting A	14 5 38.44	1.08	20 30.01	14 26 7.37
	Lembo E	14 6 35.50	1.08	20 30.01	14 27 4.43
27 „	Moesting A	14 55 58.97	2.05	20 32.88	15 16 29.80
	Lembo E	14 56 57.15	2.05	20 32.88	15 17 27.98
28 „	Moesting	15 46 55.57	2.01	20 35.34	16 7 28.90
29 „	Moesting A	16 38 23.26	1.55	20 37.79	16 58 59.50
	Lembo E	16 39 24.52	1.55	20 37.79	17 0 0.76
30 „	Moesting A	17 30 12.01	1.56	20 41.07	17 50 51.52
	Lembo E	17 31 15.09	1.56	20 41.07	17 51 54.60
16 Aprile	Moesting A	17 45 1.26	— 0.94	+ 21 12.54	9 6 22.86
15 Maggio	Lembo W	10 37 13.18	— 1.24	— 3 27.48	10 33 44.46
	Moesting A	10 38 26.32	1.24	3 27.48	10 34 57.60
17 „	Lembo W	12 16 8.47	1.42	3 26.39	12 12 40.66
	Moesting A	12 17 19.48	1.42	3 26.39	12 13 51.67

Segue Tav. II.

Data	Oggetto osservato	Tempo dell'orologio	$(bi+az+ce)$	Correzione dell'orologio	Ascensione retta osservata
1902		h m s		m s	h m s
19 Maggio	Lembo W	13 53 29.08	— 1.56	— 3 24.27	13 50 3.25
	Moesting A	13 54 39.74	1.56	3 24.27	13 51 13.91
22 „	Moesting A	16 25 36.54	1.59	3 23.56	16 22 11.39
	Lembo E	16 26 35.24	1.59	3 23.56	16 23 10.09
23 „	Moesting A	17 17 19.50	1.68	3 24.57	17 13 53.25
	Lembo E	17 18 19.91	1.68	3 24.57	17 14 53.66
24 „	Moesting A	18 9 5.90	1.74	3 25.01	18 5 39.15
	Lembo E	18 10 7.88	1.74	3 25.01	18 6 41.13
25 „	Moesting A	19 0 39.22	1.68	3 25.69	18 57 11.85
	Lembo E	19 1 42.96	1.68	3 25.69	18 58 15.59
14 Giugno	Lembo W	12 49 8.25	— 2.81	— 3 8.14	12 45 57.30
	Moesting A	12 50 20.25	2.81	3 8.14	12 47 9.30
18 „	Lembo W	16 0 44.06	2.74	+ 3 40.10	16 4 21.42
	Moesting A	16 1 55.56	2.74	3 40.10	16 5 32.92
21 „	Moesting A	18 36 51.40	1.74	3 55.11	18 40 44.77
	Lembo E	18 37 53.35	1.74	3 55.11	18 41 46.72
22 „	Moesting A	19 28 12.49	1.70	4 0.80	19 32 11.59
	Lembo E	19 29 15.80	1.70	4 0.80	19 33 14.90
15 Novembre	Moesting A	3 41 40.64	+ 0.61	— 2 36.81	3 39 4.94
	Lembo E	3 42 47.37	0.61	2 36.31	3 40 11.67
16 „	Moesting A	4 47 0.61	0.58	2 36.60	4 44 24.59
	Lembo E	4 48 6.46	0.58	2 36.60	4 45 30.44

Tav. III. — **Ascensioni rette della luna dedotte dalle osservazioni dei lembi e del cratere e confronto colle effemeridi.**

Data	T. m. Parigi	Oggetto osservato	Ascensione retta osservata	Riduzione al centro	Ascensione retta della ☾ osservata	Asc. retta della ☾ calcolata	O-C	Correz. di Newcomb
1901	h m s		h m s	m s	h m s	s		
2 Agosto	13 47 59.09	Moesting A	22 53 12.03	— 1 0.81	22 53 11.22	13.17	— 1.95	— 1.73
3 „	14 38 32.37	Moesting A	23 47 50.17	— 2.14	23 47 48.03	50.47	2.41	
	38 29.91	Lembo E	48 54.81	— 1 7.05	47.76	50.38	1.62	1.74
24 „	7 22 19.23	Moesting A	17 63 13.00	— 0.16	17 53 12.84	14.50	1.66	1.58
28 „	10 47 29.86	Moesting A	21 34 43.56	+ 0.99	21 34 44.55	46.05	1.50	1.76
31 „	13 23 23.49	Moesting A	0 22 52.45	— 3.64	0 22 48.81	51.21	2.41	1.74
1° Settembre	14 17 20.18	Moesting A	1 20 54.56	— 5.93	1 20 48.63	50.45	1.82	1.86
	14.03	Lembo E	21 57.83	— 1 9.37	48.46	50.22	1.76	
24 Ottobre	8 53 32.33	Moesting A	23 25 10.80	+ 1.44	23 25 12.24	13.64	1.46	1.79
28 Novembre	14 27 2.09	Moesting A	7 17 34.77	— 12.04	7 17 22.73	24.49	1.76	1.90
	26 49.37	Lembo E	18 33.24	— 1 11.17	22.07	23.97	1.90	
29 „	15 22 37.56	Moesting A	8 17 15.92	— 11.43	8 17 4.49	6.23	1.74	1.85
	25.67	Lembo E	18 12.82	— 1 8.75	4.07	5.77	1.70	
30 „	16 14 13.99	Moesting A	9 15 57.38	— 10.47	9 15 46.91	48.34	1.43	1.74
1° Dicembre	17 2 23.49	Moesting A	10 5 11.36	— 9.46	10 5 1.90	3.30	1.40	1.64
	13.63	Lembo E	6 5.99	— 1 4.46	1.53	2.96	1.43	
30 „	16 26 53.25	Moesting A	11 23 55.44	— 8.15	11 23 47.39	48.63	1.24	1.73
	44.86	Lembo E	24 50.40	— 1 3.30	47.10	48.36	1.26	
31 „	17 11 17.87	Moesting A	12 12 23.92	— 7.73	12 12 16.19	17.85	1.66	1.56
	10.10	Lembo E	12 18.83	— 1 2.64	16.19	17.61	1.42	

Segue Tav. III.

Data	T. m. Parigi	Oggetto osservato	Ascensione retta osservata	Riduzione al centro	Ascensione retta della ☾ osservata	Asc. retta della ☾ calcolata	O-C	Correz. di Newcomb
1902	h m s		h m s	m s	h m s	s		
17 Gennaio	5 54 53.44	Moesting A	2 1 9.89	— 2.64	2 1 7.25	8.85	— 1.50	1.87
18 „	6 50 3.04	Lembo W	2 59 14.43	+ 1 10.61	3 0 25.04	26.70	1.66	1.96
	7.24	Moesting A	3 0 29.25	— 4.23	0 25.02	26.87	1.85	
19 „	7 47 59.17	Lembo W	4 1 15.62	+ 1 12.04	4 2 27.66	30.00	2.34	2.03
	8 5.32	Moesting A	2 33.42	— 5.77	27.65	29.25	1.61	
20 „	8 47 54.13	Lembo W	5 5 15.84	+ 1 12.78	5 6 28.62	30.06	1.44	2.06
	48 1.26	Moesting A	6 35.15	— 7.02	28.73	30.36	1.63	
21 „	9 48 22.66	Lembo W	6 9 51.09	+ 1 12.55	6 11 3.64	4.95	1.31	2.05
	30.45	Moesting A	11 11.45	— 7.81	3.64	5.28	1.64	
25 „	13 29 25.79	Moesting A	10 8 29.31	— 7.66	10 8 21.65	23.08	1.43	1.73
	17.98	Lembo E	9 27.35	— 1 5.87	21.48	22.80	1.32	
27 „	15 3 47.55	Moesting A	11 50 58.68	— 7.37	11 50 51.31	52.63	1.32	1.60
	39.11	Lembo E	51 54.72	— 1 3.50	51.22	52.34	1.12	
28 „	15 48 50.48	Moesting A	12 40 6.56	— 7.25	12 39 59.31	60.49	1.18	1.58
29 „	16 33 28.86	Moesting A	13 28 48.84	— 7.06	13 28 41.78	43.07	1.29	1.57
	21.43	Lembo E	29 44.43	— 1 3.04	41.39	42.83	1.44	
18 Febbraio	8 36 26.78	Moesting A	6 49 19.48	— 7.81	6 49 11.67	14.04	2.37	1.96
22 „	12 7 14.18	Moesting A	10 36 27.72	— 6.58	10 36 21.14	22.37	1.23	1.69
	7.11	Lembo E	37 25.58	— 1 4.96	20.62	22.12	1.50	
23 „	12 54 31.76	Moesting A	11 27 49.52	— 6.56	11 27 42.96	44.15	1.19	1.68
	24.76	Lembo E	28 46.59	— 1 3.98	42.61	43.91	1.30	

Segue Tav. III.

Data	T. m. Parigi	Oggetto osservato	Ascensione retta osservata	Riduzione al centro	Ascensione retta della ☾ osservata	Asc. retta della ☾ calcolata	O-C	Correz. di Newcomb
1902	h m s		h m s	m s	h m s	s		
17 Marzo	6 31 24.80	Moesting A	6 30 23.87	— 9.16	6 30 14.71	16.19	— 1.48	— 1.94
18 „	7 27 12.05	Moesting A	7 30 16.84	— 8.58	7 30 8.26	9.66	1.40	1.88
19 „	8 20 39.31	Moesting A	8 27 49.44	— 7.81	8 27 41.63	42.95	1.32	1.81
20 „	9 11 30.37	Moesting A	9 22 55.28	— 7.11	9 22 48.17	49.15	1.08	1.75
24 „	12 19 12.70	Moesting A	12 46 45.78	— 6.36	12 46 39.42	40.68	1.26	1.61
25 „	13 4 40.95	Moesting A	13 36 17.05	— 6.37	13 36 10.68	11.96	1.28	1.61
	34.30	Lembo E	37 13.66	— 1 3.28	10.38	12.13	1.75	
26 „	13 50 27.21	Moesting A	14 26 7.37	— 6.19	14 26 1.18	2.45	1.27	1.63
	20.63	Lembo E	27 4.43	— 1 3.65	0.78	2.23	1.45	
27 „	14 36 45.48	Moesting A	15 16 29.80	— 5.69	15 16 24.11	25.66	1.55	1.65
	39.59	Lembo	17 27.98	— 1 4.09	23.89	25.46	1.57	
28 „	15 23 40.49	Moesting A	16 7 28.90	— 4.79	16 7 24.11	25.63	1.52	1.66
29 „	16 11 6.58	Moesting A	16 58 59.50	— 3.52	16 58 55.98	57.60	1.62	1.67
	2.94	Lembo E	59 0.76	— 1 4.91	55.85	57.47	1.62	
30 „	16 58 54.19	Moesting A	17 50 51.52	— 1.97	17 50 49.55	51.17	1.62	1.68
	52.16	Lembo W	51 54.60	— 1 5.12	49.48	51.10	1.62	
16 Aprile	7 9 1.04	Moesting A	9 6 22.86	— 8.56	9 6 14.30	15.57	1.27	1.73
15 Maggio	6 43 11.13	Lembo E	10 33 44.46	+ 1 4.31	10 34 48.77	49.95	1.18	1.65
	19.94	Moesting A	34 57.60	— 8.61	48.99	50.25	1.20	
17 „	8 13 57.93	Lembo W	12 12 40.66	+ 1 2.75	12 13 43.41	44.64	1.23	1.58
	14 5.99	Moesting A	13 51.67	— 7.92	43.75	44.91	1.16	

Segue Tav. III.

Data	T. m. Parigi	Oggetto osservato	Ascensione retta osservata	Riduzione al centro	Ascensione retta della ☾ osservata	Asc. retta della ☾ calcolata	O-C	Correz. di Newcomb
1902	h m s		h m s	m s	h m s	s		
19 Maggio	9 43 12.77	Lembo W	13 50 3.25	+1 2.96	13 51 6.21	7.40	—1.19	—1.60
	20.45	Moesting A	51 13.91	— 7.53	6.38	7.65	1.27	
22 „	12 2 5.48	Moesting A	16 22 11.39	— 5.59	16 22 5.80	7.29	1.41	1.68
	9.72	Lembo E	23 10.09	—1 4.45	5.64	7.44	1.80	
23 „	12 50 42.96	Moesting A	17 13 53.25	— 4.23	17 13 49.02	50.72	1.70	1.68
	38.54	Lembo E	14 53.66	—1 4.70	48.96	50.56	1.70	
24 „	13 37 24.47	Moesting A	18 5 39.15	— 2.61	18 5 36.54	38.21	1.67	1.68
	21.76	Lembo E	6 41.13	—1 4.70	36.43	38.12	1.69	
25 „	14 24 52.81	Moesting A	18 57 11.85	— 0.89	18 57 10.96	12.60	1.64	1.67
	52.07	Lembo E	58 15.59	—1 4.49	11.10	12.57	1.47	
14 Giugno	6 57 3.62	Lembo W	12 45 57.30	+1 2.92	12 47 0.22	1.44	1.22	1.59
	12.67	Moesting A	47 9.30	— 8.88	0.42	1.74	0.92	
18 „	9 59 12.95	Lembo W	16 4 21.42	+1 4.29	16 5 25.71	27.37	1.66	1.66
	20.14	Moesting A	5 32.92	— 6.96	25.96	27.52	1.56	
21 „	11 22 18.83	Moesting A	18 40 44.77	— 2.54	18 40 42.23	46.61	1.38	1.68
	16.35	Lembo E	41 46.72	—1 4.62	42.10	43.18	1.08	
22 „	13 9 41.31	Moesting A	19 32 11.59	— 0.92	19 32 10.67	12.09	1.42	1.67
	9 40.16	Lembo E	33 14.90	—1 4.29	10.61	12.05	1.44	
15 Novembre	11 41 12.33	Moesting A	3 39 4.94	— 5.20	3 38 59.74	61.60	1.86	2.12
	6.92	Lembo E	40 11.67	—1 12.32	59.35	61.37	2.02	
16 „	12 42 25.37	Moesting A	4 44 24.59	— 7.02	4 44 17.57	19.42	1.85	2.16
		Lembo E	45 30.44	—1 13.33	17.11	19.09	1.98	

Relazione sulla Memoria del prof. Antonio Garbasso, intitolata: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce.*

Il prof. Garbasso immagina la perturbazione elettromagnetica, che propagandosi per onde costituisce la luce, generata da un *oscillatore complesso*, e cioè, da un oscillatore costituito da più corpi conduttori elettrizzati, comunque congiunti da fili conduttori, lungo i quali hanno luogo *scariche oscillatorie.*

Ammesso per semplificazione che i corpi conduttori non esercitino influenza gli uni sugli altri e che i fili conduttori non abbiano capacità, l'A. svolge matematicamente la sua concezione e mostra come un tal oscillatore possa emettere vibrazioni elementari le quali presentano tutte quelle particolarità, in relazione colla costituzione molecolare od atomica dei corpi, che l'analisi spettrale della luce ha rivelato.

Specialmente degno di menzione è il risultato cui giunge l'A. come dall'affacciarsi di sistemi identici nasca una perturbazione nell'oscillazione propria a ciascuno di essi, la quale si manifesta collo scindersi della corrispondente riga spettrale in più righe.

La novità e l'interesse che offrono questi studî, a parere dei sottoscritti, raccomandano all'Accademia l'accoglimento della memoria del prof. Garbasso nella raccolta delle memorie accademiche.

A. Naccari,
G. Morera, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Febbraio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEYRON, Vice-Presidente dell'Accademia, FERRERO, Direttore della Classe, MANNO, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, CARLE, BRUSA, CHIRONI e CIPOLLA ff. di Segretario.

Il Presidente apre la seduta ricordando la morte della madre del Socio Segretario RENIER, e aggiungendo che interprete dei sentimenti della Classe, presenterà le dovute condoglianze al Socio stesso.

Nel tempo medesimo invita il Socio CIPOLLA ad assumere, per la seduta odierna, l'officio di Segretario.

Letto il processo verbale della seduta precedente, risulta approvato.

Sono presentati dalla Presidenza i seguenti volumi giunti in dono: E. CAIS DI PIERLAS et Gustave SAIGE, *Chartrier de l'Abbaye de Saint-Pons hors les murs de Nice,* publié par ordre de S. A. S. le prince Albert Ier de Monaco (Imprimerie de Monaco, 1903) e Uberto GOVONE, *Il generale Giuseppe Govone: Frammenti di memorie* (Torino, F. Casanova, edit., 1902). Si rileva l'importanza dell' una e dell'altra opera, notando che la prima di esse fu regalata da S. A. S. il principe di Monaco.

Il Socio FERRERO presenta, con parole di elogio, un volume di Luigi CANTARELLI, che si intitola: *La Diocesi Italiciana da*

Diocleziano alla fine dell'impero occidentale (Roma, tip. Poliglotta, 1903, estr. dagli " Studi e documenti di storia e diritto „).

Il Socio Chironi presenta l'opuscolo di Enrico Cocchia, *Di una riforma razionale del nostro presente sistema di esami* (Napoli, Stabil. tip. della R. Università, 1902, estr. dagli " Atti della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli „) e ne rileva l'importanza.

Il medesimo Socio Chironi richiama l'attenzione della Classe sul progetto di riforma giudiziaria testè presentato dal Ministero alla Camera dei Deputati: crede utile che l'Accademia se ne occupi, e osservando come in esso si possa notare una lacuna nella parte penale, esprime il desiderio che il Socio Brusa faccia in proposito qualche comunicazione all'Accademia.

Il Socio Brusa dà su questo argomento qualche comunicazione di fatto, ma soggiunge che le sue molte occupazioni gli impediscono d'accettare l'invito del Socio Chironi, e prega quest'ultimo ad occuparsene egli stesso.

Il Socio Chironi dice che entrerà egli in materia, augurandosi che il Socio Brusa voglia poi riprendere l' argomento.

Il Socio Ferrero legge la commemorazione del compianto Socio Claretta, di cui era stato incaricato dalla Presidenza. Il Presidente ringrazia il Socio Ferrero per tale commemorazione, la quale sarà inserita negli *Atti*.

LETTURE

GAUDENZIO CLARETTA

PAROLE COMMEMORATIVE

DEL SOCIO
ERMANNO FERRERO

Era finita l'adunanza della Classe del 21 gennaio 1900. Gaudenzio Claretta, uscito con parecchi di noi, si accomiatò annunciandoci la sua prossima partenza per Roma, chiamatovi a dirigere certi esami ad archivisti. Contro la sua abitudine, quel giorno egli era sopra pensiero per il suo viaggio. L'*influenza* era riapparsa: qui, altrove, anche nella capitale, molti i colpiti. Egli chiese nomi di medici a Roma: triste presentimento! Un mese dopo giungeva fulminea la notizia che là, il 17 febbraio, era caduto vittima della fatale malattia. Un nuovo gravissimo lutto per l'Accademia, specialmente per la nostra Classe, la quale, orbata l'anno prima di due suoi membri operosi, Cesare Nani e Domenico Perrero, ora vedeva sparire il suo Direttore, da ventotto anni in essa esempio di lavoratore infaticabile e di ottimo collega (1).

Lavoratore infaticabile: ecco ciò che fu il Claretta. A lui il censo avrebbe consentito i molli ozii: egli avrebbe potuto, come si dice, godersi tranquillamente la vita, facendo solo quel tanto, che è necessario, per non divenir preda della noia. All'opposto egli, dotato di un' attività, che non è esagerato chia-

(1) Fu eletto accademico nell'adunanza del 26 maggio 1872; l'elezione ebbe la sovrana approvazione il 3 giugno. Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche il 24 febbraio 1895 (elezione approvata con R. decreto 7 marzo), confermato per un secondo triennio il 20 febbraio 1898 (appr. R. decr. 3 marzo).

mare straordinaria, di un' attività, che, anzichè diminuire, pareva crescere con gli anni, consacrò moltissima parte di questa attività ai pubblici ufficii, portando nelle amministrazioni di comuni, di opere pie e, sullo scorcio della vita, anche in quella della provincia di Torino (1), la sua opera retta, intelligente, coscienziosa. Sapeva di sciupar tempo, di affaticarsi, di logorarsi in mezzo alle noie, ai fastidii, specialmente fra gli elettori e gli eletti rurali: ma sapeva che la sua presenza era utile, ed egli rimaneva. E qui, in questa Accademia, dove l'uomo di studio era al suo posto, noi lo ricordiamo non solo assiduo alle adunanze e largo de' suoi scritti per i nostri volumi, ma non rifuggir mai da incarichi amministrativi (2), di commissioni per premii, per giudizii sopra lavori presentati, dando in una parola l'esempio del modo migliore, con cui si manifesta l'affetto e la stima per una Società, a cui si è onorati di appartenere. Ed egli, Piemontese di vecchio stampo, sopra ogni altra cosa, si onorava di essere ascritto al maggiore degli istituti scientifici del Piemonte, come era lieto della lunga appartenenza alla Deputazione di storia patria, in cui tenne l' ufficio di segretario, insieme con un collega (3).

Quando nel 1874, un manipolo di studiosi, il fiore di coloro, che attendevano ad investigare le memorie archeologiche, artistiche, storiche della nostra contrada, costituì la Società di archeologia e belle arti per la provincia di Torino, il Claretta fu tra questi. Nel 1894 (4) succedette al Fabretti nella presidenza. Questa Società fu sempre carissima al suo cuore; per essa egli aveva l'affetto e le cure, che un padre ha per la sua creatura;

---

(1) Fu eletto consigliere della provincia di Torino nel 1898, rieletto nel 1899; quando morì, faceva parte dei consigli comunali di Grugliasco, di Rivalta e di Beinasco, della direzione dell'Opera pia di San Luigi Gonzaga, del R. Ricovero di mendicità, del Collegio degli Artigianelli.

(2) Resse la tesoreria accademica col titolo di tesoriere aggiunto dal 1875 (12 marzo) al 1879 (7 ottobre).

(3) Membro corrispondente della R. Deputazione di storia patria (el. 1° luglio 1860); membro effettivo (elezione 22 gennaio 1863, appr. con R. decreto 29 gennaio): segretario (el. 21 aprile 1874, appr. con R. decreto 15 maggio).

(4) El. 20 dicembre. Dal 28 giugno 1888 il Claretta era vicepresidente della Società (confermato 31 dicembre 1891).

dolevasi che mal giustificati pretesti di economia le avessero fatto perdere quei mezzi pecuniarii, avuti al suo sorgere, dalla provincia e dal municipio di Torino, obbligandola a restringere i suoi lavori e le sue pubblicazioni. Indarno si adoprò per riottenere questi mezzi.

Erano molti i suoi ufficii; ad essi va aggiunta l'amministrazione di ricco patrimonio con case e terreni. Il tempo, che gli rimaneva libero, fosse pure un briciolo della sua lunga giornata, era dato allo studio. Studiava nella sua libreria, che aveva fatta ricca di opere rare e di manoscritti; studiava negli archivii e nelle biblioteche pubbliche e private; leggeva, prendeva note, correggeva stampe sempre, dovunque. Per la cura de' suoi possedimenti agricoli dimorava parte dell'anno in una sua villa al Gerbido degli Amoretti: spesso doveva venire in città o recarsi nei vicini comuni; nel tragitto in vettura aveva ognora con sè libri e carte. Sempre affaccendato, mai uno svago, salvo qualche passeggiata a cavallo o, al mattino, a piedi per la città, seguìto dal suo cane (amava le bestie, indizio di animo gentile); ma allora finiva per lo più dai venditori di libri vecchi. Recavasi nella calda stagione, con la famiglia, in collina od in montagna. In vece di godersi poche settimane di ben meritato riposo, continuava a frugare negli archivii locali.

Il nostro collega Antonio Manno indicò la mole del lavoro letterario del Claretta, la cui " vita *negotiosa* „ ben disse " più " che colla biografia si spiega e si elogia colla bibliografia „. Sono 185 fra libri, parecchi voluminosi, opuscoli, *memorie* accademiche, articoli di rassegne e di giornali, anche di giornaletti di piccole città, all'incirca più di 14800 pagine (1), stampate in quarant'anni, a partire dal 1859, quando il Claretta ne aveva ventiquattro (2) e da due anni aveva terminato gli studii universitarii (3).

Il Claretta indagò soltanto la storia piemontese, sopra tutto dei secoli XVI, XVII e XVIII: quella di altri paesi appena sfiorò ove potesse aver tratto con la nostra. Un libro sul sog-

---

(1) *Il lavoro quadragenario del barone Gaudenzio Claretta*, nella *Miscellanea di storia italiana*, serie III, t. V, 1900, pag. XLIII-LX.

(2) Gaudenzio Claretta nacque in Torino da Fedele e da Paolina Spanna il 21 novembre 1835.

(3) Conseguì la laurea in giurisprudenza il 19 luglio 1857.

giorno di Cristina di Svezia in Italia (1), qualche aneddoto di storia ligure (2), una notizia sopra una famiglia patrizia di Milano (3) sono forse le sole sue pubblicazioni, che escano dalla cerchia della nostra regione.

Le due opere principali del Claretta per la mole e per la larghezza dell'argomento, comprendenti circa quarant' anni della nostra storia generale, di cui i primi tempestosissimi, sono quelle, in cui narrò la reggenza di Cristina di Francia (4) ed il regno di Carlo Emanuele II (5), entrambe ricche, potrei dire straricche di documenti e di particolari di ogni maniera. Ma più che i grandi quadri storici, il nostro collega amò la monografia, la biografia, la ricerca aneddotica e curiosa. E descrisse fatti speciali della nostra storia politica o della vita dei nostri principi (6),

---

(1) *La regina Cristina di Svezia in Italia* (1655-1689), memorie storiche ed aneddotiche con documenti, Torino, 1892; 8°, pp. XVI-456.

(2) *Un'impresa contro Genova sotto il regno del duca Lodovico di Savoia* (1449) (*Atti della Soc. lig. di st. patria*, vol. XIII, Genova, 1879, p. 339-361). — *Il doge di Genova alla corte di Versailles nel maggio dell'anno 1685* (*Giorn. ligustico*, anno XII, 1885, p. 336-346). — *I Genovesi alla corte di Roma negli anni luttuosi delle loro controversie con Luigi XIV* (1678-1685), nota storica ed aneddotica (*Ibid.*, a. XIV, 1887, p. 3-28) e qualche altro.

Alla vita di Liguri venuti al servizio di principi di Savoia si riferiscono gli scritti: *Sulle avventure di Luca Assarino e Gerolamo Brusoni chiamati alla corte di Savoia nel secolo XVI ed eletti istoriografi ducali* (*Atti della R. Acc. delle sc. di Tor.*, vol. VIII, 1872-73, p. 112-141, 303-343, 385-409, 512-571). — *Il genovese Negrone di Negro, ministro di finanze di Emanuele Filiberto duca di Savoia*, memorie storiche e biografiche (*Riv. europea*, n. s., a. XII, vol. XXVI, Firenze, 1881, p. 204-228, 379-402, 513-538, 681-694, 853-889).

(3) *Sugli Assandri patrizi milanesi*, dissertazione storico-genealogica (*Arch. stor. lomb.*, a. X, 1883, p. 683-735).

(4) *Storia della reggenza di Cristina di Francia duchessa di Savoia* con annotazioni e documenti inediti, Torino, 1868-69; 8°; 3 vol., pp. XV-895, 793, 313.

(5) *Storia del regno e dei tempi di Carlo Emanuele II duca di Savoia*, Genova, 1877-79; 8°, 3 vol., pp. XIV-922, 772, 408.

(6) *Spigolature sul regno di Carlo III duca di Savoia* (*Arch. stor. it.*, s. III, t. XVIII, 1876, p. 441-468). — *La mission du seigneur de Barres envoyé extraordinaire de François Ier roi de France à la cour de Charles III duc de Savoie* d'après des documents inédits (*Mém. de l'Acad. des sciences, belles-lettres et arts de Savoie*, s. III, t. VIII, Chambéry, 1880, p. 347-376). — *Relazione della morte di Carlo III duca di Savoia* (*Riv. contemp. naz. ital.*, vol. LII, Torino, 1868, p. 417-432). — *La successione di Emanuele Filiberto al*

illustrò quella di luoghi e di famiglie (1), dei nostri ordini

---

trono sabaudo e la prima ristorazione della casa di Savoia, narrazione storico-critica, Torino, 1884; 8°, pp. 464. — *Il duca di Savoia Emanuele Filiberto e la corte di Londra negli anni 1554 e 1555*, reminiscenze storico-diplomatiche raccolte su documenti inediti, Pinerolo, 1892; 8°, pp. 76, 4. — *Giacomina d'Entremont ammiraglia di Coligny ed Emanuele Filiberto duca di Savoia* (*La Nuova Rivista*, vol. III, Torino, 1882, p. 361-369, 378-380, 395-397, 411-413, vol. IV, p. 11-13, 25-27). — *Il principe Emanuele Filiberto di Savoia alla corte di Spagna*, studi storici sul regno di Carlo Emanuele I, Torino, 1872; 8°, pp. 376. — *Ferrante Vitelli alla corte di Savoia nel sec. XVI* (*Atti della R. Acc. delle scienze di Torino*, vol. XIV, 1878-79, p. 673-689, 773-803, 975-984, 989-1001, 1278-1301). — *La principessa Maria Colonna-Mancini nelle particolari sue relazioni col duca di Savoia Carlo Emanuele II* (*Arch. della R. Soc. romana di storia patria*, vol. XX, Roma, 1897, p. 95-175). — *Ennemond de Servient ambassadeur de France à Turin* (1648-1676), anecdotes inconnues recueillies (*Bull. de l'Acad. delphinale*, 4e série, IX, Grenoble, 1896, p. 503-531). — *Sulla legazione a Roma dal 1710 al 1714 del marchese Ercole di Priero*, studio storico-biografico (*Giorn. ligustico*, a. XIV, 1887, p. 321-360). — *Le relazioni politiche e dinastiche dei principi di Savoia coi margravi di Baden dal secolo XV al XVIII* narrate su documenti storici, Torino, 1887; 8°, pp. 254.

(1) *Il municipio torinese ai tempi della pestilenza del 1630 e della reggente Cristina di Francia duchessa di Savoia*, Torino, 1868; 8°, pp. 256. — *L'edificazione della cittadella di Torino*, 1564-1573 (*Atti della Soc. di arch. e belle arti*, vol. V, 1887, p. 219-246). — *Sull'antichissimo monastero torinese di S. Pietro dell'ordine benedettino*, notizia storico-critica (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XXIV, 1888-89, p. 672-693). — *I marmi scritti della città di Torino e de' suoi sobborghi* (*chiese, istituti di beneficenza, palazzi*, ecc.) *dai bassi tempi al secolo XIX* con copiose annotazioni storiche, biografiche e necrologiche, Torino, 1899; 8°, pp. XVI-716 (in parte pubblicato negli *Atti della Soc. di arch.*, vol. I e segg.). — *Di Giaveno, Coazze e Valgioie*, cenni storici con annotazioni e documenti inediti, Torino, 1859; 8°, pp. XVII-350. — *Cronistoria del municipio di Giaveno dal secolo XVIII al XIX* con molte notizie relative alla storia generale del Piemonte, Torino, 1875; 8°, pp. 724. — *Il comune di Giaveno nel medio evo. In quali modi il comune di Giaveno giungesse a conservare la propria autonomia* (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XXI, 1883, p. 507-530). — *Storia diplomatica dell'antica abbazia di San Michele della Chiusa* con documenti inediti, Torino, 1870; 8°, pp. XVI-369. — *L'abbazia di S. Michele della Chiusa nel medio evo*, notizia storico-critica e sfragistica (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XXII, 1886-87, p. 371-391). — *Notizia storica sulla più antica carta di franchigia e sui primi statuti conceduti ad Avigliana dai conti di Savoia* (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. IX, 1873-74, p. 898-944). — *Sugli antichi signori di Rivalta e sugli statuti da loro accordati nel secolo XIII a Rivalta, Orbassano e Gonzola*, memoria storico-critica compilata su documenti inediti (*Ibid.*, vol. XIII, 1877-78, p. 567-586, 925-951, 1197-1283). — *Sulle antiche società dei nobili della repubblica di*

equestri (1), dell'arte (2), dei costumi (3); scrisse biografie di principesse di casa Savoia od in essa entrate (4); radunò me-

---

Chieri e del suo patriziato sotto il dominio della R. Casa di Savoia (*Ibid.*, vol. XX, 1884-85, p. 444-461, 569-592). — *Sulle principali vicende della Cisterna d' Asti dal sec. XV al XVIII* (*Mem. della R. Acc. delle sc.*, s. II, t. XLVIII, 1899, p. 165-238). — *Reminiscenze antiche di Verrua di Monferrato* (*Arch. stor. lomb.*, a. VIII, 1881, p. 225-245). — *Clemente V papa ed Enrico VII imperatore di Germania al castello di Rivoli secondo un documento dell'ottobre 1310* (*Giorn. araldico-genealogico-diplomatico*, a. XII, 1885, p. 101-110). — *I signori di Montafia, Tigliole, Varisella e Maretto*, dissertazione storico-critica e genealogica (*Ibid.*, a. X, Pisa, 1882, p. 1-14, 33-41, 61-68, 134-141, 229-237, 305-310; XI, 1883, p. 30-35). — *Sulle liberalità compiute dagli aviglianesi de Thoet, ciambellani e guardasigilli dei primi conti di Savoia nei secoli XII e XIII* (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XVII, 1881-82, p. 497-518). — *Gli Alfieri ed il vescovo d'Asti Baldracco Malabaila, 1349-1354* (*Ibid.*, vol. XXVI, 1890-91, p. 773-790). — *Della tirannia dei Ferrero Fieschi principi di Masserano* (*Ibid.*, vol. XXVII, 1891-92, p. 415-436). — *Dell' origine fiorentina de' Boncompagni del Piemonte* (*Giorn. arald.*, a. XXVII, 1899, p. 121-132, 174).

(1) *Statuti antichi inediti e statuti recenti dell'Ordine supremo della SS. Annunziata con notizie storiche relative al medesimo*, Torino, 1881; 4°, pp. 84. — *Memorie risguardanti l'ordine cavalleresco del Collare di Savoia nel primo secolo della sua fondazione* (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XVIII, 1882-83, p. 806-834). — *Sulla vera patria e sulle principali vicende di Riccardo Musard, uno dei primi cavalieri dell'ordine savoino del Collare* (*Ibid.*, vol. XIX, 1883-84, p. 952-974).

(2) *Inclinazioni artistiche di Carlo Emanuele I di Savoia e de' suoi figli* (*Atti della Soc. di arch.*, vol. V, 1894, p. 339-360). — *Il pittore Federigo Zuccaro nel suo soggiorno in Piemonte e alla corte di Savoia (1605-1607) secondo il suo " Passaggio per l'Italia "* con annotazioni artistiche, Torino, 1895; 8°, pp. 84. — *Notizie artistiche sul regno di Carlo Emanuele II* ricavate da documenti inediti (*Atti della Soc.*, vol. I, 1875, p. 53-84). — *Le peripezie del celebre quadro di Van Dyck " il ritratto equestre del principe Tommaso di Savoia " e dei famosi arazzi " gli amori di Mercurio "* (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XXV, 1889-90, p. 548-561). — *I Reali di Savoia munifici fautori delle arti*, contributo alla storia artistica del Piemonte del secolo XVIII (*Misc. di st. ital.*, t. XXX, 1893, p. 1-307).

(3) *Un ballo di nobili datosi a Carignano nel carnevale del 1524*, schizzo storico dei costumi piemontesi nel secolo XVI (*Riv. europea*, n. s., a. XI, vol. XIX, 1880, p. 225-257). — *La corte e la società torinese dalla metà del sec. XVII al principio del XVIII*, reminiscenze storiche ed aneddotiche, edizione ritoccata ed accresciuta, Firenze, 1894; 8°, pp. 266 (estr. dalla *Rassegna nazionale*, vol. LXXIII, LXXIV).

(4) *Notizie intorno alla vita ed ai tempi di Beatrice di Portogallo duchessa di Savoia*, Torino, 1863; 8°, pp. 196. — *Vita di Maria Francesca Elisabetta*

morie su piemontesi chiari nella politica e nell'amministrazione (1), nelle lettere, nella storiografia, nell'erudizione (2); commemorò compagni di studio ed amici (3); pubblicò lettere di uomini illustri (4).

Il Claretta, che avrebbe potuto con calma scrivere e stampare i suoi lavori, non sapeva resistere alla brama di dar fuori subito il frutto delle sue ricerche e delle sue scoperte, alla brama, sto per dire alla smania, di far succedere senza tregua pubblicazioni a pubblicazioni, quasi a destare stupore per tanta fecondità. E ciò nocque ai suoi scritti. Spesso si desidererebbe in essi ordine, collegamento, chiarezza migliori. Non tutti i suoi libri maggiori sono opere organiche con proporzione fra le varie

---

di Savoia Nemours regina di Portogallo con note e documenti inediti, Torino, 1865; 8°, pp. 312. — *Adelaide di Savoia duchessa di Baviera ed i suoi tempi*, narrazione storica scritta su documenti inediti, Torino, 1877; 8°, pp. x-226. — *L'arrivée d'Anne d'Orléans épouse de Victor-Amédée II à la cour de Savoie en 1684* (*Mém. et doc. publiés par la Soc. savoisienne d'hist. et d'arch.*, t. XXXIV, Chambéry, 1893, p. 97-142).

(1) *Il presidente Gianfrancesco Bellezia torinese*, monografia storica con documenti, Torino, 1866; 8°, pp. 182. — *Notizie per servire alla vita del gran cancelliere di Carlo V Mercurino di Gattinara*, memoria I (*Mem. della R. Accad. d. sc.*, s. II, t. XLVII, 1897, p. 67-147).

(2) *Memorie storiche intorno alla vita ed agli studi di Gian Tomaso Terranco, di Angelo Paolo Carena e di Giuseppe Vernazza* con documenti, Torino, 1862; 8°, pp. xv-303. — *Sui principali storici piemontesi e particolarmente sugli storiografi della R. Casa di Savoia*, memorie storiche, letterarie e biografiche (*Mem. della R. Acc. delle sc. di Tor.*, serie II, t. XXX, 1878, p. 261-512; t. XXXI, 1879, p. 1-336).

(3) *Carlo Promis* (*Arch. stor. it.*, serie III, t. XVIII, 1873, p. 503-515). — *Il conte e senatore Lodovico Sauli*, necrologia (*Ibid.*, t. XX, 1874, p. 511-516). — *Commemorazione del conte Alessandro Franchi-Verney* (*Misc. di st. ital.*, t. XXI, 1883, p. 249-270). — *Antonio Bosio ne' suoi scritti, nelle sue opere di beneficenza e nelle sue relazioni sociali*, memorie biografiche e letterarie, Torino, 1883; 8°, pp. 78. — *Il conte Edoardo Arborio Mella* (*Arch. stor. it.*, s. IV, t. XIV, 1884, p. 112-122). — *Alfonso Corradi ricordato ne' suoi lavori scientifici in relazione alla storia* (*Mem. della R. Acc. delle sc.*, s. II, t. XLIV, 1894, p. 89-114). — *Filippo Linati*, commemorazione (*Atti della R. Acc. delle sc.*, vol. XXXI, 1895-96, p. 775-796). — *Cornelio Desimoni*, commemorazione (*Ibid.*, vol. XXXV, 1899-900, p. 106-111).

(4) *Lettere scelte di illustri personaggi tratte dai manoscritti legati dal cav. abate Costanzo Gazzera alla R. Accademia delle scienze* (*Miscellanea di storia italiana*, t. I, Torino, 1862, p. 373-429). — *Lettere inedite di Silvio Pellico* (*Riv. europea*, n. s., a. X, vol. XII, 1879, p. 210-230).

parti, con sentimento della misura: notizie di valore disugualissimo s'intrecciano insieme; il racconto è tratto tratto fermato da considerazioni, che appaiono fuor di luogo, ovvero si estende, si dilunga in minuzie; il lettore si affanna nel seguirlo e, chiuso il libro, non gli rimane quell'imagine netta degli uomini e dei fatti, che si vuole dal libro, il cui titolo è *storia*. E storia è ricostruzione, per quanto è possibile, esatta dei tempi, che furono, non solo raccolta di materiali per tale ricostruzione. Nè gli stessi documenti, riprodotti nella massima parte delle pubblicazioni del Claretta, sono sempre stampati in quella guisa, che esonera chi se ne serve dall'obbligo di riprendere in mano gli originali.

Il Claretta inoltre non era convinto che nello scrivere semplicità è vera eleganza, e questa si avvisò di trovare (specialmente per i suoi lavori più recenti) nelle parole e nelle frasi studiate, in artificii retorici, in citazioni classiche incastrate con isforzo.

Tali difetti offuscano certamente il merito del Claretta come scrittore; ma ciò che sarà per il suo nome lode, e lode grande, si è la faticosa indagine dovunque sperava trovar documenti ignorati, e quindi anche ove i più non sarebbero andati a rintracciarli. Moltissimo egli ha veduto, moltissimo ha fatto conoscere. La storia politica, civile, letteraria, artistica del Piemonte in grazia sua si accrebbe di un gran numero di fatti nuovi. Chi ritornerà sugli argomenti da lui trattati non dovrà, senza venir meno alla giustizia, mancargli di gratitudine per averlo posto sulla strada e munitolo largamente di mezzi per percorrerla.

Sempre poi in lui nello scrivere la più scrupolosa onestà. E come nello scrivere, onestissimo in tutte le sue azioni. Mite, affabile, pronto a render servizio, senza rancori; marito, padre, amico, collega, gentiluomo esemplare, lasciò di sè quel desiderio, che lasciano soltanto coloro, la cui vita fu una vita nobilmente vissuta.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Febbraio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Spezia, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Morera e Camerano Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente annunzia alla Classe la morte dell' accademico straniero prof. Giorgio Gabriele Stokes dell' Università di Cambridge.

Il Socio Naccari pronuncia in commemorazione dell'illustre defunto le seguenti parole:

Giorgio Gabriele Stokes nacque a Skreen in Irlanda nel 1819. Entrò a 18 anni nel collegio Penbroke a Cambridge. Cominciò a sperimentare con semplicissimi apparecchi quand' era ancora studente, e applicò le sue vaste cognizioni matematiche allo studio di complicati fenomeni.

La sua prima memoria pubblicata a 23 anni trattava del moto dei fluidi incompressibili e fu seguita in breve da altre memorie sullo stesso argomento. Con questi scritti lo Stokes poneva le basi dell'idrocinetica moderna. Lord Kelvin disse che fin d'allora lo Stokes osava affrontare dei problemi che superavano le forze di tutti i matematici del suo tempo.

Più tardi lo Stokes volse la mente alla teoria delle ondulazioni luminose. Dell'opera sua su questo argomento basti il dire che essa fu paragonata a quelle del Young e del Fresnel.

Quando lo Stokes cominciò a studiare i fenomeni, cui egli diede il nome di fluorescenza, essi erano ancora mal noti. Con ingegnose esperienze ne chiarì l'essenza e stabilì la legge che porta il suo nome.

Il principio dell'inversione dello spettro apparve chiaro allo Stokes fin dal 1850, ma egli non vi porse l'attenzione che l'argomento meritava.

Le memorie scientifiche dello Stokes non contengono, al dire di chi ebbe dimestichezza con lui, se non una piccola parte di ciò che egli fece per la scienza, perchè come professore e come segretario della Società Reale fu prodigo a moltissimi di consigli e di aiuti.

Ebbe le medaglie Rumford e Copley. Fu nominato baronetto nel 1899. Fu segretario dapprima e poi presidente della Società Reale, tenendo tali uffici per 36 anni.

Nel 1899 fu festeggiato a Cambridge il cinquantenario della sua nomina a professore. V'intervennero molti scienziati inglesi e stranieri. Il Cornu vi tenne una conferenza. Fu in quell'occasione che Giuseppe Giovanni Thomson, parlando dello Stokes lo comparò al Newton. Ambedue tennero la cattedra Lucasiana di matematica a Cambridge, ambedue furono presidenti della Società Reale, ambedue rappresentarono l'Università in Parlamento. " E una somiglianza, aggiunse il Thomson, esiste anche fra gli ingegni dei due grandi scienziati. Nel leggere le memorie dello Stokes, spesso sentiamo che il Newton avrebbe trattata quella questione allo stesso modo, sentiamo che le conclusioni son quelle stesse che il Newton ne avrebbe tratte ".

Il Presidente presenta in omaggio all'Accademia, a nome del Socio residente Guidi: *Sulla opportunità di una vigilanza del Municipio sulle costruzioni in " Beton " armato e modo di esercitarla* (Torino, Camilla e Bertolero, 1903); a nome del prof. Torquato Taramelli, Socio corrispondente: *Di alcune condizioni tectoniche nella Lombardia occidentale* (Roma, 1902); a nome del prof. Massimiliano Nöther, Socio corrispondente: *Ueber die sin-*

gulären Elemente der algebraischen Kurven (Leipzig, 1902); *Rational Reduction der Abel'schen Integrale* (Stockholm, 1902).

Vengono presentati e accolti per la stampa negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1) *Condensazione delle aldeidi coll'etere cianacetico,* del Socio Icilio Guareschi;

2) *Proprietà relativa ad una speciale forma di prisma rifrangente,* dell'ing. Enrico Gatti, presentata dal Socio Jadanza;

3) *Sulla prospettiva parallela,* del sig. Domenico Regis, presentata dal Socio Jadanza.

Il Socio Segre a nome anche del Socio nazionale non residente prof. Luigi Bianchi legge la relazione sulla memoria del Dr. Guido Fubini, *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche.* La relazione è approvata all'unanimità, e la Classe pure a voti unanimi accoglie la memoria del Dr. Fubini per la stampa nel volume delle *Memorie.*

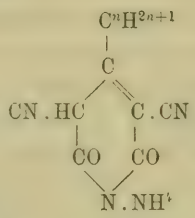
LETTURE

Condensazione delle aldeidi coll'etere cianacetico.

Nota II del Socio ICILIO GUARESCHI.

In una mia nota presentata a questa Accademia nell'adunanza 15 giugno 1902 ho dimostrato come si comportano le aldeidi coll'etere cianacetico in presenza di ammoniaca ed ho fatto vedere che l'idrogeno che si stacca in questa reazione, va a ridurre la cianacetamide monoalchilsostituita non satura che si forma prima, quale prodotto di 1 mol. di aldeide su una molecola di etere cianacetico, per dare una cianacetamide monoalchilsostituita satura.

Ho generalizzato questa reazione a diverse aldeidi grasse ed ho ottenuto anche qui due serie di prodotti: sali ammonici di diciandiossipiridine:



e cianacetamidi della forma:

$$C^nH^{2n+1}.CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2.\end{cases}$$

Tutti composti questi stupendamente cristallizzati.

I sali ammoniacali precedenti mi servono per ottenere gli acidi monoalchilcianvinilacetici di cui ho preparato già un gran numero e che descriverò in una prossima memoria.

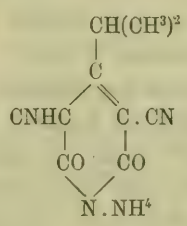
Ora descrivo i prodotti che ho ottenuto dalle aldeidi isobutilica, propilica, isovalerianica ed enantilica o eptilica.

I.

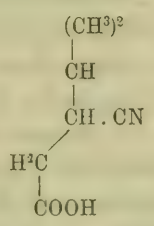
Aldeide isobutilica ed etere cianacetico.

Mescolando 19 gr. di aldeide isobutilica, bollente a 62°-65° con 45 cm^3 di etere cianacetico e 60 cm^3 di ammoniaca a 0.900, si osserva vivissima reazione ed il liquido si fa omogeneo e di colore giallognolo. Si sviluppa molto calore. Il prodotto, anche dopo molte ore, rimane liquido ed incoloro, ma versato in una cassula ed agitato si solidifica completamente in massa cristallina bianca, che dopo aggiunta di un poco di acqua, viene raccolta su filtro e lavata.

Il residuo secco esaurito con etere, fornisce una parte solubile che è la *isobutilcianacetamide*, ed una parte insolubile che è il sale di ammonio:



già stato preparato in questo laboratorio (1). Dalle prime acque madri si ha dell'altro prodotto cristallino che pure trattato con etere fornisce isobutilcianacetamide ed il sale ammonico suddetto. Di questo sale ammonico mi varrò per preparare l'*acido* β *isopropilcianvinilacetico:*



(1) *Alcuni derivati delle aldeidi propilica ed isobutilica*, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1899, t. XXXIV.

L'*isobutilcianacetamide*:

$$(CH^3)^2CH\,.\,CH^2.\,HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$$

cristallizza dall'acqua calda in larghe lamine e si ha facilmente purissima:

I. Gr. 0.1858 fornirono 0.4076 di CO^2 e 0.1443 di H^2O.
II. Gr. 0.1604 diedero 27.8 di N a 16° e 752 mm.

Da cui:

	trovato		calcolato per $C^7H^{12}N^2O$
	I	II	
C =	59.84	—	60.00
H =	8.62	—	8.56
N =	—	19.94	20.00

Ne fu determinato il peso molecolare col metodo ebullioscopico (apparecchio di Riiber) e si ebbero i risultati seguenti:

Sostanza = 0.7303; acetone 15.5587; $\Delta = 0°.57$; cioè: Peso mol. trovato 137.5 e peso mol. calcolato 140.

Questo bellissimo composto fonde a 104°-104°.5 in liquido incoloro e bolle a 275°-280° sotto 745 mm. alterandosi un poco; il prodotto distillato cristallizza facilmente ed è bianchissimo. È solubile nell'alcol, nell'etere, nel cloroformio. Non assorbe il bromo.

Questa cianamide dovrebbe essere identica a quella stata ottenuta da P. Henry (1) in un altro modo, cioè trattando con ammoniaca l'etere isobutilcianacetico; ma i caratteri della isobutilcianacetamide descritta da quest'autore non corrispondono in tutto a quelli da me osservati. L'isobutilcianacetamide è descritta da Henry come fusibile a 93°, insolubile nell'etere e nel cloroformio. Questo punto di fusione è troppo basso. Il mio prodotto era purissimo e non dubito che il suo punto di fusione sia 104°-104°,5. Non posso spiegare queste discordanze nel punto di fusione e nella solubilità se non ammettendo che i prodotti ottenuti dal chimico belga non fossero proprio puri. Io ho preparato altre cianacetamidi monoalchilsostituite ed ho trovato per esse un punto

(1) " Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique ", 1889 (3), t. XVIII, p. 684.

di fusione superiore a quello indicato da Henry. Già si osserva una differenza nel punto di fusione della cianacetamide, la quale quando è purissima fonde a 123°-124° e non a 118° come ammette Henry ed altri.

La *metilcianacetamide* o *α cianpropionamide* $CH^3.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$ non fonde a 81°, come crede Henry, ma bensì a 100°, come lo dimostrano le determinazioni fatte nel mio laboratorio dal dott. Beccari.

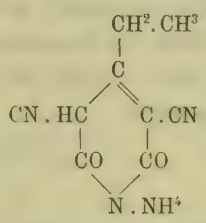
Così è della *propilcianacetamide* $CH^2.CH^2.CH^2HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$, che ora descriverò, la quale fonde a 124°-124°.5 e non a 118°, come indica il sig. Henry; ed è inoltre solubile nell'etere e nel cloroformio e non insolubile, come vorrebbe il sig. Henry.

Le relazioni dunque fra la fusibilità delle amidi quale risultano dalla tabella data nel lavoro di Henry a pag. 699 (loc. cit.) dovranno essere modificate.

II.

Aldeide propilica ed etere cianacetico.

Mescolando 6 gr. di aldeide propilica con 22.6 cm³ di etere cianacetico e 30 cm³ di ammoniaca a 0,900 si ha reazione vivissima, il liquido diventa omogeneo e di colore giallognolo, e dopo pochi momenti tutta la massa è cristallizzata. Tratto il prodotto come ho indicato precedentemente ed ottengo un sale di ammonio insolubile nell'etere:



già descritto e del quale mi occuperò per preparare l'acido cianvinilacetico corrispondente, e la *propilcianacetamide* solubile nell'etere. Essendochè questa amide è molto solubile nell'acqua, così si ha specialmente, quando si concentrano le prime acque madri da cui fu separato il sale ammonico.

Gr. 0.1001 diedero 19.2 cm^3 di N a 14°.5 e 751 mm.
Da cui:

	trovato	calcolato per $C^6H^{10}N^2O$
N %	22.22	22.27

La *propilcianacetamide* $CH^3CH^2CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$ cristallizza dall'etere in larghe lamine brillanti, leggiere; è più solubile nell'acqua, nell'alcol e nel cloroformio. Volatilizza senza scomporsi. Fonde a 124°-124°.5.

Questa amide è descritta da Henry come fusibile a 118° ed insolubile nell'etere e nel cloroformio.

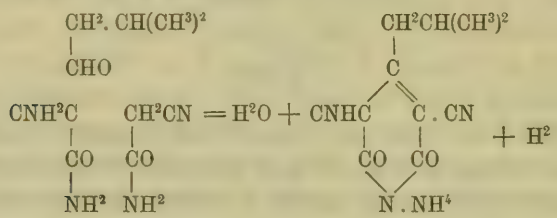
III.

Aldeide isovalerianica ed etere cianacetico.

Mescolando 17.2 gr. di $(CH^3)^2CH.CH^2CHO$ con 45 cm^3 di etere cianacetico e 6 cm^3 di ammoniaca a 0.900, si osserva una vivissima reazione con sviluppo di calore; la miscela si fa subito omogenea, limpida e gialla, e dopo pochi istanti il tutto si trasforma in una massa cristallina bianca, compatta. Dopo 24 ore aggiungo un poco di acqua, lascio a sè, raccolgo su filtro, lavo e asciugo bene il prodotto; questo, esaurito con etere, lascia un residuo del sale ammonico $C^{11}H^{10}(NH^4)N^3O^2$ e per evaporazione coll'etere si ha l'*isoamilcianacetamide.*

Gli stessi prodotti ottengo facendo agire 1 mol. di isovaleraldeide su 2 mol. di cianacetamide, poi circa 2 mol. di ammoniaca in soluzione a 0.900. Si ha anche qui quasi subito una massa compatta, bianca, con sviluppo di calore.

La reazione è la seguente:



e poi:

$$(CH^3)^2CH.CH=C\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}+H^2=(CH^3)^2CH.CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$$

Isobutildicianglutaconimide (ossia γ *isobutil* ββ' *diciandiossipiridina*). Il sale ammonico, che è il prodotto principale della reazione, si ottiene purissimo ricristallizzandolo dall'acqua o anche dall'alcol. È anidro.

Gr. 0.6317 di sale disseccato a 110°-120° fornirono 0,0458 di NH^3.

Cioè:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^{10}(NH^4)N^3O^2$
NH^3 %	7.24	7.26

Questo sale ammonico cristallizza dall'acqua in lunghi aghi incolori, leggieri, setacei; cristallizza bene anche dall'alcol a caldo. È insolubile, o quasi, nell'etere.

Questo sale ammonico non è molto solubile nell'acqua. La sua soluzione acquosa precipita con quasi tutti i sali metallici ed anche con molti alcaloidi.

Il *sale potassico* è meno solubile del sale ammonico e ben cristallizzato.

Il *sale di conina* è pure assai bene cristallizzato e poco solubile.

Col solfato di nikel si ha un bel *sale di nikel* in cristalli di color verde chiaro.

Il *sale di argento* è insolubile nell'acqua fredda, a caldo si scioglie e poi cristallizza in bellissimi prismi.

Gr. 0.5605 di sale secco all'aria scaldati a 110° perdettero 0.028 di H^2O.

Gr. 0.5335 di sale secco fornirono 0.1800 di argento.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^8N^3AgO^2+H^2O$
H^2O %	4.95	5.18

e per:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^8N^3AgO^2$
Ag %	33.60	33.33

L'argento, che era bianchissimo e ben calcinato, sciolto in acido nitrico dimostrava di contenere traccie di carbone.

Il *sale di rame* è un precipitato di un bel colore verde, po-

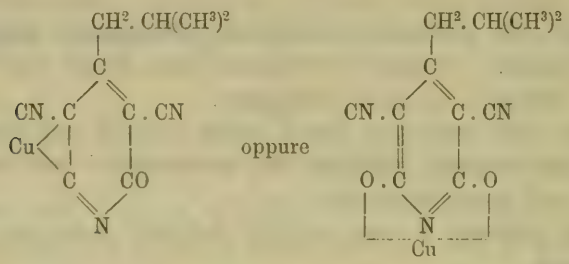
chissimo solubile nell'acqua, in cristalli riuniti a rosetta. Questo sale è *anidro*. Anche a 140° non perde di peso.

Gr. 0.5868 di sale secco a 140° fornirono gr. 0.1711 di CuO corrispondente a 0.1366 di Cu.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^{9}CuN^{3}O^{2}$
Cu %	23.20	22.81

È dunque un sale neutro o basico, che si può rappresentare con:



La soluzione ammoniacale del sale ammonico dà coll' acetato di rame ammoniacale un bel *sale cuproammonico* cristallizzato in aghi prismatici di colore azzurro violaceo, poco solubili nell'acqua.

I sali di calcio, bario, magnesio; di cinconina e di chinina sono ben' cristallizzati.

Sale di cobalto $(C^{11}H^{10}N^{3}O^{2})^{2}Co + 7H^{2}O$. Quando si aggiunge alla soluzione del sale ammonico, una soluzione di nitrato di cobalto al 5 %, si ha a poco a poco una massa cristallina formata da lunghi aghi, rosei, assai belli.

I. Gr. 0.5553 di sale secco all' aria, scaldati prima a 105°-110° poi a 130°-135° perdettero 0.0953; il color roseo del sale diventa molto pallido. Lasciato il sale all' aria riprende dopo più giorni 13.3 % del proprio peso, e 0.5048 del sale che ha riassorbita l'acqua fornirono 0.0675 di $Co^{3}O^{4}$.

II. Gr. 0.6288 di sale asciutto all'aria lasciati per 13-14 giorni nel vuoto (20 mm.) sull'acido solforico perdettero 0.106 (16.8 %) e dopo 3 ore a 110°-130° ancora 0.0021 cioè in totale 0.1081 (17.1 %). Lasciato all' aria, dopo 5 giorni riassorbì 0.0678

(circa 13 %). Gr. 0.5860 del sale che ha riassorbita l'acqua scaldato a 125°-130° perdette 0.0706 di acqua e poi a 200°-205° sino a peso costante perdette ancora 0.0184 (3.5 %) ed il sale anidro 0.4972 fornì gr. 0.0786 di Co^3O^4. Il sale anidro a 200°-205° ha ancora colore rosa pallido.

Da cui: per il sale $(C^{11}H^{10}N^3O^2)^2Co + 7H^2O$ che perde $6H^2O$ sino a 135° si ha:

	trovato		calcolato
% H^2O	17.15	17.1	17.4

Per il sale $(C^{11}H^{10}N^3O^2)^2Co + H^2O$

	trovato	calcolato
H^2O %	3.5	3.5

E pel sale *anidro*:

	trovato	calcolato
Co %	11.61	12.00

Il sale $(C^{11}H^{10}N^3O^2)^2Co + H^2O$ stando all'aria assorbe circa 4 mol. di acqua:

	assorbita		calcolata per $4H^2O$
H^2O %	13.3	13.0	12.4

	trovato		calcolato per $(C^{11}H^{10}N^3O^2)^2Co+5H^2O$
Co %	9.8	9.86	9.8

Isoamilcianacetamide $(CH^3)^2CH . CH^2CH^2HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$.

Questa amide estratta dall'etere (V. sopra) cristallizza bene dall'alcol diluito.

Dall'alcol diluito cristallizza in lunghi aghi incolori brillanti, fusibili a 142°.5; bolle inalterata. Sublima in lamelle sottilissime. È poco solubile nell'acqua, con reazione neutra. Solubilissima nella piridina. Non assorbe il bromo.

I. Gr. 0.0696 fornirono 10.6 cm^3 di N a 15°.5 e 752 mm.

II. Gr. 0.1373 fornirono 0.3140 di CO^2 e 0.1129 di H^2O.

Da cui:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C^8H^{14}N^2O$
C =	—	62.37	62.33
H =	—	9.13	9.09
N =	17.8	—	18.18

IV.

Aldeide enantilica ed etere cianacetico.

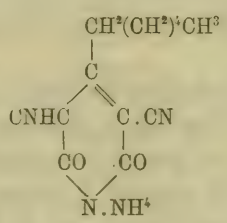
L'aldeide enantilica adoperata, o enantolo, era l'aldeide normale

$$\begin{array}{l} CH^2.\,CH^2CH^2CH^2CH^2CH^3 \\ | \\ CHO \end{array}$$

che bolliva a 152°-154°.

11.4 gr. di aldeide enantilica, o enantolo, furono mescolati con 22.6 cm^3 di etere cianacetico e 30 cm^3 di ammoniaca a 0.900. La reazione è vivissima, si produce molto calore e dopo aver agitato per pochi istanti il liquido omogeneo, si solidifica in massa cristallina bianca compatta. Dopo 24 ore aggiungo 2 a 3 volumi di acqua, poi dopo alcune ore raccolgo e lavo il prodotto bianco. Anche quando è ben asciutto si esaurisce con etere che scioglie benissimo la *eptilcianacetamide* e lascia il sale ammonico della *essildicianglutaconimide*. Non trovai nessun prodotto analogo a quello di Carrick.

Essildicianglutaconimide. — Il suo sale ammonico ottenuto come fu detto:



si ha purissimo per cristallizzazione dall'acqua. È anidro.

Gr. 0.1580 fornirono 30.6 cm^3 di N a 26°.3 e 723.5 circa. Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{13}H^{14}(NH^4)N^3O^2$
N %	21.03	21.36

Questo sale ammonico cristallizza dall'acqua in aghi leggeri brillanti, solubili anche nell'alcol e solubilissimi nella piridina. La sua soluzione acquosa precipita colla maggior parte de' sali metallici e degli alcaloidi. La soluzione acquosa-ammoniacale del sale ammonico dà coll'acetato di rame ammoniacale un bel precipitato di color azzurro d'oltremare, cristallino; anche questo bel *sale cupro-ammonico* non fu ancora analizzato.

La soluzione del sale ammonico dà un precipitato cristallino bellissimo nelle soluzioni di cloruro potassico anche diluite. Col cloruro di bario si ha un precipitato che a caldo cristallizza in bellissimi aghi, lunghi. Colla soluzione del *cloridrato di nicotina* dà un precipitato bianco costituito da aghetti prismatici anche con soluzioni molto diluite; le soluzioni a 1 : 2000 e 1 : 4000 dànno bellissimi cristalli; anche con soluzioni di cloridrato di nicotina a 1 : 5000 e 1 : 6000 si hanno cristalli ben visibili. L'aspetto del precipitato visto al microscopio è sempre lo stesso. Il sale di nicotina si scioglie al caldo e ricristallizza per raffreddamento. Fonde verso 260°, scomponendosi.

Invece il *bromidrato di conina* $C^8H^{17}NHBr$ dà colla soluzione acquosa di questo sale ammonico un precipitato oleoso che lentamente cristallizza in lunghi aghi incolori.

Potrà essere dunque un reattivo utile per distinguere le soluzioni diluite di nicotina e di conina.

Il solfato neutro di chinina dà un abbondante precipitato che a caldo si scioglie e ricristallizza benissimo.

Il solfato di cinconina dà pure un precipitato abbondante che a caldo si scioglie e ricristallizza benissimo.

n. Eptilcianacetamide $CH^3.(CH^2)^5.CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$. — Ottenuta come fu detto, si purifica ricristallizzandola dall'alcol, od anche dall'acqua bollente; dall'alcol si ha in larghe lamine madreperlacee, sottili, leggiere. Solubilissima in piridina. La solu-

zione acquosa ha reazione neutra. Fonde a 137°.5 in liquido incoloro che cristallizza facilmente. Sublima inalterata.

Gr. 0.1874 di sostanza fornirono 0.4541 di CO^2 e 0.1714 di H^2O.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{18}N^2O$
C =	66.10	65.93
H =	10.23	9.90

Non assorbe il bromo.

Le cianacetamidi descritte in questa breve nota sono dunque le quattro seguenti:

		Punto di fusione
Propilcianacetamide	$CH^3CH^2CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$	124°-124°.5
Isobutilcianacetamide	$(CH^3)^2CH.CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$	104°-104°.5
Isoamilcianacetamide	$(CH^3)^2CH.CH^2CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$	142°.5
n. Eptilcianacetamide	$CH^3(CH^2)^5CH^2.HC\begin{cases}CN\\CONH^2\end{cases}$	137°

Nessuna relazione si scorge fra questi dati sperimentali. Come, sino ad un certo punto, si poteva prevedere, la isobutilcianacetamide (f. 104°-104°.5) ha un punto di fusione di circa 22° inferiore a quello della n. butilcianacetamide (f. 126°-126°.5) descritta nella precedente nota.

In una terza nota descriverò i prodotti che ho già ottenuti dalle aldeidi: formica, acrilica, furfurolica e dal citrale.

Torino, R. Università, Febbraio 1903.

Proprietà relativa ad una speciale forma di prisma rifrangente.

Nota dell'Ing. ENRICO GATTI.

(Con una Tavola).

1. — Il prisma rifrangente, preso in esame, ha per sezione retta un trapezio rettangolo del quale, il lato obliquo, fa colla base maggiore un angolo di 45° (*).

Rappresenti $ABCD$ (Fig. 1) una simile sezione: sieno rispettivamente $n \begin{smallmatrix} > \sqrt{2} \\ < \sqrt{5} \end{smallmatrix}$ e θ l'indice di rifrazione e l'angolo limite relativi al vetro che costituisce il prisma. Tracciata l'altezza CP, si conducano nel piano della sezione e per un punto X del segmento PB, la normale LX ad AB e l'obliqua VX tale che sia:

$$\text{sen}\, VXL = n\, \text{sen}\,(45° - \theta). \tag{1}$$

Supposto, secondo VX, un raggio luminoso che ruoti così da generare l'angolo VXB, è noto che ogniqualvolta il raggio stesso acquista una posizione tale da dar luogo, nel propagarsi, ad un raggio riflesso dapprima su BC, indi su AB o su DC, a ciascuna di dette posizioni corrisponde un raggio emergente da AD, nel piano della sezione, con direzione normale a quella del raggio incidente dal quale deriva. È pure noto che il fenomeno si avverte nel caso in cui il raggio incidente coincide colla normale LX: allora la riflessione ha luogo soltanto su BC.

2. — Nel piano della sezione retta di un tale prisma (Fig. 2) e della quale sezione non si tiene conto pel momento della dimensione AB, si considerino tre raggi incidenti nello stesso

(*) MAGNAGHI, *Gli strumenti a riflessione per misurare angoli*, § 107.

punto X del segmento PB. Sia l'uno rappresentato dalla normale LX ad AB, l'altro $V'X$ scelto nell'angolo VXL (1) ed il terzo WX nel quadrante LXB per modo che il raggio rifratto a lui corrispondente incontri il lato BC.

In tali condizioni i raggi $V'X$, WX, nel propagarsi, subiranno una doppia riflessione: l'uno secondo KG' e $G'v'$, l'altro secondo HG e Gv.

Si indichino con R' ed R i punti di incontro dei raggi $G'v'$, Gv col raggio riflesso EL' corrispondente all'incidente LX.

Le rette GH, $G'K$ incontrano, nello stesso punto Y, la retta $L'E$ e ciò perchè i triangoli XEH, XEK, sono rispettivamente uguali ai triangoli HEY, KEY.

Per l'uguaglianza dei segmenti XE, EY, il punto Y cadrà sulla normale condotta dal punto B alla direzione AB, e sarà il punto di concorso dei raggi riflessi come HG, KG' relativi alla posizione scelta pel punto X. Di più:

$$\widehat{GYR} = \widehat{HXE}; \quad \widehat{G'YR'} = \widehat{EXK}.$$

Detti rispettivamente α, α' ed h gli angoli HXE, EXK ed il segmento CP, i valori forniti per RY ed $R'Y$ dai triangoli isosceli RGY, $R'G'Y$ si possono scrivere:

$$(2) \qquad \begin{aligned} RY &= 2\,\frac{h - XB}{\operatorname{tang}\alpha} \\ R'Y &= 2\,\frac{XB}{\operatorname{tang}\alpha'}. \end{aligned}$$

I punti R ed R' coincideranno ogniqualvolta:

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{h - XB}{XB}\operatorname{tang}\alpha'$$

od ancora quando, indicati con i ed i' gli angoli di incidenza corrispondenti ad α ed α', si verificherà la relazione:

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{sen} i}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}} = \frac{h - XB}{XB}\,\frac{\operatorname{sen} i'}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i'}}.$$

3. — Si determinino i punti del segmento PB pei quali possono venire a passare raggi incidenti che soddisfanno alla relazione (4), e le regioni degli angoli VXL, LXB nelle quali tali raggi vengono a cadere.

Scelto un punto X (Fig. 3) del segmento PB e consider nel piano della sezione retta del prisma il raggio incidente in X normale ad AB ed il suo riflesso EL', dal noto punto Y (§ 2) corrispondente ad X si conducano le rette YK, YM tali che:

$$\widehat{L'YK} = \theta \qquad \text{e} \qquad \widehat{L'YM} = 45^\circ - \theta.$$

Proiettati i punti K ed M rispettivamente in F e G sulla YL' risulta:

$$(5) \qquad \begin{aligned} FY &= \frac{h - XB}{\operatorname{tang}\theta} \\ GY &= XB\,\frac{1 + \operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}\theta}. \end{aligned}$$

I segmenti FY e GY assumono lo stesso valore, che è maggiore di h:

$$(6) \qquad FY = GY = h\,\frac{1 + \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}$$

per

$$(7) \qquad XB = h\,\frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}.$$

Risulterà poi (5)

$$FY \lesseqgtr GY$$

secondochè

$$XB \gtreqless h\,\frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}$$

e sarà $GY > h$ nella prima ipotesi e $FY > h$ nella seconda.

Si osservi inoltre che costrutto sul segmento PB il triangolo PBQ, per modo che $\widehat{QPB} = 45^\circ - \theta$ e $\widehat{PBQ} = \theta$ e proiettato il vertice Q su PB in Z, risulta:

$$(h - ZB)\operatorname{tang}(45^\circ - \theta) = ZB \operatorname{tang}\theta.$$

Tale equazione risoluta rispetto ZB dà:

$$ZB = h\,\frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}$$

e però sarà Z il punto del segmento PB, il quale ha da B la distanza rappresentata dalla (7).

Immaginata ora la rotazione dei raggi YM, YK così da generare rispettivamente gli angoli MYL', KYL', si può dire:

1° Che per i punti, come X, del segmento PB pei quali

$$XB > h \frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta},$$

ad ogni posizione YM' del segmento YM, escluse le posizioni limiti, corrisponde una posizione YK' del segmento YK, tale che fra gli angoli $M'YL'$, $L'YK'$ passa la relazione (3).

Ne segue che se, come è lecito il fare, si riterranno l'una e l'altra delle posizioni accennate rappresentanti raggi riflessi dovuti rispettivamente ai rifratti XH', XH, i raggi $M'v'$ $K'v$ doppiamente riflessi, allora risultanti, si incontreranno nello stesso punto di YL'.

La regione dell'angolo $L'YK$ nella quale cadranno i raggi aventi la proprietà di YK' è $L'YK''$ determinata da (3):

$$\operatorname{tang} L'YK'' = \frac{h - XB}{XB} \operatorname{tang}(45^\circ - \theta). \tag{8}$$

2° Che pel punto Z vale la stessa proprietà e la regione utile dell'angolo $L'YK$ è l'angolo stesso.

3° Che per i punti (Fig. 4), come X, del segmento PB pei quali

$$XB < h \frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}$$

ad ogni posizione YK' del segmento YK, escluse le posizioni limiti, corrisponde una posizione YM' del segmento YM avente con YK' la proprietà accennata e la regione dell'angolo $L'YM$, nella quale cadono raggi come YM', è $L'YM''$ determinata da (3)

$$\operatorname{tang} L'YM'' = \frac{XB}{h - XB} \operatorname{tang}\theta. \tag{9}$$

4. — Segnati adunque (Fig. 5) sul segmento PB della sezione considerata i punti X, Z, X' per modo che:

$$XB > h \frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}; \quad ZB = h \frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta}, \quad X'B < h \frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta};$$

condotti nel piano della sezione per X e Z i raggi incidenti VX, VZ tali che:

$$\operatorname{sen} VXL = \operatorname{sen} VZL' = n \operatorname{sen}(45^\circ - \theta);$$

e fatto passare per X, il raggio XW e per X', il raggio $V'X'$ così che essendo XH, $X'Q'$ i raggi rifratti rispettivi sia (8), (9):

$$\operatorname{tang} HXE = \frac{h - XB}{XB} \operatorname{tang}(45^\circ - \theta)$$

$$\operatorname{tang} E''X'Q' = \frac{X'B}{h - X'B} \operatorname{tang}\theta$$

la discussione porta a concludere:

a) che supposto il raggio $\begin{matrix} VX \\ VZ \\ V'X' \end{matrix}$ rotante per modo da generare l'angolo $\begin{matrix} VXL \\ VZL' \\ V'X'L'' \end{matrix}$ a ciascuna sua posizione in detto angolo, escluse quelle limiti, una ne corrisponde nell'angolo $\begin{matrix} LXW \\ L'ZB \\ L''X'B \end{matrix}$ tale che i due raggi doppiamente riflessi corrispondenti l'uno all'una, l'altro all'altra delle due posizioni accennate, incontrano nello stesso punto il raggio riflesso $\begin{matrix} EL_1 \\ E'L_1' \\ E''L_1'' \end{matrix}$ dovuto all'incidente $\begin{matrix} LX \\ L'Z \\ L''X' \end{matrix}$

b) che se la dimensione AB della sezione retta considerata, verrà a determinarsi colla perpendicolare condotta a PB per uno di tali punti di concorso, che si dirà R_1, nel piano della sezione e nel punto del segmento PB, al quale il punto R_1 si riferisce, potranno farsi incidere tre raggi a ciascuno dei quali corrisponderà un raggio emergente da R_1, con direzione normale all'incidente dal quale deriva.

5. — Può chiedersi se fra i raggi scelti (Fig. 5) l'uno nell'angolo $\begin{matrix} VXL \\ VZL' \\ V'X'L'' \end{matrix}$, l'altro nell'angolo $\begin{matrix} LXW \\ L'XB \\ L''X'B \end{matrix}$ incidenti nello stesso punto, come $\begin{matrix} X \\ Z \\ X' \end{matrix}$, del segmento PB ed aventi la proprietà ora accennata (§ 4) ne sussistano di quelli fra loro normali.

Si osservi anzitutto che, se tal fatto può accadere, detti i' ed i gli angoli di incidenza dovuti ad una coppia di tali raggi,

ed α' ed α i corrispondenti angoli di rifrazione, dovrà verificarsi la relazione (4) ed essere: $i > i'$; $\alpha > \alpha'$ e quindi (3)

$$\frac{h - XB}{XB} > 1. \tag{10}$$

Sia X' (Fig. 6) il punto di incidenza scelto sul segmento PB della sezione retta considerata e tale da soddisfare la (10).

Tracciati nel piano della sezione due raggi incidenti $V'X'$, WX' fra loro normali, l'uno appartenente all'angolo $VX'L$ (1), l'altro al quadrante $LX'B$, si prolunghino fino ad incontrare in M ed N la semicirconferenza di raggio $X'O = 1$. Le tangenti in M ed N ad essa determineranno sulla retta AB i punti P', Q' i quali varrebbero a tracciare, colla nota costruzione di Huyghens, i raggi rifratti corrispondenti agli incidenti considerati.

Detto R il punto di intersezione di tali tangenti, è chiaro che nota la posizione di esso, pure saranno noti i raggi incidenti WX', $V'X'$ ed i rifratti a questi dovuti.

A ciascuna coppia di raggi incidenti fra loro normali come WX', $V'X'$, corrisponde un punto R, e il luogo di tali punti è la circonferenza di centro X' ed avente per raggio $X'R = \sqrt{2}$.

Perchè la coppia di raggi incidenti tracciata goda della proprietà in questione è necessario che (4):

$$\frac{\operatorname{sen} LX'W}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 L'X'W}} = \frac{h - X'B}{X'B} \frac{\operatorname{sen} V'X'L}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 V'X'L}}.$$

Tale scrittura si trasforma nella:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} = A^2 \frac{\cos^2 i}{n^2 - \cos^2 i} \tag{11}$$

quando, indicati rispettivamente con i ed i' gli angoli di incidenza $LX'W$, $W'X'L$, si faccia:

$$\frac{h - X'B}{X'B} = A \tag{11'}$$

e si tenga conto che gli angoli i ed i' sono complementari.

Supposto che i raggi WX', $V'X'$ soddisfacciano alla (11), il punto R che a loro corrisponde, sarà determinato, note che sieno le sue distanze RS, RK dagli assi $X'S$, $X'A$, scelti come direzioni positive di due assi coordinati ortogonali.

Indicate rispettivamente con X ed Y le distanze stesse, il triangolo $X'RS$ fornisce:

$$(12)\qquad \begin{aligned} X &= X'R\,\mathrm{sen}\,(i - 45^\circ) \\ Y &= X'R\cos(i - 45^\circ). \end{aligned}$$

Sviluppate, le (12) si trasformano nelle:

$$(12')\qquad \begin{aligned} X &= \mathrm{sen}\,i - \cos i \\ Y &= \mathrm{sen}\,i + \cos i \end{aligned}$$

dalle quali:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \mathrm{sen}\,i &= \frac{Y + X}{2} \\ \cos i &= \frac{Y - X}{2}. \end{aligned}$$

Sostituito il risultato delle (13) nella relazione (11) e tenuto conto che $X^2 + Y^2 = 2$, la relazione stessa liberata dalle frazioni ed ordinata secondo le potenze decrescenti di XY diviene:

$$(14)\qquad (A^2 - 1)X^2Y^2 - 2n^2(A^2 + 1)XY + (2n^2 - 1)(A^2 - 1) = 0.$$

L'equazione (14) la quale (§ 1), (10) porge per XY valori reali e positivi, può scriversi:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\left(XY - \frac{n^2(A^2 + 1) + \sqrt{n^4(A^2 + 1)^2 - (2n^2 - 1)(A^2 - 1)^2}}{A^2 - 1}\right) \\ &\left(XY - \frac{n^2(A^2 + 1) - \sqrt{n^4(A^2 + 1)^2 - (2n^2 - 1)(A^2 - 1)^2}}{A^2 - 1}\right) = 0 \ldots \end{aligned}$$

Tale scrittura dice che i punti come R sono quelli di intersezione della semicirconferenza tracciata con raggio $X'R$, coi rami racchiusi nel quadrante $AX'S$ di due iperboli equilatere aventi per assintoti gli assi coordinati considerati.

I semiassi dell'iperbole, rappresentata dal primo fattore uguagliato a zero della (15), hanno manifestamente un comune valore maggiore di $\sqrt{2}$ e i punti di intersezione della curva colla semicirconferenza di raggio $X'R$ sono immaginari.

Uguagliando a zero il secondo fattore della (15) il sistema:

$$(15') \quad \begin{cases} XY - \dfrac{n^2(A^2+1) - \sqrt{n^4(A^2+1)^2 - (2n^2-1)(A^2-1)^2}}{A^2-1} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 2 \end{cases}$$

porge:

$$(16) \quad \begin{cases} Y+X = \pm\sqrt{2\dfrac{(A^2-1)+n^2(A^2+1) - \sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{A^2-1}} \\ Y-X = \pm\sqrt{2\dfrac{(A^2-1)-n^2(A^2+1)+\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{A^2-1}}. \end{cases}$$

L'espressione

$$(A^2-1) - n^2(A^2+1) + \sqrt{n^4(A^2+1)^2 - (2n^2-1)(A^2-1)^2}$$

si annulla per valori di $A = \pm 1$: le coppie quindi di valori (16) trovati sono (10) reali e da esse possono dedursi tanto le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole considerata colla circonferenza di raggio $X'R$, quanto (13) quelli di sen i, sen i'.

Scrivendo appunto tali ultimi valori si ha:

$$(17) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} i = \pm\sqrt{\dfrac{(A^2-1)+n^2(A^2+1) - \sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}} \\ \operatorname{sen} i' = \pm\sqrt{\dfrac{(A^2-1)-n^2(A^2+1)+\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}}. \end{cases}$$

Se si tiene conto del quadrante al quale gli angoli i ed i' appartengono, e si osserva che nella generazione degli angoli stessi si deve assumere come primo lato l'asse $X'S$, è a dirsi che nelle (17) sarà il valore positivo del radicale quello da scegliersi.

Ne segue che il punto R corrispondente ad i ed i' sarà quello più prossimo all'asse $X'S$, cioè quello che ha per coordinate (12'):

$$Y = \sqrt{\frac{(A^2-1)+n^2(A^2+1) - \sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{(A^2-1)-n^2(A^2+1)+\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}}$$

$$X = \sqrt{\frac{(A^2-1)+n^2(A^2+1)-\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}} -$$

$$+\sqrt{\frac{(A^2-1)-n^2(A^2+1)+\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2}}{2(A^2-1)}}.$$

Nello stabilire le (17), le quali avrebbero potuto dedursi direttamente dalla (11), non si è fatta alcuna ipotesi sul valore dell'angolo i' oltre quella accennata con $i > i'$.

Perchè le relazioni stesse valgano nel caso nostro, deve essere:

$$\operatorname{sen} i' < n \operatorname{sen}(45^\circ - \theta)$$

ossia:

$$\operatorname{sen}^2 i' < \frac{1}{2}(\sqrt{n^2-1}-1)^2. \tag{18}$$

Fatto nella (18)

$$\frac{1}{2}(\sqrt{n^2-1}-1)^2 = M$$

si determinino i valori di A che rendono

$$\operatorname{sen}^2 i' < M. \tag{18'}$$

Dovrà (17) scriversi la relazione:

$$(A^2-1)-n^2(A^2+1)+\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2} < 2(A^2-1)M$$

ossia:

$$\sqrt{n^4(A^2+1)^2-(2n^2-1)(A^2-1)^2} < 2(A^2-1)M-(A^2-1)+n^2(A^2+1).$$

Elevando a quadrato i due membri positivi della disuguaglianza e riducendo si ottiene:

$$\begin{aligned} &A^2[(2M-1)^2+2n^2-1+2n^2(2M-1)] - \\ &\quad + [(2M-1)^2+2n^2-1-2n^2(2M-1)] > 0\ldots \end{aligned} \tag{19}$$

La condizione (19) sarà verificata per valori di A maggiori della maggior radice, o, minori della minore, dell'equazione, risoluta rispetto ad A, che risulta uguagliando a zero il primo membro della disuguaglianza.

E siccome le radici dell' equazione accennata sono rappresentate da:

$$(20) \qquad \pm\sqrt{\frac{(2M-1)^2+2n^2-1-2n^2(2M-1)}{(2M-1)^2+2n^2-1+2n^2(2M-1)}}$$

e del radicale si deve scegliere il valore positivo (10), così soddisferanno la disuguaglianza (19) i valori di

$$(20') \qquad A > \sqrt{\frac{(2M-1)^2+2n^2-1-2n^2(2M-1)}{(2M-1)^2+2n^2-1+2n^2(2M-1)}}$$

pei valori di n che rendono reale quello del radicale (20).

E tali sono appunto i valori ammessi per n, imperocchè, variando n da $\sqrt{2}$ a $\sqrt{5}$, il valore del radicando (20) varia da ∞ ad 1.

Indicato con V il valore reale e finito assunto dal radicale (20) corrispondentemente ad un valore di

$$n \begin{matrix} > \sqrt{2} \\ < \sqrt{5} \end{matrix}$$

la (19) e quindi la (18′) saranno verificate quando (11)′

$$\frac{h-X'B}{X'B} > V$$

ossia quando:

$$(21) \qquad X'B < \frac{h}{V+1}.$$

6. — Concludendo si dirà:

1° Che segnato il punto U del segmento PB (Fig. 6) tale che, corrispondentemente ad un determinato valore di n, sia

$$(22) \qquad UB = \frac{h}{V+1},$$

fra le infinite coppie di raggi, incidenti nel piano della sezione, che si possono immaginare passanti per ciascun punto del segmento UB — esclusi gli estremi — ed aventi la proprietà nota (§ 4), una ve ne ha della quale i raggi, costituenti la coppia, sono fra loro normali.

2° Che rappresentati con α' ed i' gli angoli in tal modo designati nel (§ 5), la dimensione AB della sezione considerata e tale da permettere che alla coppia di raggi fra loro normali, incidenti in un punto X' del segmento UB (23), corrisponda una coppia di raggi emergenti da uno stesso punto del lato AB (Fig. 1) potrà indicarsi con

$$AB = \frac{2X'B}{\operatorname{tang}\alpha'}$$

ossia con

$$AB = 2X'B\,\frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i'}}{\operatorname{sen} i'}.$$

7. — Venendo ad esaminare un prisma già costrutto, si considerino nel piano della sua sezione retta $A'B'C'D'$ (Fig. 7) un raggio incidente WX' appartenente al quadrante $LX'B'$ ed un raggio incidente $V'X_1'$ nell'angolo $VX_1'L'$ (1), e si supponga che tali raggi ammettano raggi emergenti passanti rispettivamente per R_1 ed R'.

Detti α ed α' gli angoli di rifrazione corrispondenti agli angoli di incidenza $LX'W$, $V'X_1'L'$ sarà (2):

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2(A'D' - X'B')}{A'B'}$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{2X_1'B'}{A'B'}.$$

Ma poichè deve essere $\alpha < \theta$ ed $\alpha' < 45° - \theta$, i segmenti $X'B'$ ed $X_1'B'$ debbono rispettivamente soddisfare alle relazioni:

$$\frac{2(A'D' - X'B')}{A'B'} < \operatorname{tang}\theta$$

$$\frac{2X_1'B'}{A'B'} < \operatorname{tang}(45° - \theta)$$

ossia alle:

$$X'B' > A'D' - \frac{A'B'}{2}\operatorname{tang}\theta$$

(23)

$$X_1'B' < \frac{A'B'}{2}\,\frac{1 - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}\theta}.$$

Perchè esistano punti del segmento PB' tali da ammettere contemporaneamente raggi incidenti, compresi l'uno nell'angolo

come $VX_1'L'$ (1), l'altro nel quadrante come $LX'B'$, così che, nel propagarsi, i raggi stessi emergano da uno stesso punto — come R_1, od R' — del lato $A'D'$, dovrà essere:

$$X_1'B' > X'B'$$

ossia (23)

$$\frac{A'B'}{2} > A'D' \frac{1+\operatorname{tang}\theta}{1+\operatorname{tang}^2\theta}. \tag{24}$$

Quando adunque le dimensioni $A'B'$, $A'D'$ di un prisma rifrangente della sezione retta considerata, soddisfano alla relazione (24), i punti del segmento $X_1'B' - X'B'$, esclusi gli estremi, determinati dalle relazioni

$$X'B' = A'D' - \frac{A'B'}{2} \operatorname{tang}\theta \tag{25}$$

$$X_1'B' = \frac{A'B'}{2} \frac{1-\operatorname{tang}\theta}{1+\operatorname{tang}\theta} \tag{25'}$$

godono della proprietà accennata.

Tutti i punti del segmento $X_1'B'$ determinato dalla (25'), esclusi gli estremi, avranno tale proprietà quando, per un dato valore di n, $A'B'$ ed $A'D'$ sieno tali da rendere (25)

$$X'B' \gtreqless 0.$$

8. — La coppia di raggi incidenti che passa per ciascun punto Q (Fig. 8) del segmento $X_1'X'$ definito dalle (25-25') e che dà luogo a raggi emergenti uscenti dal punto R_1, corrispondente a Q, può graficamente determinarsi, perchè in simile modo possono tracciarsi i raggi rifratti rispettivi.

Segnati infatti: i punti Y (§ 2) ed R_1 corrispondenti a Q; la normale MN ad $A'B'$ nel suo punto di mezzo M; le congiungenti MY, NY; e, detti rispettivamente H' ed H i punti di incontro di tali congiungenti col lato $B'C'$, i segmenti QH' e QH rappresenteranno i raggi rifratti dovuti all'accennata coppia di raggi incidenti.

9. — Fra le coppie di raggi ora considerate, talune possono esisterne delle quali i raggi componenti sono fra loro normali.

Fig. 5

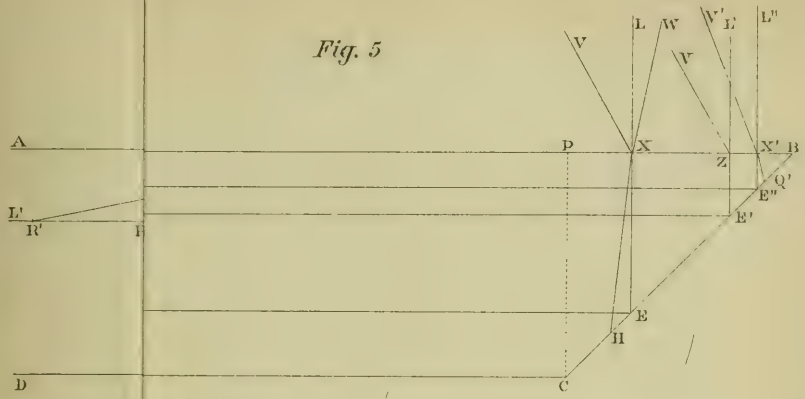


Fig. 6

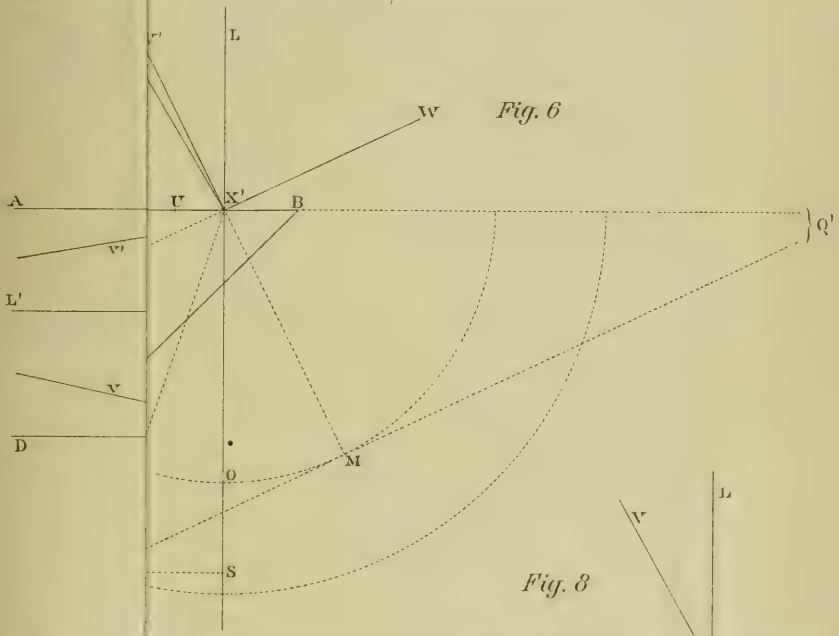
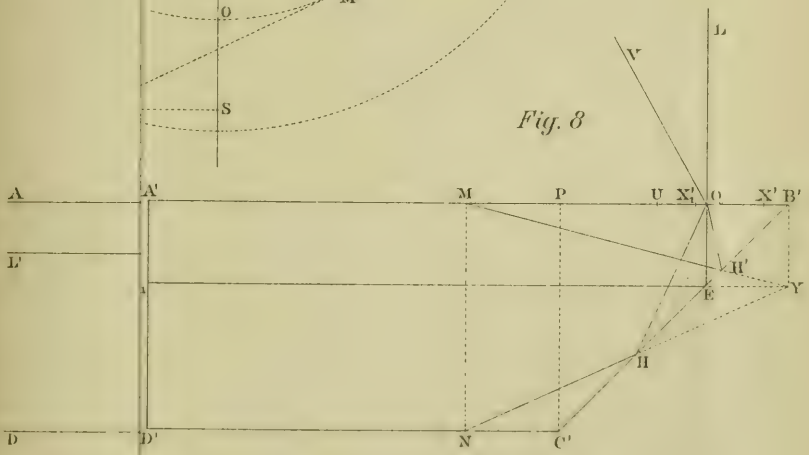
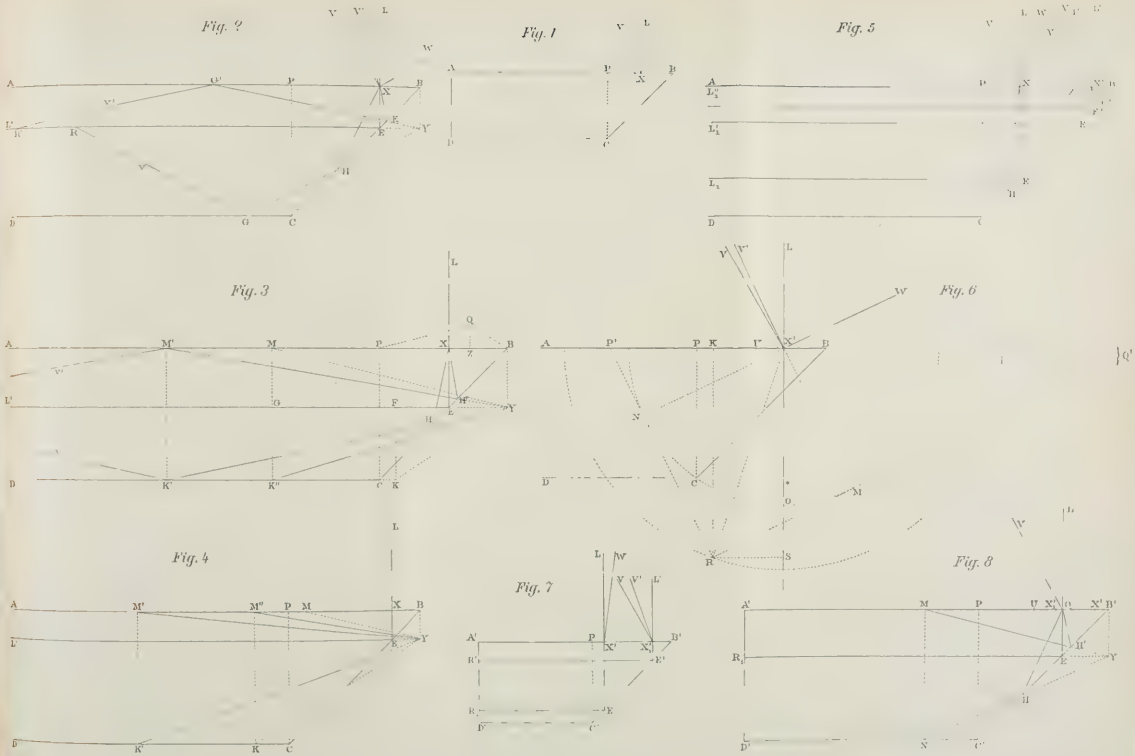


Fig. 8





Lit. Salussolia, Torino

I punti di incidenza corrispondenti a ciascuna di tali coppie, debbono soddisfare alla (21) ed appartenere al segmento $X_1'X'$ (Fig. 8) e quindi è possibile che punti simili sussistano solo quando il punto U del segmento PB', il quale punto soddisfa alla (22), riesce compreso fra i punti $X_1'X'$ o fra i punti P, X_1'.

Ammesso che in Q cada uno di tali punti di incidenza e, indicato con i' l'angolo di incidenza del raggio della coppia appartenente a $\widehat{VQL}$ (1), sarà (2):

$$A'B' = 2QB' \frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i'}}{\operatorname{sen} i'}$$

e poichè si pose (11'):

$$A = \frac{A'D' - QB'}{QB'}$$

la relazione scritta diviene:

$$A'B' = \frac{2A'D'}{A+1} \frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i'}}{\operatorname{sen} i'}. \tag{27}$$

Sostituendo nella (27) il valore stabilito per $\operatorname{sen} i'$ dalla (17'), essa può esser trasformata in una equazione rispetto ad A a coefficienti reali. Il numero di radici reali di tale equazione comprese fra:

$$A_1 = \frac{A'D' - X'B'}{X'B'} \qquad \text{ed} \qquad A_2 = \frac{A'D' - X_1'B'}{X_1'B'}$$

indicherà il numero di punti del segmento $X_1'X'$ che hanno la proprietà attribuita al punto Q. Riconosciuta l'esistenza di essi punti, la distanza di ciascuno, dal punto B', potrà numericamente determinarsi colla (11') ricercate che sieno le radici reali della equazione accennata e comprese nell'intervallo A_1, A_2.

Dall'Istituto professionale Omar, Novara, gennaio 1903.

Sulla Prospettiva parallela.

Nota di DOMENICO REGIS.

(Con una Tavola).

1. — Molto sovente l'Ingegnere desidera rappresentare un oggetto, come un edifizio od una macchina o semplici particolari di costruzioni, con una proiezione che ne conservi l'apparenza; una tale proiezione si distingue praticamente chiamandola una prospettiva; se l'oggetto da rappresentarsi è di dimensioni piuttosto grandi, come un ponte o la riunione di più edifizi, la proiezione più conveniente è la proiezione centrale; ma quando l'oggetto ha piccole dimensioni, come una macchina o particolari di costruzioni, si applica abbastanza bene una proiezione parallela, la quale ha il vantaggio sulla proiezione centrale, che si disegna più presto.

Negli oggetti che l'Ingegnere o l'Architetto deve rappresentare in disegno, si distinguono generalmente tre direzioni principali di linee, una verticale e le altre orizzontali, fra di loro perpendicolari; le dimensioni di questi oggetti si hanno in generale parallelamente a queste tre direzioni; e perciò la rappresentazione di questi oggetti per mezzo di due piani coordinati ortogonali si ottiene più facilmente quando si scelgono i piani di proiezione paralleli a quelle direzioni, e le proiezioni così fatte servono anche meglio a far conoscere le relazioni di posizione e di grandezza delle varie parti di questi oggetti; ma raramente una sola proiezione è in grado di dare all'occhio dell'osservatore l'apparenza dell'oggetto che si rappresenta; ciò perchè l'oggetto ha in generale faccie piane principali parallele a quelle dimensioni, le quali vengono rappresentate da una semplice retta; così un esaedro regolare viene proiettato ortogonalmente

su di un piano parallelo a due spigoli secondo un semplice quadrato: se invece si fa una proiezione parallela, ortogonale od obliqua, su di un piano scelto in modo, che le faccie principali di quell'oggetto vengano tutte rappresentate coi loro contorni, ancorchè questi in proiezione risultino sformati, l'osservatore tuttavia li restituisce alquanto mentalmente nella loro forma e si immagina più facilmente l'oggetto che è rappresentato.

A questo scopo serve il disegno assonometrico, per il quale si collocano gli assi di coordinate nelle direzioni secondo le quali si hanno le dimensioni dell'oggetto; ed in disegno si preferisce generalmente di fissare arbitrariamente le direzioni delle proiezioni degli assi e scegliere anche arbitrariamente le scale assonometriche; cercando, per mezzo di tentativi, di ottenere il miglior effetto di apparenza, con un disegno alquanto spedito; poco importa se in fine la proiezione risulta rettangolare od obliqua. Esempi bellissimi di tali disegni si hanno nelle tavole delle opere di Choisy, *L'art de bâtir chez les Romains,* e *chez les Bizantins.*

Il teorema di Pohlke ci fa conoscere come scegliendo arbitrariamente le direzioni delle proiezioni degli assi, e le scale assonometriche si ottiene sempre una proiezione geometrica; il che è già bene; ma talvolta è necessario di avere una rappresentazione completa di grandezza e posizione, se non di tutto l'oggetto almeno di una particolare figura che ad esso si riferisca, sulla quale sia da risolvere qualche problema; ora quando la proiezione è ortogonale ciò si ottiene aggiungendo alla proiezione assonometrica della figura obbiettiva quella di una delle sue tre proiezioni coordinate sopra i piani determinati dagli assi; e si ha così una teoria soddisfacente per il caso in cui la proiezione sia ortogonale; ma questa teoria non può applicarsi completamente nella proiezione obliqua.

In questo breve scritto mi propongo di dimostrare come, nel caso della proiezione assonometrica obliqua per ottenere una rappresentazione completa di una figura, sia conveniente aggiungere alla proiezione obliqua la proiezione ortogonale della stessa figura sullo stesso piano di proiezione; colle quali due proiezioni coordinate risultano facili e brevi le soluzioni dei problemi che si hanno ordinariamente da risolvere nelle applicazioni della Geometria Descrittiva.

2. Teorema di Pohlke. — *Tre segmenti di lunghezza e direzione arbitrarie che partono da un punto e sono in un piano* (cioè *OA OB OC*, fig. 1ª) *possono sempre considerarsi come la proiezione parallela sul piano di tre segmenti eguali, partenti da uno stesso punto, situati sopra tre assi fra di loro perpendicolari.*

Di questo teorema si sono già date più dimostrazioni, tuttavia io ne indico ancora una, meno semplice di quelle date finora, ma che io preferisco perchè le operazioni grafiche che con essa si fanno per la determinazione della direzione dei raggi proiettanti e della lunghezza dell'unità lineare, conducono a risultati pratici più soddisfacenti, perchè di essi si può sempre verificare l'esattezza in più modi.

Osservo innanzi tutto che i tre segmenti obbiettivi eguali, partenti da uno stesso punto, possono considerarsi come raggi di una sfera che ha il centro in quel punto; la quale viene tagliata secondo tre circoli massimi dai piani determinati dai tre segmenti, combinati a due a due. Le proiezioni di questi tre circoli sopra di un piano, fatte con raggi proiettanti fra di loro paralleli, sono in generale tre ellissi: e siccome i tre segmenti obbiettivi s'intendono fra di loro perpendicolari, le loro proiezioni, combinate due a due, sono semidiametri coniugati delle ellissi secondo cui si proiettano i circoli. Queste ellissi poi sono inscritte nella proiezione del contorno apparente della sfera; e questa proiezione è ancora un' altra ellisse, il cui semiasse minore è eguale al raggio della sfera ed il semiasse maggiore è tale, che il rapporto dei semiassi è eguale al seno dell'angolo che i raggi proiettanti fanno col piano di proiezione.

Ora se le tre ellissi costruite sopra i segmenti dati *OA OB*, *OA OC*, *OB OC* come semidiametri coniugati risultano inscrittibili in un' altra ellisse, non vi ha dubbio che quelle tre ellissi possono considerarsi come le proiezioni di tre circoli massimi di una sfera, situati in piani fra di loro perpendicolari; la direzione dei raggi proiettanti essendo tale, che l'ellisse circoscritta sia la proiezione del contorno apparente della sfera.

E ciò avviene realmente nel caso nostro, perchè le tre ellissi che abbiamo nel piano sono concentriche; ed in generale basta che nel piano di esse vi sia un punto che abbia la stessa polare relativamente a ciascuna delle tre ellissi, perchè a queste possa circoscriversi un' altra ellisse (V. Chasles, *Traité des sections coniques*, 1ère partie, n. 490).

3. Costruzione dell' ellisse circoscritta (fig. 1). — Dicansi $S\ S'\ S''$ le tre ellissi che hanno rispettivamente per semidiametri coniugati i segmenti dati $OA\ OB$, $OA\ OC$, $OB\ OC$, e dicasi Σ l'ellisse circoscritta. Si trovino i punti $C_1\ C_1$ dell'ellisse S nei quali le tangenti sono parallele al segmento dato OC, così si trovino i punti $B_1\ B_1$ dell'ellisse S' dove le tangenti sono parallele al segmento OB e finalmente i punti $A_1\ A_1$ dell'ellisse S'' dove le tangenti sono parallele al segmento OA; si avrà per ciascuna delle tre ellissi una seconda coppia di diametri coniugati. *Queste tre coppie di diametri, cioè* $OC_1\ OC$, $OB_1\ OB$ *ed* $OA_1\ OA$, *considerati solamente nella loro direzione, sono tre coppie di diametri coniugati dell'ellisse circoscritta* Σ: *ed i diametri* $C_1\ C_1$ $B_1 B_1$ ed $A_1 A_1$ *delle ellissi inscritte sono rispettivamente le corde di contatto di queste ellissi coll'ellisse circoscritta.*

Per dimostrare questa proposizione premetto che se in un'ellisse (fig. 5) si hanno due coppie di diametri coniugati $OA\ OB$ ed $OM\ ON$, e, prendendo i primi $OA\ OB$ come assi di coördinate, si dicono $x'\ y'$ ed $x''\ y''$ le coordinate dei punti estremi M ed N degli altri due, di più si dicono a e b i due semidiametri OA ed OB, le equazioni dei due diametri OM ed ON possono scriversi

$$y = \frac{y'}{x'}\,x \qquad \text{ed} \qquad y = \frac{y''}{x''}\,x$$

e perchè i due diametri OM ed ON sono coniugati, si avrà il prodotto dei coefficienti angolari

$$\frac{y'}{x'} \times \frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}$$

inoltre dai due triangoli OMP' ed ONP'' ricavasi

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\operatorname{sen} MA}{\operatorname{sen} MB} \qquad \text{ed} \qquad \frac{y''}{x''} = \frac{\operatorname{sen} NA}{\operatorname{sen} NB}$$

per cui può scriversi

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{sen} MA}{\operatorname{sen} MB} \cdot \frac{\operatorname{sen} NA}{\operatorname{sen} NB} = -\frac{b^2}{a^2}\,.$$

Si applichi questa formola successivamente alle tre ellissi $S\ S'$ ed S'' considerando nell'ellisse S le due coppie di diametri

coniugati $OA\ OB$ ed $OC\ OC_1$, nell'ellisse S' le due coppie $OA\ OC$ ed $OB\ OB_1$, e nell'ellisse S'' le due coppie $OB\ OC$ ed $OA\ OA_1$, si avranno le tre eguaglianze

$$\frac{\operatorname{sen} CA}{\operatorname{sen} CB} \cdot \frac{\operatorname{sen} C_1A}{\operatorname{sen} C_1B} = -\frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{\operatorname{sen} BC}{\operatorname{sen} BA} \cdot \frac{\operatorname{sen} B_1C}{\operatorname{sen} B_1A} = -\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_1B}{\operatorname{sen} A_1C} = -\frac{c^2}{b^2}.$$

Ora moltiplicando queste tre eguaglianze membro a membro ed omettendo di scrivere i fattori che si elidono, si ottiene l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen} C_1A}{\operatorname{sen} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sen} B_1C}{\operatorname{sen} B_1A} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_1B}{\operatorname{sen} A_1C} = -1 \tag{2}$$

la quale fa conoscere che le tre coppie di diametri $OA\ OA_1$, $OB\ OB_1$ ed $OC\ OC_1$ sono in involuzione e possono perciò essere tre coppie di diametri coniugati di una stessa ellisse; gli assi essendo quella coppia di raggi che sono fra di loro perpendicolari nel fascio in involuzione determinato dall'espressione (2) (Vedi Chasles, *Traité des sections coniques*, n. 172-173 e *Géometrie supérieure*, n. 249).

Infinite ellissi possono costruirsi che abbiano quelle tre coppie di diametri coniugati; le quali ellissi sono tutte simili. Una di queste, passante per i punti $C_1\ C_1$ dell'ellisse S, passa anche per i punti $B_1\ B_1$ dell'ellisse S' e per i punti $A_1\ A_1$ dell'ellisse S'' e trovasi circoscritta a queste tre ellissi, perchè ha con ciascheduna di esse un diametro comune colle tangenti comuni nei punti estremi.

4. — Per riconoscere come effettivamente quelle tre coppie di punti appartengano ad una stessa ellisse Σ, si determinino i semidiametri $c'\ b'\ a'$ che trovansi nelle direzioni $OC\ OB\ OA$, rispettivamente coniugate alle direzioni $OC_1\ OB_1\ OA_1$.

Si cerchi il semidiametro c', coniugato alla direzione OC_1 considerando l'ellisse Σ come determinata dal semidiametro c_1 e dalle due coppie di direzioni coniugate $OC\ OC_1$ ed $OA\ OA_1$. Per la formola (1) si avrà l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_1C_1}{\operatorname{sen} A_1C} = -\frac{c'^2}{c_1^2} \tag{3}$$

e si può anche scrivere l'equazione

$$(3_1) \qquad \frac{\operatorname{sen} BC_1}{\operatorname{sen} BC} \cdot \frac{\operatorname{sen} B_1C_1}{\operatorname{sen} B_1C} = -\frac{c'^2}{c_1^2}$$

considerando l'ellisse come determinata dalle due coppie di diametri coniugati $OC\,OC_1$ ed $OB\,OB_1$, colla lunghezza del semidiametro conosciuto c_1; le quali due equazioni dànno lo stesso valore per il rapporto $c' : c_1$. Infatti se si elimina l'incognita c' fra le due equazioni col dividere l'equazione (3) per la (3_1), il quoziente dei due primi membri può scriversi

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} AC}}{\dfrac{\operatorname{sen} BC_1}{\operatorname{sen} BC}} : \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A_1C}{\operatorname{sen} A_1C_1}}{\dfrac{\operatorname{sen} B_1C}{\operatorname{sen} B_1C_1}}$$

la quale espressione rappresenta il quoziente fra il rapporto anarmonico dei quattro diametri $(O\,ABC_1C)$ e quello dei loro coniugati $(O\,A_1B_1CC_1)$, rapporti che sono eguali per la involuzione determinata dall'espressione (2).

Così supponendo conosciuto il semidiametro b_1 oppure il semidiametro a_1 si possono trovare i rapporti $\frac{b'}{b_1}$ ed $\frac{a'}{a_1}$ con considerazioni analoghe a quelle ora fatte, e colle seguenti equazioni:

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{sen} CB_1}{\operatorname{sen} CB} \cdot \frac{\operatorname{sen} C_1B_1}{\operatorname{sen} C_1B} = -\frac{b'^2}{b_1^2}$$

$$(4_1) \qquad \frac{\operatorname{sen} AB_1}{\operatorname{sen} AB} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_1B_1}{\operatorname{sen} A_1B} = -\frac{b'^2}{b_1^2}$$

$$(5) \qquad \frac{\operatorname{sen} BA_1}{\operatorname{sen} BA} \cdot \frac{\operatorname{sen} B_1A_1}{\operatorname{sen} B_1A} = -\frac{a'^2}{a_1^2}$$

$$(5_1) \qquad \frac{\operatorname{sen} CA_1}{\operatorname{sen} CA} \cdot \frac{\operatorname{sen} C_1A_1}{\operatorname{sen} C_1A} = -\frac{a'^2}{a_1^2}\,.$$

Determinato il valore di uno dei tre rapporti $\frac{c'}{c_1}$, $\frac{b'}{b_1}$ ed $\frac{a'}{a_1}$ si possono con quello trovare i valori degli altri due colle

stesse equazioni: si divida perciò l'equazione (3) per l'equazione (5_1), omettendo di scrivere i fattori che si elidono, si troverà:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} C_1A}{\operatorname{sen} A_1C}\right)^2 = \frac{c'^2}{c_1^2} : \frac{a'^2}{a_1^2}$$

e, successivamente, dividendo l'equazione (4) per l'equazione (3_1) e l'equazione (5) per l'equazione (4_1), si troveranno ancora le seguenti:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} B_1C}{\operatorname{sen} C_1B}\right)^2 = \frac{b'^2}{b_1^2} : \frac{c'^2}{c_1^2}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} A_1B}{\operatorname{sen} B_1A}\right)^2 = \frac{a'^2}{a_1^2} : \frac{b'^2}{b^2_1}.$$

Eliminando ora fra le tre ultime equazioni i rapporti $\frac{c'}{c_1}$, $\frac{b'}{b_1}$ ed $\frac{a'}{a_1}$ col moltiplicarle membro a membro, si giunge all'espressione

$$\frac{\operatorname{sen}^2 C_1A \,.\, \operatorname{sen}^2 B_1C \,.\, \operatorname{sen}^2 A_1B}{\operatorname{sen}^2 A_1C \,.\, \operatorname{sen}^2 C_1B \,.\, \operatorname{sen}^2 B_1A} = 1$$

che è ancora una conseguenza dell'espressione (2), e fa conoscere che queste equazioni sussistono, e, dato uno dei tre rapporti, bastino due di esse per determinare gli altri due rapporti.

5. — Per quanto è detto al N. 2 è necessario di avere gli assi dell'ellisse circoscritta Σ, che si trovano avendo due diametri coniugati di quest'ellisse determinati in direzione e grandezza; ora non sarebbe perciò necessario di costruire le quattro ellissi $S\,S'\,S''\,\Sigma$; e basterebbe avere due dei tre diametri C_1C_1 B_1B_1 A_1A_1, che sono pure i diametri di contatto delle ellissi $S\,S'\,S''$ coll'ellisse circoscritta. I punti $C_1\,C_1$ dell'ellisse S, dove le tangenti sono parallele al segmento dato OC, si possono trovare considerando l'affinità che vi è fra l'ellisse S ed un circolo descritto col centro in O e raggio OA, oppure OB. In tal modo si possono avere i punti B_1B_1 dell'ellisse S', dove le tangenti sono parallele al segmento dato OB, considerando l'affinità che l'ellisse S' ha con un circolo descritto sul diametro $A\,A$, oppure $C\,C$.

Avendo due coppie di diametri coniugati $OC_1 OC'$ ed $OB_1 OB'$ e conoscendo le grandezze dei due semidiametri OC_1 ed OB_1, si può trovare il semidiametro OC' con una costruzione grafica semplice, e finalmente avendo i due diametri coniugati OC_1 ed OC' determinati in grandezza e direzione, si determinano gli assi EE ed FF, che è ciò che si cerca. Per la soluzione di quest' ultimo problema vedasi la fine di questa nota.

Tuttavia, quantunque non sia necessaria la costruzione delle quattro ellissi $S S' S''$ e Σ, è però utile, sia perchè con essa si evitano più facilmente errori grafici che possono occorrere, sia principalmente perchè si può sempre meglio verificare l'esattezza delle costruzioni grafiche che si sono fatte.

6. Direzione delle rette proiettanti. — Lunghezza dell'unità lineare in disegno. — Dalla fig. 1 si sono trasportati nella fig. 2 i tre segmenti dati OA OB OC e l'ellisse Σ che si è trovata, circoscritta alle tre ellissi che hanno per semidiametri coniugati i tre segmenti dati combinati due a due. Le rette EE ed FF sono gli assi dell'ellisse Σ, collocati relativamente ai tre segmenti dati come sono nella fig. 1. Si assumano ora due piani ausiliarii di proiezione, fra di loro ortogonali, uno dei quali sia lo stesso piano di proiezione assonometrica (che dicesi quadro), l'altro passi per l'asse maggiore dell'ellisse FF, che forma la linea di terra. Questo piano si trasporti parallelamente a se stesso, trasportando la linea di terra da FF in $F''F''$; e poi si ribalti sul quadro con una rotazione intorno alla linea di terra $F''F''$. Si disegni la proiezione del contorno apparente della sfera sul quadro e sul piano 2° di proiezione, cioè si segnino i due circoli che hanno il centro l'uno in O e l'altro in O'' e raggio OE. Si proiettino sulla linea di terra i punti FF in $F''F''$; la tangente $F''f$ condotta da F'' rappresenta in proiezione 2ª la direzione dei raggi proiettanti; l' angolo θ che questa tangente fa colla linea di terra rappresenta l'inclinazione dei raggi proiettanti col piano di proiezione assonometrica; il rapporto $O''f : O''f''$, eguale al rapporto dei semiassi dell'ellisse circoscritta, è eguale al seno di quest'angolo.

Il raggio della sfera OE è la lunghezza che rappresenta in disegno l'unità lineare; i tre segmenti dati OA OB OC sono le unità delle scale assonometriche relative ai tre assi.

7. Proiezioni ortogonali dei tre assi. — Si proiettino sulla linea terra $F''F''$ i punti ABC in $A''B''C''$, e da questi punti conducansi rette parallele ai raggi proiettanti, prolungate finchè incontrino la superficie sferica; i punti d'incontro si trovano sui circoli della sfera che hanno i centri rispettivamente nei punti $a'\ b'\ c'$ e per raggi le semicorde del circolo di contorno apparente della sfera $a'a\ b'b\ c'c$. Questi punti d'incontro trovansi proiettati in proiezione 2ª in $A_1''B_1''C_1''$ ed in proiezione ortogonale sul quadro in $A_1\ B_1\ C_1$; le rette $OA_1\ OB_1\ OC_1$ sono le proiezioni ortogonali e le $O''A_1''\ O''B_1''$ ed $O''C_1''$ sono le proiezioni 2ᵉ dei tre segmenti obbiettivi eguali che si proiettano obliquamente sul quadro secondo i segmenti dati $OA\ OB\ OC$, i raggi proiettanti essendo paralleli alla retta fF''.

8. — *Sono due i triedri trirettangoli i cui spigoli si proiettano secondo i tre segmenti dati.* Ciò si riconosce osservando che ciascheduna delle tre ellissi $S\ S'\ S''$ (fig. 1) è proiezione di due circoli massimi della sfera citata al N. 2.

Il cilindro che ha per direttrice una delle tre ellissi, per es. la S, e le generatrici parallele ai raggi proiettanti, ha colla sfera due punti comuni, quelli cioè che sono proiettati in $C_1\ C_1$, e trovansi sul contorno apparente della sfera, proiettato in Σ; ed in questi due punti la sfera ed il cilindro hanno anche i piani tangenti comuni; i quali piani sono fra di loro paralleli, e perciò la congiungente gli stessi punti è un diametro della sfera; ed è pure un diametro comune delle due linee piane secondo cui s'incontrano le due superficie; le quali linee sono perciò due circoli massimi della sfera, simmetrici rispetto al piano perpendicolare alle generatrici del cilindro.

Nella figura 7 sono rappresentati i due triedri $OABC$ ed $OA'B'C'$, con una proiezione ortogonale su di un piano perpendicolare al quadro e parallelo ai raggi proiettanti, la quale proiezione si ricava dalla fig. 1, nello stesso modo col quale si è ottenuta la fig. 3. La retta fF è la direzione dei raggi proiettanti; la retta ff perpendicolare alla fF è la proiezione del contorno apparente della sfera relativo alla proiezione obliqua, proiettato sul quadro in Σ. Nelle due semiellissi C_1ABC_1 e $C_1A'B'C_1$ sono rappresentate in proiezione ortogonale, metà per ciascuna, le due circonferenze secondo cui la sfera è incontrata dal cilindro

di traccia S; così le altre quattro semiellissi B_1ACB_1 $B_1A'C'B_1$. A_1BCA_1 ed $A_1B'C'A$ rappresentano in proiezione ortogonale una metà di ciascuna delle circonferenze di circolo massimo secondo cui la sfera è incontrata dagli altri due cilindri che hanno per traccia sul quadro le ellissi S' ed S''. Vedonsi infine i due triangoli sferici che chiudono i due triedri: uno di essi corrisponde alla direzione dei raggi proiettanti indicata dalla freccia fF, l'altro alla direzione opposta.

9. Direzione secondo la quale si proiettano le perpendicolari al quadro. Scala relativa (fig. 3). — Tirisi il raggio della sfera $O''h$ perpendicolare al quadro; questo raggio si proietta in proiezione ortogonale sul quadro nel punto O; ed obliquamente, cioè con raggi proiettanti paralleli alla fF'', si proietta sulla retta OH. Il raggio $O''h$ si riduce in proiezione obliqua nella lunghezza OH. Il rapporto $OH : O''h$ è il rapporto di riduzione per le perpendicolari al quadro; e colla lunghezza OH per unità si forma la scala e_h, colla quale si può conoscere la lunghezza di una perpendicolare al quadro.

10. Elementi fondamentali del disegno (fig. 2 e 4). — Le direzioni OX OY OZ delle proiezioni oblique dei tre assi, colle rispettive scale assonometriche e_x e_y e_z (fig. 4), le direzioni OX_1 OY_1 CZ_1 delle proiezioni ortogonali degli stessi assi sullo stesso piano di proiezione; e la direzione OH delle proiezioni delle perpendicolari al quadro colla relativa scala e_h costituiscono relazioni fra le due proiezioni, per mezzo delle quali una è legata all'altra.

La proiezione obliqua è fatta nello scopo di fare una prospettiva dell'oggetto che si vuol rappresentare; *le due proiezioni coordinate servono*, quando sia necessario, *a determinare di forma e posizione una figura, ed a risolvere, con facile soluzione, problemi che possano occorrere sulla figura così rappresentata.*

11. Verificazione dell'esattezza del tracciato di tali elementi. — Per l'esattezza di un lavoro è necessario di verificare l'esattezza grafica di questi elementi; ciò si fa nel seguente modo: Si consideri un piano π parallelo al quadro, rappresentato nella fig. 3 dalla sua traccia P_2P_2, parallela alla

$F''F''$; si trovino le proiezioni ortogonali $K''K_1$ $I''I_1$ $L''L_1$ dei punti d'incontro del piano π coi tre assi; e si riconosca se le tre rette che congiungono due a due i tre punti K_1 I_1 ed L_1 sono rispettivamente perpendicolari alle proiezioni ortogonali OX_1 OY_1 OZ_1 degli assi. Ciò deve essere, perchè le tre rette K_1I_1 I_1L_1 ed L_1K_1 formano il triangolo delle traccie del piano π coi piani determinati dai tre assi di coordinate presi due a due, e perchè questi tre assi sono fra di loro perpendicolari e la proiezione è ortogonale, un lato di questo triangolo deve essere perpendicolare alla proiezione dell'asse opposto. Inoltre si trovino ancora le proiezioni oblique degli stessi punti, cioè i punti K I ed L, seguendo le rette K_1K I_1I ed L_1L parallele alla OH; i segmenti KK_1 II_1 ed LL_1 debbono essere fra di loro eguali, ed eguali alla $O''p'$ (fig. 3), perchè tutti rappresentano nella scala e_h la distanza del piano π dal quadro.

12. Proposizioni elementari più frequentemente applicate. — *Le due proiezioni ortogonali ed oblique di un punto trovansi allineate nella direzione secondo cui si proiettano le perpendicolari al quadro*, cioè OH (fig. 2). *La loro distanza rappresenta nella scala relativa a queste perpendicolari*, cioè e_h, *la distanza del punto dal piano di proiezione.* Così i due punti L_1 ed L della fig. 2 sono le proiezioni ortogonale ed obliqua di un punto dell'asse delle x; il segmento L_1L portato sulla scala e_h fa conoscere la distanza del punto obbiettivo dal piano di proiezione, che in questa figura s'intende passare per l'origine delle coordinate. Se portando il segmento l_1L sulla scala e_h si legge (suppongo) 0,21, si dirà che la distanza del punto obbiettivo dal piano di proiezione è $0{,}21 \times e$.

Se si suppone che il piano di proiezione si trasporti parallelamente a se stesso, la proiezione ortogonale non cambia di posizione e la proiezione obliqua si trasporta nella direzione OH per modo, che la sua distanza dalla proiezione ortogonale rappresenta sempre nella scala ridotta e_h la distanza del punto obbiettivo dal piano di proiezione.

13. — *Le due proiezioni ortogonale ed obliqua di una retta s'incontrano nel punto che è la traccia della retta sul piano di proie-*

zione, perchè questo punto è proiezione ortogonale e proiezione obliqua di se stesso.

Se una retta è parallela al quadro le sue due proiezioni sono fra di loro parallele; e viceversa: *Se le due proiezioni ortogonale ed obliqua di una retta sono fra di loro parallele, la retta obbiettiva è parallela al piano di proiezione.* La sua traccia è a distanza infinita nella direzione delle due proiezioni della retta. Si dice in tal caso che la retta è collocata *di fronte.*

Se una retta parallela al quadro è anche parallela al piano determinato da due dei tre assi di coordinate, le sue due proiezioni sono perpendicolari alla proiezione ortogonale del terzo asse. (V. n. 11).

14. — La traccia di un piano sul quadro o su di un piano di fronte passa per le traccie delle rette che giacciono nel piano. *Una retta di fronte giacente in un piano ha le sue due proiezioni parallele alla traccia del piano.*

Se un piano è parallelo a due degli assi di coordinate, la sua traccia sul quadro, o su di un piano di fronte, è perpendicolare alla proiezione ortogonale del terzo asse, perchè questo è perpendicolare al piano.

15. — *La traccia del piano che passa per due dei tre assi di coordinate è perpendicolare alla proiezione ortogonale del terzo asse.* Le traccie dei tre piani determinati dai tre assi combinati due a due formano il triangolo delle traccie degli stessi piani sul quadro o su di un piano di fronte; nel quale triangolo la proiezione ortogonale del punto d'incontro delle tre altezze deve coincidere colla proiezione ortogonale dell'origine delle coordinate (n. 11).

Se il piano di proiezione passa per l'origine delle coordinate, le traccie dei tre piani determinati ciascuno da due dei tre assi, passano anche per l'origine delle coordinate, e sono perpendicolari ciascuno alla proiezione ortogonale dell'asse che non giace in quel piano.

16. — *Le due proiezioni, ortogonale ed obliqua, di una figura piana sono affini, coi raggi di affinità paralleli alla direzione* OH, *secondo la quale si proiettano le perpendicolari al quadro, ed hanno*

per asse di affinità la traccia del piano della figura. La dimostrazione di questa proposizione risulta dalle proposizioni indicate ai n^{i} 12, 13 e 14.

Questa proprietà esiste qualunque sia il piano di fronte che è preso come piano di proiezione, sul quale cioè cade la proiezione obliqua della figura e la traccia del piano.

Come caso particolare si ha che: *Le due proiezioni ortogonale ed obliqua del triangolo delle traccie di un piano* π *coi tre piani coordinati, determinati cioè dai tre assi di coordinate presi due a due, sono figure affini, coi raggi di affinità paralleli alla direzione* OH *e l'asse di affinità sulla traccia del piano* π (V. n. 11). Per questa proprietà data una delle proiezioni ortogonale od obliqua del triangolo delle traccie di un piano coi tre piani coordinati si trova facilmente l'altra.

17. — *Se una figura piana rota intorno ad una retta di fronte, situata nel piano della figura, finchè lo stesso piano trovisi parallelo al quadro, le due proiezioni della figura, fatte una prima e l'altra dopo la rotazione, sono affini coll'asse di affinità nella proiezione dell'asse di rotazione;* la direzione dei raggi di affinità si conosce quando si abbiano le due proiezioni di un punto; ciò che è ordinariamente facile ad aversi. Questa proprietà esiste sia per una proiezione ortogonale come per una proiezione obliqua. Si applica molto questa proposizione per risolvere problemi di grandezza, come per avere la proiezione assonometrica (obliqua) di una figura piana, o per avere la forma e la grandezza di una figura rappresentata in disegno assonometrico.

18. — Le proposizioni elementari ora dette si applicano facilmente alla soluzione dei problemi che occorrono più sovente nelle applicazioni della Geometria descrittiva; per dare un esempio, io risolvo qui un problema, nel quale applico la proposizione del n. 17.

Problema. *Disegnare la prospettiva parallela di un circolo, essendo dato il piano del circolo, il centro ed il raggio* (fig. 6). — Gli elementi della rappresentazione sono quelli stessi che si vedono nelle fig. 2 e 4 (n. 10); dei quali però in questa figura è segnata solamente la direzione delle proiezioni delle perpendico-

lari al quadro, cioè OH, colla scala relativa e_h e la scala delle lunghezze e, non essendo necessarii gli altri elementi per la soluzione del problema proposto.

Il piano del circolo α è dato per mezzo della sua traccia α_η sopra di un piano di fronte σ, sul quale si fa la proiezione obliqua del circolo; di più sono date le due proiezioni del centro del circolo sullo stesso piano σ, cioè sono dati i punti C_1 e C proiezioni ortogonale ed obliqua sullo stesso piano σ; per modo che il segmento C_1C, parallelo alla retta OH, rappresenta la distanza del centro del circolo obbiettivo dal piano σ sul quale si fa la proiezione (n. 12).

Per la proiezione C del centro si tiri la retta ACB parallela alla α_η, e si porti su di essa da una parte e dall'altra del punto C la lunghezza del raggio dato, presa nella scala e; sarà questa la proiezione del diametro del circolo che è parallelo al piano di proiezione (n. 14); e sarà facile di trovare la proiezione del diametro coniugato a questo:

Si consideri un piano φ perpendicolare alla traccia α_η del piano del circolo; la traccia di questo piano sul piano σ è la retta C_1T, condotta per la proiezione ortogonale C_1 del centro del circolo perpendicolare alla α_η. Il piano φ, perpendicolare alla retta α_η è perciò perpendicolare al piano α ed al piano di proiezione σ; la sua intersezione col piano α passa per il centro del circolo, è perpendicolare al diametro di fronte proiettato in AB, e forma con questo una coppia di diametri coniugati del circolo. i quali si proiettano in prospettiva sulle rette ACB e TCF, e risultano due diametri coniugati dell'ellisse che si cerca.

Si ribalti il piano φ sul piano di proiezione σ con una rotazione intorno alla sua traccia TC, il centro del circolo si porta sulla retta C_1c perpendicolare alla TC_1, alla distanza C_1c eguale alla distanza del centro del circolo dal piano σ, la quale distanza è rappresentata in figura dal segmento C_1C (n. 11). Preso pertanto $C_1c = C_1C \times \frac{e}{e_h}$ e segnata la retta Tc, si avrà su questa il ribaltamento della retta obbiettiva che congiunge il punto T col centro del circolo. (Osservo qui che l'angolo C_1Tc rappresenta l'angolo che il piano α fa col piano di proiezione). Sulla retta cT a partire dal punto c si portino le lunghezze ce e cf eguali al raggio dato CA, si segnino le rette proiettanti eE_1 ed fF_1

perpendicolari alla TC_1, indi le E_1E ed F_1F parallele alla OH, si avrà in proiezione obliqua la lunghezza del diametro EF coniugato ad AB.

Avendo ora due diametri coniugati si può con questi tracciare l'ellisse; ma dirò invece come si possano trovare alcuni punti e tangenti, applicando la proposizione del n. 17, nello stesso modo che si farebbe se si trattasse di una figura piana qualunque; poi troverò gli assi dell'ellisse semplicemente applicando la proposizione del n. 17.

S'intenda che il piano del circolo roti intorno ad una retta di fronte finchè sia parallelo al quadro, si disegni la proiezione del circolo in questa posizione, la quale sarà un circolo eguale al circolo obbiettivo; con questa proiezione si troverà la proiezione che si cerca mediante l'affinità spiegata al n. 17.

Scelgo per asse di rotazione la tangente al circolo nel punto E, cioè la retta proiettata in proiezione obliqua in ED. Rotando il piano α intorno a questa retta, il raggio del circolo passante per E si mantiene perpendicolare all'asse di rotazione, e, quando si trova parallelo al quadro, la sua proiezione obliqua è in $E\gamma$ perpendicolare ad ED. Il circolo in questa posizione viene proiettato obliquamente secondo il circolo, che vedesi tracciato, descritto cioè col centro in γ e raggio in γE. Questo circolo e l'ellisse che si cerca sono affini coll'asse di affinità in ED, essendo due punti corrispondenti i punti γ e C; e mediante questa affinità si possono trovare punti e tangenti per costruire l'ellisse.

Per trovare gli assi dell'ellisse si descriva il semicircolo che ha centro sull'asse di affinità e passa per i punti C e γ; si uniscano i punti γ e C coi punti r ed s in cui il semicircolo ora descritto incontra l'asse di affinità: le rette Cr e Cs sono gli assi dell'ellisse. Infatti queste rette sono corrispondenti ai diametri γr e γs del circolo perchè incontrano questi sull'asse di affinità in r ed s; questi del circolo sono coniugati perchè l'angolo $r\gamma s$ è retto, essendo inscritto in un semicircolo; perciò i diametri dell'ellisse rC ed sC sono anche coniugati, ma anche l'angolo rCs è retto, perciò sono assi. Le lunghezze di questi assi si determinano coll'affinità fra le due linee, conducendo cioè dai punti $i'l'm'n'$ del circolo i raggi di affinità paralleli alla retta γC prolungati finchè incontrino gli assi rC ed sC.

Fig. 7

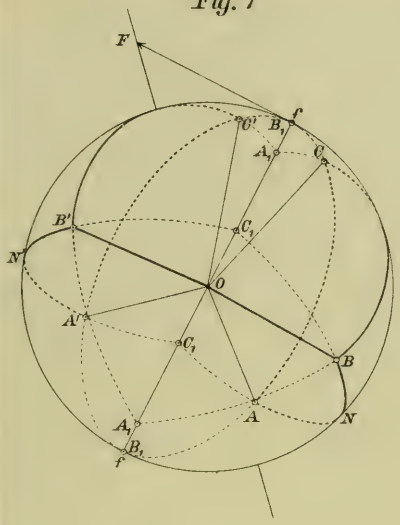

F
C'
B₁
f
A₁
C
B'
C₁
N'
O
A'
C₁
B
A
N
A₁
B₁
f

Fig. 6

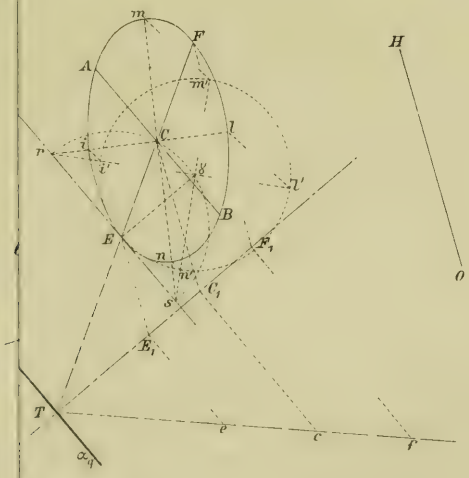

m
F
H
A
m'
C
l
r
i
i'
l'
B
E
E₁
n
n'
C₁
s'
O
E₁
T
e
c
f
α₁

Fig. 1

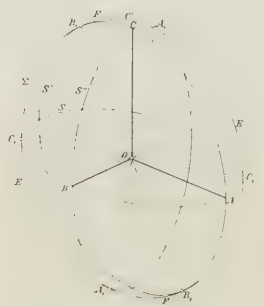


Fig. 5

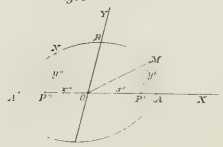


Fig. 7

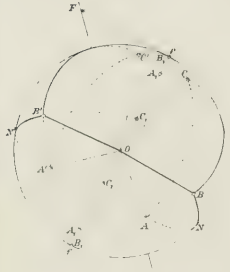


Fig. 4

Scale

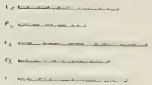


Fig. 2

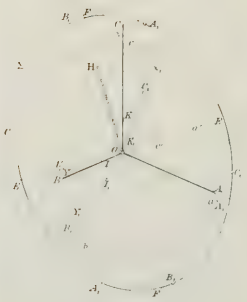


Fig. 3

Fig. 6

Lit. Salussolia, Torino

In quest'ultima parte della soluzione del problema vedesi la soluzione di un altro problema: *Dati due diametri coniugati di un'ellisse trovarne gli assi.* La soluzione che ho qui applicata è un po' diversa da quella data da Chasles (*Traité des sections coniques*, n. 205) e da quella data dal Mannheim nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques*, anno 1857, p. 188; io l'applico sovente e da parecchi anni nel mio corso, e trovo facile di applicarla perchè si dimostra facilmente colla semplice considerazione dell'affinità fra l'ellisse ed un circolo convenientemente scelto.

Relazione sulla memoria del Dr. Guido Fubini: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche.*

Questo lavoro del Dr. Fubini è dedicato allo studio di quei problemi dinamici che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni in sè medesimi, limitandosi l'autore in queste prime ricerche al caso che siano nulle le forze impresse. In tal caso il problema equivale geometricamente alla ricerca di quegli spazi S_n a n dimensioni, definiti dal loro ds^2, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni per le quali le geodetiche si cangiano in geodetiche; un tale gruppo viene detto brevemente un *gruppo geodetico*. Il problema enunciato venne affrontato, pel caso $n = 2$ delle superficie, da S. Lie nella memoria: *Classification der Flächen nach der Transformations-gruppe ihrer geodätischen Curven* ed i risultati del Lie vennero poi completati dal Königs e dal Raffy.

Il Dr. Fubini, che in recenti memorie, inserite negli *Annali di matematica*, aveva completamente esaurita la ricerca degli spazi a n dimensioni con un gruppo continuo di movimenti, ha potuto ora trattare e risolvere il problema dei gruppi geodetici che include, come caso particolare, quello dei gruppi di movimenti.

A base delle sue ricerche l'A. pone un notevole sistema di formole generali (che potranno riuscire utili anche per altre questioni) le quali assegnano, per una data trasformazione infinitesima $Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, le variazioni subìte dai coefficienti a_{ik}

dell'elemento lineare e dai simboli a tre indici di Christoffel e da quelli a quattro indici di Riemann. Si presenta qui il fatto, degno di nota, che mentre le variazioni dei simboli a tre indici dipendono dalle derivate seconde delle ξ, quelle dei simboli Riemanniani (ih, kl) e degli associati $\}ik, hl\{$ dipendono solo dalle derivate prime; ed è da questa circostanza che deriva massimamente la semplificazione della ricerca.

Esprimendo che la trasformazione infinitesima Xf conserva le geodetiche, si ottiene un sistema caratteristico di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine per le incognite ξ per mezzo di relazioni fra i simboli variati $\left\{ {ik \atop l} \right\}$. Queste sono le equazioni fondamentali del problema giacchè, insieme alle loro conseguenze differenziali. esse dànno le *equazioni di definizione* (secondo Lie) pei gruppi geodetici.

L'A. dimostra che dalle equazioni fondamentali possono trarsi *tutte* le derivate terze delle ξ espresse per quelle d'ordine inferiore, onde segue che le dette equazioni formano un sistema di Mayer, entrando nell'integrale generale un numero finito di costanti arbitrarie. Per uno spazio S_n il massimo di questo numero è $n(n+2)$ e viene raggiunto soltanto quando lo spazio è *geodeticamente* rappresentabile sullo spazio Euclideo, cioè quando la curvatura Riemanniana è costante. Allora il più ampio gruppo geodetico coincide col generale gruppo projettivo $G_{n(n+2)}$.

Per la trattazione generale del problema l'A. considera particolarmente le equazioni del *1° ordine* per le ξ, conseguenze differenziali delle equazioni fondamentali, la cui formazione è essenziale per semplificare la ricerca. Un primo gruppo di siffatte equazioni deducesi dal confronto colle formole precedenti relative alle variazioni dei simboli di Christoffel e di Riemann, e se ne trae subito l'importante conseguenza che una trasformazione geodetica *conforme* è necessariamente *simile*.

Con metodo totalmente diverso viene poi dedotto un secondo gruppo di equazioni del 1° ordine per le ξ utilizzando, con un'ingegnosa osservazione, i risultati generali ottenuti dal prof. Levi-Civita sulla rappresentabilità geodetica degli spazî. È noto come gli elementi lineari degli spazî che ammettono una rappresentazione geodetica (non simile) sopra altri spazî si riducano a forme tipiche, che pel caso $n = 2$ corrispondono alla forma tipica di

Lionville ritrovata dal prof. Dini nel lavoro fondamentale sulla rappresentazione geodetica delle superficie. Il Dr. Fubini, servendosi dei risultati ora accennati, osserva che ad una trasformazione geodetica *non conforme* corrisponde così una certa forma tipica del ds^2, e quindi un certo sistema coordinato che egli dice il *sistema canonico*, e ne trae il nuovo gruppo di equazioni del 1° ordine per le ξ, che restano essenzialmente legate a quelle forme tipiche del ds^2.

Servendosi di questi mezzi di ricerca, e coll'aiuto di molti altri interessanti teoremi, che sarebbe qui troppo lungo il riassumere, il Fubini riesce a risolvere il problema proposto. E dapprima, pel caso delle superficie, egli accenna come si possono dedurre completamente e con rapidità i risultati di Lie, Königs e Raffy.

Tratta poi il nuovo caso degli spazî a tre dimensioni, classificando completamente i possibili tipi di ds^2 che ammettono un gruppo geodetico. Si volge da ultimo al caso generale degli spazî a n dimensioni, ove le ricerche attuali, congiunte a quelle anteriori sugli spazî con un gruppo di movimenti, permettono di esaurire quasi completamente l'argomento, lasciando solo qualche caso eccezionale che domanderebbe ricerche speciali.

Gli importanti ed originali risultati conseguiti dal Dr. Fubini nell'interessante problema qui trattato, le difficoltà vinte con nuovi ed efficaci mezzi che permettono di raggiungere una semplicità insperata, rendono molto pregevole questo lavoro ed i sottoscritti credono per ciò che la memoria presentata dal Dr. Fubini possa degnamente figurare nei volumi della nostra Accademia.

C. Segre.
L. Bianchi, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peyron, Vice Presidente dell'Accademia, Rossi, Manno, Bollati di Sain-Pierre, Pezzi, Carle, Boselli, Brusa, Allievo, Pizzi, Chironi e Renier Segretario. — Il Direttore della Classe Ferrero, scusa l'assenza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 15 gennaio 1903.

Il Socio Renier ringrazia la Classe per la parte da essa gentilmente presa alla gravissima sciagura domestica che lo ha colpito.

Il Presidente fa omaggio all'Accademia delle seguenti pubblicazioni:

1° da parte del Socio corrispondente Luigi Pigorini, un opuscolo del Dr. Luigi Pernier, *Lavori eseguiti dalla Missione archeologica italiana nel palazzo di Phaestos dal 10 febbraio al 28 maggio 1902* (Roma, Tip. dei Lincei, 1903);

2° da parte del prof. Ireneo Lameire dell'Università di Lyon, un suo volume intitolato: *Les occupations militaires en Italie pendant les guerres de Louis XIV* (Paris, Rousseau, 1903). Il Socio Brusa si propone di esporre in seguito qualche sua idea su questa pubblicazione, che sin d'ora dichiara notevole.

Il Socio Allievo presenta una memoria del Dr. Stefano Grande, intitolata: *Il pensiero pedagogico di Ludovico Antonio Muratori.* Il Presidente designa a riferirne i Soci Allievo e Carle.

Sono presentate per gli *Atti* le seguenti note:

1° dal Socio Rossi, che ne dà un breve riassunto, Gio. Batt. Gerini, *L'educazione fisica secondo alcuni pedagogisti italiani del secolo XIX;*

2° dal Socio Chironi: Pasquale Jannaccone, *Un economista piemontese del secolo XVIII (Donaudi delle Mallere) a proposito di alcuni suoi manoscritti inediti.*

LETTURE

L'educazione fisica secondo alcuni pedagogisti italiani del secolo XIX.

Nota del Prof. G. B. GERINI.

Fu già un tempo nel quale la coltura dell'organismo corporeo costituiva pressochè tutta l'educazione. Allora il primo e precipuo intendimento dei legislatori e de' governi consisteva nell'allevare cittadini sani e vigorosi, esplicando e perfezionando di preferenza le forze fisiche. Vigendo il diritto del più forte, era necessario che così fosse. Ma corse pure un'età nella quale si spregiava come vile il culto del corpo, e nulla si faceva per rinvigorirlo cogli opportuni esercizi: anzi lo si opprimeva, credendo che in siffatto modo sarebbe stato più docile strumento dello spirito. Ma questi due estremi, il sistema di Licurgo e l'ascetismo medioevale (1), irrazionali entrambi ed esclusivi, vanno ripudiati in virtù di quel principio, che stabilisce dovere l'educazione fisica essere bensì subordinata a quella della mente, ma non sacrificata alla medesima, essendo destinate l'una e l'altra a procedere in armonico accordo, pure tenendosi ciascuna entro i proprii confini. Se l'educazione è " l'opera della natura disciplinata dall'arte, mercè di cui una persona autorevole coopera a svolgere e dirigere armonicamente le potenze dell'alunno, in ordine al suo fine, rendendolo atto a perfezionarsi da se medesimo " (2),

(1) L'ascetismo dominava nei conventi e nelle private famiglie, anzichè nei pochi ed umili istituti educativi del medio evo.

(2) La definizione da me proposta, ha, se l'amor proprio non m'inganna, il vantaggio su altre non poche, di tenere conto tanto dell'educazione anteriore all'arte (come quella impartita dai popoli primitivi e dai genitori, i quali educano guidati dal buon senso) quanto dell'educazione continuata dall'alunno, fatto arbitro di sè. Nè solo comprende l'educazione in tutta la sua durata, ma dichiara ancora il carattere dell'educazione educativa, e colla parola *armonicamente*, accenna alla legge secondo la quale le potenze umane vanno disvolte e coltivate. Poichè io tengo coll'Allievo (*Studi pedagogici*, ecc., 1892, parte I, sez. XI) che l'armonia è la legge suprema dell'educazione.

non si può nè si deve affatto trascurare alcuna parte della medesima, o comunque coltivare l'una in modo siffatto che impedisca ovvero danneggi l'esercizio dell'altra. Del resto in quella guisa, che si ammette universalmente dovere il corpo riuscire uno strumento abile per la mente (1), si conviene del pari essere funestissimo errore credere, che un organismo debole ed infermiccio obbedisca più docilmente allo spirito, giacchè la sanità dell'anima dipende da quella de' suoi organi. Il *mens sana in corpore sano* del poeta satirico romano, è detto antico ma pur sempre vero.

Ciò posto, in che consiste l'educazione fisica e quale parte le spetta nell'àmbito della scienza pedagogica? L'educazione fisica intende a conservare e rendere sano il corpo; a sviluppare, crescere ed addestrare le membra; a perfezionare i sensi. Il quale triplice scopo si raggiunge con tre mezzi adeguati e convenienti, quali l'igiene, la ginnastica e la coltura de' sensi fisici. Ora siccome l'educazione umana è retta da leggi, a tenore delle quali deve procedere l'istitutore per conseguire la meta a cui è indirizzata l'opera sua, di cui alcune riguardano l'educazione universa, altre invece le singole parti, così le leggi proprie dell'educazione fisica si possono riassumere nella seguente: " Si lasci liberamente operare la natura, rimuovendo gli ostacoli che si oppongono alla sua azione e favoreggiando lo sviluppo delle forze fisiche, in guisa che l'organismo diventi uno strumento vigoroso e docile della mente „ (2). Se da tutti si conviene, che la vita corporea rettamente sviluppata, esercita una benefica influenza sulla vita mentale, è verità assiomatica del pari quest'altra, che lo spirito avrà nel corpo, con cui è indissolubilmente congiunto, uno strumento atto e pronto ad ese-

---

(1) G. Locke (*Pensieri sull'educazione dei fanciulli*, c. 2) avverte, che voglionsi usare tutte le precauzioni per conservare sano il corpo, affinchè sia capace di obbedire all'anima. Il che consona col concetto platonico (*Protagora o i Sofisti*, XV): " Inoltre li mandano dal maestro di ginnastica, affinchè con migliori corpi servano alla mente già avvalorata e non siano " costretti per la cagionevolezza de' corpi, o nelle guerre o in altro atto, " a scorarsi „.

(2) Questa legge rientra in quella più generale, che fa precetto all'educatore di conformare l'opera sua alla natura dell'alunno, quale uomo e quale individuo, e di aiutare lo svolgimento delle ingenite attitudini.

guirne i comandi, solo quando mediante una coltura conveniente, siasi fatto sano e vigoroso. Ma mentre l'igiene si adopera perchè l'organismo si trovi in grado di adempiere le funzioni della vita vegetativa e lo premunisce contro tutto ciò che possa alterarlo o nuocergli, e la ginnastica intende a sviluppare le funzioni della vita animale locomotrice col rinvigorire ed addestrare il sistema muscolare, la coltura de' sensi fisici mira a rafforzare gli organi che vegliano alla nostra salute ed a cui dobbiamo la conoscenza del mondo esteriore. Se così stanno le cose, agevolmente si vede l'importanza e la necessità di perfezionare i sensi, rendendoli mediante un'accurata e razionale coltura, atti all'adempimento dei loro uffici.

Questi pochi ed incomposti pensieri sull'educazione fisica, credetti opportuno premettere al breve cenno, che mi propongo di porgere intorno alle idee, di cui, riguardo all'educazione delle potenze animali, si fecero banditori alcuni de' pedagogisti fioriti in Italia nel secolo decimonono, i quali informarono la loro dottrina allo spiritualismo, ch'è il carattere dominante e distintivo della pedagogia nazionale da Vittorino da Feltre a G. A. Rayneri. Io non esordirò dal Feltrense (1) per giungere sino a' nostri tempi, poichè de' pedagogisti vissuti a tutto il secolo XVIII, discorsi diffusamente altrove (2), nè qui voglio ripetermi, pago

---

(1) Poichè mi venne fatto di menzionare il Feltrense, a cui spetta il merito d'avere insegnato all'Italia ed agli altri paesi il vero metodo pedagogico, col mostrare, che l'educazione vuole essere una, molteplice ed armonica e col disposare gli esercizi fisici con quelli della mente, non so ristarmi dal notare, ch'egli esperimentò pure l'influenza della ginnastica sulla salute degli allievi. Raccontano infatti i biografi dell'insigne educatore, che essendo i principi da lui tolti ad educare, tozzo e pingue il primo, magro e quasi disfatto l'altro, con razionali e convenienti esercizi, seppe così bene emendarne i difetti, che con alta compiacenza soleva poi chiamarli il suo Ettore l'uno, il suo Achille l'altro. Così anche in questo precedeva G. Locke, il quale essendo istitutore del figlio di lord Shaftesbury, piuttosto gracile di salute, lo rese sano e robusto, ed E. Ling, di cui è noto, che alla ginnastica dovette la guarigione d'una semi-paralisi al braccio destro. Per la verità storica, non va tuttavia dimenticato, che secondo alcuni scrittori, più secoli innanzi, G. Cesare, per mezzo della ginnastica, aveva rassodato ed ingagliardito il corpo estremamente debole.

(2) Veggansi i quattro volumi da me pubblicati su: *Gli scrittori pedagogici italiani dei secoli XV, XVI, XVII e XVIII.*

di menzionare in questo scritterello alcuni di quelli, i quali o scrissero sul cadere del secolo decimottavo o nel seguente.

Primo nella serie di coloro, il cui pensiero mi sono proposto di brevemente riassumere, è il famoso lessicografo Fr. Alberti, così benemerito della lingua italiana e francese (1). Egli nel 1767, trentenne, compose un'opera inscritta: *Dell'educazione fisica e morale ossia doveri dei padri, delle madri, dei precettori.*

Quivi muovendo dal principio, che il corpicciuolo de' bambini è tenero e delicato e che le ossa de' medesimi, se fortemente compresse, possono cambiare figura e direzione, ripudia l'uso delle fascie come causa di deformità (2): ed insistendo perchè alla natura si permetta di *operare liberamente* e senza impacci, proscrive i busti e gli abiti stretti, i quali nuocono alle membra di cui impediscono il libero esercizio. Così in mezzo a molti e savii consigli igienici, raccomanda di abituare i fanciulli a tollerare la fame e la sete, a sostenere la fatica e gradatamente all'acqua fredda " immergendoveli con tutto il corpo dopo replicate prove ".

L'anonimo religioso dell'Oratorio, autore del volume: *Dell'educazione spregiudicata*, ecc. (Carmagnola, 1789), il quale loda l'Alberti per essersi segnalato nobilmente ed avere apprestato ai genitori, ai maestri ed alle direttrici abbondanti ed agevoli mezzi, onde promuovere la savia educazione della gioventù (3), raccomanda di allevare i bambini, cui vuole, per considerazioni fisiologiche e morali, nutriti col latte materno, con moderata durezza, affinchè a poco a poco si avvezzino a soffrire le vicissitudini dell'atmosfera, la veglia, la stanchezza ed i cibi poco

---

(1) Qualche cosa sull'educazione fisica leggesi pure nel poemetto dell'abate Girolamo Ruggiu, *La coltura del cuore, della mente e del corpo* (in *Poemetti didascalici*, t. VII).

(2) Tutti i filosofi, scrive il Parravicini (*Manuale di Pedagogia e Metodica*, ecc., vol. I, Livorno, 1850, p. 4), da Plinio a Rousseau, hanno biasimato l'uso delle fascie, ed altrettanto hanno fatto i medici che scrissero d'educazione fisica. Veggasi in proposito il *Saggio sull'educazione fisica dei fanciulli* del Raitier, Venezia, 1805.

(3) Nel volume: *Gli scrittori pedagogici italiani del secolo XVIII*, tacqui dell'Alberti, perchè il cenno riserbato a lui, doveva associarsi collo studio intorno all'anonimo, il quale farà parte del prossimo volume riguardante il secolo XIX.

geniali. Seguano, egli scrive, una regola nelle refezioni, sia rispetto alla qualità sia rispetto alla quantità de' cibi e delle bevande, poichè se l'età loro richiede che si nutriscano più volte al giorno, l' eccesso potrebbe cagionare danni gravissimi. Li vuole lontani dal fuoco (1) e provvisti di vesti atte a ripararli dal freddo, ma comode e sciolte per tutti gli esercizi di moto, i quali devono avere luogo all'aperto, dove l'aria giuochi liberamente e sia immune da ogni nociva esalazione.

Il ligure Niccolò Olivari (1748-1820), intorno al quale ho recentemente dettato un breve studio (2), nell'opera: *L'educazione fisica e fisico-morale*, ecc. (Genova, 1786), discorre copiosamente della coltura delle potenze fisiche, nella quale pel primo, se non m'inganno, distinse tre parti, l'igiene, la ginnastica e l'educazione de' sensi. Egli che voleva iniziate le cure educative prima ancora della nascita, porgendo saggi ed opportuni consigli alla futura madre, riconobbe negli esercizi ginnastici il lato morale; perchè, secondo lui, devono promuovere l'ordine, la disciplina e l'obbedienza de' fanciulli: de' quali fino al settimo anno, senza distinzione di sesso, richiede che dopo il cibo ed il sonno, il trastullo sia la naturale e precipua occupazione. Nè l'Olivari cessa d'insistere perchè l'arte favorisca l'istinto al moto, confortandolo ove illanguidisca e moderandolo qualora trasmodi. Si consenta, egli scrive, ai bambini, ora di stare in piedi, ora di passeggiare, ora di saltare, ecc., secondo che ai medesimi piace, provvedendoli di palle, di racchette, di carrozzini e d'altri giuochi.

Il barone Ferdinando Malvica, pubblicava nel 1827 a Rieti un discorso: *Sopra l'educazione*, ove tra le altre cose, perchè i figliuoli si procaccino una vigorosa complessione, raccomanda di lavarli prima nell'acqua fredda, e di condurli appena svegliati a passeggio fuori della città, o, data l'occasione, in riva al mare, facendoli quivi camminare, correre e giuocare liberamente. Fra gli esercizi fisici, raccomanda il giuoco della palla,

---

(1) Anche il Fontana, di cui dirò tra breve, (*Dell'educ. fis.*, c. VI) scrive: " Non si conceda mai che impigriscano intorno al focolare. Il continuo moto " a cui sospingeli la natura, scalderà la persona quanto basta ".

(2) Vedi il mio articolo sull'Olivari, pubblicato nel *Caronda — Rivista di pedagogia e scienze ausiliari*, Acireale, anno I, n^{i} 1 e 2.

il nuoto, l'equitazione, ed afferma, che, come la sapienza rende lo spirito saggio, la ginnastica fa sano il corpo.

Ma sovra tutti gli scrittori, i quali fiorirono nella prima metà del secolo, sovrasta in ordine all'educazione fisica, il conte G. B. Carrara-Spinelli (1779-1842), il quale, nel secondo dei quattro dialoghi: *Dell'educazione privata* (1827), discorre diffusamente e con vero intelletto d'amore del nostro argomento. Egli non solo esorta a ristabilire la ginnastica nelle scuole, convinto della grande utilità, la quale potrebbe provenirne all'individuo ed alla società, ma tratta dell'igiene ne' suoi rapporti coll'educazione e della razionale coltura de' sensi fisici vuoi rispetto alla sanità del corpo vuoi rispetto a quella dell'anima. Nè tace de' mezzi atti ad agguerrire i fanciulli contro la paura, la quale suole cagionare molte affezioni morbose. Pigliando le mosse dal concetto, che il moto è naturale, e per conseguenza necessario; che senza del medesimo, specialmente nel crescere, perdiamo l'energia di cui ci ha la natura fornito pel nostro perfezionamento, scrive queste assennate parole: " Quando tutti i muscoli prendono parte al movimento energico e prolungato della persona, allora la circolazione è attiva non solamente per l'esercizio del celabro, il quale ad agire vigorosamente ha bisogno del maggior concorso di sangue che nello stato ordinario; ma è attiva ancora per la contrazione dei muscoli sopra quei canaletti che sono ne' muscoli stessi, e si diffonde quindi fino ai vasi minimi: laonde il sangue fa arrossare la pelle, che lascia fuggire la parte più fluida del sangue istesso, che poi sudore diciamo. In grazia di questa circolazione tanto attiva anche la respirazione è aumentata, tutto il sistema *vasculare* si dilata, fino a che la fatica sottentrando pone termine a questi fenomeni. L'azione nervosa si spossa, il sangue cessa d'abbondare al cervello, e modera quell'elemento di cui ha fatto straordinario dispendio nei muscoli: diventa necessario il riposo: la circolazione ancor pronta a poco a poco si rallenta; tutto rientra nell'ordine: un generale benessere sopravviene alla fatica: si fa vivo il bisogno del cibo: lo stomaco agisce e sollecitato dal bisogno compie egregiamente le sue operazioni: un chilo abbondevole ripara le perdite della traspirazione e dell'azione nervosa, e rimane al giovinetto la voluttà innocente della perfetta sanità ". E quantunque si dolga che la ginnastica non esista come istruzione,

avverte il Carrara che può tuttavia praticarsi: laonde discorre della *corsa*, del *salto*, il quale " ha la virtù di accostumare i muscoli a contrazioni forti e rapide, e procurare così l'agilità „ (1): del *giuoco della palla* e del *pallone*, che tanto giova alla sveltezza delle gambe, alla prontezza ed alla vigoria del braccio e finalmente alla sicurezza dell'occhio. Nè basta. Lasciando da parte il volante ed il trucco, come giuochi non faticosi e proprii del fanciullo convalescente, inculca l'esercizio della caccia, del nuoto e dell'equitazione. Per tacere de' bagni tiepidi e d'acqua corrente, di cui il dotto gentiluomo rileva gli effetti fisiologici, giova riportare un passo che tratta del nuoto. " Il moto alterno di flessione e di estensione di tutte le parti esige la cooperazione di tutti i muscoli, e a cui non sia avvezzo produce stanchezza: perciò senza ripetere l'esercizio non può il fanciullo trascorrere nuotando lunghe distanze, ma perchè a tale arrivi, è bene che nella stagione opportuna il fanciullo vi si addestri ogni giorno, chè oltre al vantaggio della sanità, apprende un'arte di somma importanza, e che può riuscirgli proficua nei molti accidenti, dei quali assai uomini, ignari del nuoto, rimangono vittima „. Il discorso riuscirebbe soverchiamente prolisso s'io volessi dire degli altri esercizi, da lui raccomandati, come la danza, l'equitazione e la scherma, ed esporre le idee dell'autore sulla coltura dei sensi fisici. Qui basti l'aggiungere come il nostro pedagogista voglia favorito l' insegnamento delle arti meccaniche, cui reputa d'incontestato vantaggio morale e fisico.

L'abbate Antonio Fontana (1784-1865) non dev'essere dimenticato in questa brevissima rassegna. Egli nel libro II dell'opera: *Manuale per l'educazione umana*, edita fin dal 1834, dopo di avere accuratamente discorso del matrimonio de' genitori, della gravidanza, dell'allattamento (2), delle nutrici e dell'igiene riguardante l'aria, la luce, i cibi, le bevande e le vesti, trattiensi intorno agli esercizi della persona, facendoli seguire da alcune considerazioni sul sonno, sulla nettezza e sulla cura dei

---

(1) L'arte del saltare, oltre al riuscire vantaggiosa in molti casi, è anche un esercizio utilissimo degli arti inferiori.

(2) Tutti i pedagogisti, da Plutarco a Rousseau, inculcano alle madri il dovere ch'esse hanno di nutrire col proprio petto i figli ai quali diedero la vita.

sensi. Limitiamoci a vedere che cosa pensi intorno alla ginnastica. Incomincia lo scrittore ticinese col dichiarare, che il fanciullo va sempre lasciato libero a' suoi trastulli, per quanto lo comporti la convenienza, dilettandosi egli di correre, di saltare e di adoperarsi liberamente colle mani, colle braccia e con tutta la persona, a quelle cose in cui si prova. I quali movimenti, egli soggiunge, sono bisogni della natura, cui giova tuttavia moderare mercè dell'educazione a convenevoli misure, perchè non si formi l'abitudine ad obbedire sempre e ciecamente ad ogni naturale impulso come ne' bruti. Entro tali misure siffatti esercizi riescono del tutto necessarii: del che sono prova manifesta la contentezza la quale appare sul volto, il desìo del cibo che aumenta e la salute che fiorisce. Chè se quando spunta la ragione, gli atti voglionsi a poco a poco informare alla convenevolezza, e l'esercizio della persona va perciò determinato a tempi, a luoghi, a modi che meglio si convengono, il medesimo non deve essere affatto trascurato (1).

Ma quali sono le esercitazioni adatte ai nostri costumi, da cui si possono ottenere quei vantaggi stessi cui gl'ingenui giovinetti ritraevano dalle arti ginnastiche antiche? In primo luogo, risponde l'autore, il passeggio, la corsa, il salto: secondariamente i giuochi delle pallottole, della palla e del pallone, i quali " promuovono ad un tempo il corso, il salto, il molteplice e prontissimo atteggiare di tutta la persona; onde i muscoli acquistano mobilità e forza; le membra si fanno agili e vigorose; e l'anima si abbandona alla gioia innocente, onde libera e vivace pare poi più pronta e più sottile alle esercitazioni dell'intelletto ". E dopo alcune osservazioni sull'arte del cavalcare, sulla caccia e sul ballo, l'A. parla del nuoto che per duplice modo procaccia forza e salute, muovendo ed esercitando non solo tutte le membra, ma nettandole ed ammorbidendole. Nè il Fontana dimentica l'educazione fisica delle fanciulle. Anch'esse nella prima età vanno lasciate convenevolmente libere al moto, ai

(1) Vuole che i trastulli siano all'aperto, in luoghi ampii e sicuri, e che non si badi troppo al caldo ed al freddo, poichè i fanciulli stessi " senza " altrui precetti si ritrarranno all'ombra negli infuocati meriggi d'estate; " ricovreranno alle stanze ne' più duri giorni dell'inverno ". Fontana, op. cit., c. VI.

trastulli ed a tutto il travaglio irrequieto e perenne a cui le spinge natura. Nè fatte grandicelle voglionsi tenere rinchiuse in casa: bensì devono trovare spassi che le muovano, che le sollevino, che le rallegrino. Laonde raccomanda che si conducano sovente alla campagna: che si guidino a lunghi e rapidi passeggi: che si accompagnino per istrade montuose ed aspre, affinchè per tal modo si stanchino e sudino nell'aria libera e pura. Anche il ballo, il quale vuole essere per altro argomento di gravissime meditazioni, può dare salute, grazia e leggiadria alle fanciulle (1).

Pochi anni dopo e precisamente nel 1842 il marchese Alessandro Parravicini, pubblicava il suo *Manuale di Pedagogia e Metodica*, dove trattò pure in modo conveniente dell'educazione corporea. Egli infatti non solo trattiensi diffusamente sull'igiene, esponendo i precetti più notevoli riguardanti la salute e la vigoria del corpo, ma discorre ancora degli esercizi fisici ponendo il seguente principio fondamentale, che se questi saranno moderati, gradualmente più difficili e convenienti alle forze ed all'età degli alunni, renderanno certo più libera la circolazione del sangue, più forte la parte esercitata, più facili tutte le funzioni corporee, meno faticoso ed affatto innocuo il lavoro della mente. Così raccomanda, non senza rilevarne i benefici effetti, gli esercizi delle *marce*, della *corsa*, del *salto*, nelle sue varie specie, l'*arrampicarsi* ed il *nuoto*.

Tra i fautori della fisica coltura piacemi menzionare l'apostolo dell'infanzia, l'ab. Ferrante Aporti, che gli avversarii della pedagogia italiana soltanto possono posporre al Froebel. Egli pertanto negli *Elementi di Pedagogia* (Roma, 1847), dopo avere accennati gli errori relativi all'educazione del corpo e le norme

(1) Non so astenermi dal ricordare, che dell'educazione fisica femminile, fanno motto l'anonimo più sopra menzionato, l'Olivari ed il Malvica. Aggiungerò ancora, che il p. Gioachino Trioli, nelle *Lettere sull'educazione fisica e morale delle fanciulle*, Venezia, 1763 (cfr. il mio volume: *Gli scrittori pedag. ital. del sec. XVIII*), a chi gli obbiettava essere l'educazione fisica da lui propugnata, più consentanea a soldati che a donne, rispondeva: " La bellezza, la sanità, il coraggio sono senza dubbio tre beni, che " invano si ricercano nella mollezza e negli agi, e si acquistano soltanto " per un'educazione, che sembra severa, ma non lo è che per coloro che " sono allevate nelle morbidezze ".

da seguirsi per evitarli, prescrive al maestro di procurare che l'aria delle aule scolastiche sia sempre pura e sana, eliminando le cause di qualsivoglia esalazione: che i fanciulli s'abituino alla nettezza: che venga escluso dalla scuola chi fosse affetto da efflorescenza attaccaticcia, e di valersi inoltre d'ogni occasione per ammonirli intorno a tutto quello che potesse recare nocumento alla loro salute e di guardarsi infine dall'impedire che facciano all'aria un conveniente moto tanto necessario alla sanità, sia trattenendoli oltre il tempo consueto in classe, sia assegnando soverchio lavoro. Nè voglio omettere come l'illustre cremonese plaudisce alla *Società ginnastica*, sôrta sotto gli auspizi d'insigni e benemeriti personaggi, qualche anno prima (1844), in una lettera indirizzatale in data del 20 novembre 1848 nel *Risorgimento*, dopo di avere assistito agli esercizi ginnastici della Scuola gratuita e alla distribuzione de' premi. Ivi egli non solo loda la Società torinese, la *prima* e l'*unica* fino allora in Italia, che volgesse cure e dispendii a fondare e sostenere istituzioni ginnastiche, ma fa voti con tutti i buoni, perchè " trovi imitatori in ogni città, in ogni borgata, in ogni istituto a necessario compimento di quella *maschia* educazione di tutte le umane facoltà, della quale abbisogna supremamente l'Italia nostra, onde risorgere dagli errori e dai vizi che la conturbano e l'avviliscono „ (1).

Dall'Aporti non possiamo disgiungere un insigne gentiluomo subalpino, il conte C. Boncompagni, fautore d'ogni savia e liberale riforma nell'ordine pedagogico non meno che nel politico, che tanto s'adoperò perchè si costituisse la Società promotrice degli Asili infantili in Torino e perchè il grande educatore, cui ospitò per qualche tempo nella sua casa, fosse chiamato tra noi a dettare pubbliche lezioni di Pedagogia. Il nostro patrizio adunque, il quale non disdegnò di farsi maestro ai parvoli (2), oltre al

---

(1) Dalla *Società ginnastica*, per opera di R. Obermann, di E. Riccardi di Netro, che ne furono i benemeriti fondatori, di Cesare Caveglia, di A. Gamba e di F. Valletti, trasse origine l'attuale indirizzo pedagogico, scientifico e nazionale della ginnastica italiana. Vedi l'art.: *Palestra* di M. Jerace, nel *Dizionario illustrato di Pedagogia*.

(2) " Nelle scuole infantili passai alcuni de' migliori momenti della mia " vita, e talvolta dimandai a me stesso se, invece di partecipare agli affari " politici, non avrei fatto meglio di spendere tutta l'opera mia nell'educa-

volumetto *Sulle scuole infantili* (1839), ove discorre pure dell'educazione fisica, nelle *Letture di famiglia* dirette dal Valerio (anni 1842-43-44-45), pubblicò una serie di articoli intitolati: *Pedagogia dell' infanzia*, in uno de' quali (1843, n. 11), dopo di avere detto, che l'educazione fisica non consta della sola igiene, e che in molte occasioni tornano utili ed in altre necessarie le attitudini, cui la ginnastica sviluppa, avvisa che il moto scuote gli animi dalla mollezza e dall'inerzia e dispone la gioventù ad un nobile e generoso ardimento, mentre la vita molle ed effeminata contribuisce alla fiacchezza della volontà e de' pensieri. Voleva perciò che a rinvigorire gli animi, si desse larga parte, segnatamente nell'educazione popolare, alla ginnastica.

Il concetto del B., d' istituire gli esercizi fisici, affinchè nei giorni festivi i contadini de' villaggi e gli artigiani della città potessero, in luogo aperto, dare prova di destrezza e di vigore, ci richiama alla memoria il *Saggio sui pubblici divertimenti* del sommo Roveretano, che leggesi quale appendice alla *Filosofia della politica* (2ª ediz., Milano. Pogliani, 1858). Quivi il grande pensatore avverte, che i pubblici giuochi di moto e di agitazione corporea, promossi saviamente, oltre al rinforzare la salute ed al fornire soldati più robusti, porrebbero qualche equilibrio tra lo sviluppo dello spirito e quello del corpo e le loro mutue forze. Rinvigorite le fibre rilassate coll'accresciuta attività in giuochi ginnastici ed altri esercizi, si ristorerebbero anche le forze della mente e si rimetterebbe tra i due elementi costitutivi dell'umana natura, l'equilibrio violato anche in parte dai modi d'istruire la gioventù. E poco prima aveva più chiaramente ancora riprovato il precoce sviluppo voluto imporre agli spiriti fanciulleschi coi medesimi sistemi d'educazione e coll'abbondare nelle cognizioni meno necessarie, perchè ciò determina non solo lo squilibrio tra la scienza della virtù e le altre discipline, ma dà ben anco un tracollo all'equilibrio tra il corpo e lo spirito. Così il R., condannava come funesta l'istruzione scolastica senza ritegno (1)

" zione popolare ". Così il Boncompagni di sè nello scritto del professore L. Amedeo di Lamporo: *Della vita e delle opere di Carlo Boncompagni.* Casa editrice di F. Vallardi, Milano, 1881.

(1) Sull'argomento vuolsi menzionare l'opuscolo del Cantù: *Doveri di scuola*, in cui lo storico illustre alza la voce contro l'abuso dello studio nelle

e senza misura e prevedeva le gravissime conseguenze più tardi disvolte dallo Spencer, il quale, com'è noto, attribuisce alla scienza un'efficacia educativa sovrana.

Il Roveretano non è il solo de' filosofi a cui siasi palesata la necessità dell'educazione fisica. Gian Domenico Romagnosi (1761-1835) ha diritto ad essere menzionato pure in questo luogo. Egli invero pone per principio che l'educazione corporea è indispensabile alla mentale, e nella prefazione alle *Vedute fondamentali dell'arte logica*, § 20, riprova la violenza siccome quella che guasta i cervelli e rende odiosi gli studi, molto più se vi si aggiungono i castighi corporei. Che anzi nell'opuscolo: *Educazione mentale,* III, ponendo in sodo, che l'educazione vuole essere soddisfacente allo sviluppo dell'allievo, avverte che ogni metodo deve riuscire opportuno: che l'opportunità è logica, morale e fisica ad un tempo, e che l'opportunità fisica " consiste nell'essere proporzionata al grado d'intelligenza portato dallo stato necessario dell'età e dello sviluppamento della mente „ (1).

Veniamo ora a Vincenzo Gioberti. Questi avvisa nei *Prolegomeni* al *Primato*, che la trascuranza del corpo, è una delle cagioni per le quali, rispetto al valore personale, l'età presente sottostà di gran lunga ai popoli antichi. Perciò vuole che i giovani si disciplinino al moto ed all'esercizio, ch'è quanto dire all'azione in universale, " giacchè come il muscolo è quasi l'esteriorità del nervo, così l'energia dell'anima è l'essenza recondita e l'esteriorità del movimento „. Ed esagerando consiglia di inspirare fin dagli anni primi ne' bambini l'affetto per gli esercizi militari, facendo in guisa che i trastulli ed i giuochi servano di preparazione alla vita militare (*Rinn.*, lib. 2, c. 11).

Niccolò Tommaseo, del quale gli Italiani hanno ne' giorni trascorsi celebrato il primo centenario della sua nascita, è quegli

---

scuole, dimostrando, dice S. Giuffrida (*Storia della Pedagogia*, parte 2ª, Torino, Scioldo. 1901), i funesti effetti che derivano al corpo ed allo spirito, prima ancora che in Italia e fuori si gridasse contro il sovraccarico intellettuale.

(1) Il nome del R. ci ricorda il cremonese B. Poli, il quale in una lettera diretta ai colti e dotti italiani (*Biblioteca italiana*, fasc. di luglio 1829, vol. LV, p. 128), proponevasi di raccogliere con apposito modulo la statistica degli usi pedagogici, fisici, intellettuali e morali, per fissare " le massime irrefragabili d'una scienza applicata immediatamente al nostro vero " perfezionamento „.

che più eloquentemente dichiarò i vantaggi della coltura corporea ed in peculiare maniera degli esercizi ginnastici. Mentre infatti ne' *Nuovi scritti sull'educazione* (Venezia, 1844), ripone il concetto dell'*educazione civile* nell'abituare la gioventù agli esercizi troppo ancora disusati, scrive, di destrezza e di forza, i quali la rendano paziente del continuo regolare lavoro e le facciano meno pauroso il pericolo coll'apprestarle gli espedienti dell'evitarlo e del vincerlo, nell'opera inscritta: *Dell'educazione, desiderii e saggi pratici* (Torino, Paravia, 1856), dedica un intero capitolo all'*Educazione ginnastica*. Quivi, pure avvisando, che prima d'ampliarne i confini, conviene combattere gli usi, i quali in luogo di aggiungere alle membra vigore e destrezza, la scemano, afferma che la più sicura e dolce di tutte le medicine consiste negli esercizi fisici da cui, colla forza, proviene la mondezza, la quale dal corpo passa allo spirito serenando la vita. Però vuole che il fine della ginnastica s'intrecci con altri più nobili, variandola a norma delle condizioni sociali. Così gli esercizi dell'agiato dovrebbero versare segnatamente sopra un'arte proficua e praticabile in ogni parte del mondo, della quale potrà forse un giorno sentire necessità, mentre quelli del povero dovrebbero riguardare arti dilettevoli e liberali. In questo modo insinuerebbesi nei primi l'amore e la stima del lavoro manuale e si appagherebbe negli altri il senso del bello (1). Nè solo consiglia di congiungere le esercitazioni della mente e del cuore con quelle corporee, ma di unire ancora varii esercizi fisici, e pensa si debbano prendere i fanciulli, quando le membra sono più docili e la natura comanda di esercitarsi, quanto più si possa, le facoltà del corpo, addestrandolo a tutti i movimenti che li rendano un giorno non solo soldati valenti, ma bravi artigiani, viaggiatori idonei, uomini potenti a superare il pericolo ed a trarre vantaggio dal male stesso.

Dal Tommaseo non vuolsi dissociare R. Lambruschini (1788-1873), il quale benchè non abbia discorso di proposito il nostro argomento, trattando con singolare competenza de' castighi, con-

(1) Il Parravicini seguendo la massima, che l'istruzione deve essere preparazione alla vita civile, voleva che i fanciulli nella scuola imparassero qualche mestiere; ciò che serve ad innamorare i figli del popolo delle arti meccaniche, le quali devono essere più tardi gli uffici ed il pane della loro vita.

siglia di abolire tutti quelli che in qualche modo possono nuocere alla salute degli alunni. Il medesimo poi favorendo già, fino dal 1837 (*Guida dell'educatore*, parte II, pag. 117), l'introduzione del lavoro manuale come un sussidio all'educazione morale, avvertiva che lo stesso conferisce all'acume de' sensi e quindi all'intelligenza.

Ultimo nella serie dei pedagogisti italiani, di cui mi sono proposto di fare cenno, ci si presenta G. A. Rayneri (1810-1867), al quale senza manifesta ingiustizia non si può niegare il vanto di avere tra noi dato forma rigorosa di scienza alla Pedagogia. Egli trattiensi diffusamente sulle cure igieniche da apprestarsi ai bambini e su quelle da praticarsi più particolarmente dalle donne " .....cui desta il subito Balzar del pondo ascoso ", come scrive il Manzoni, ed espone i più importanti principii riguardanti il regime dietetico dei fanciulli; fa precetto all' educatore di studiare la scienza fisiologica (1), e distinguendo una ginnastica *naturale* da quella *artificiale,* avverte come tanto l'una quanto l'altra abbiano quattro fini comuni: crescere le forze fisiche, addestrare le membra, perfezionare i sensi ed agevolare il dominio di noi stessi. Sicchè egli riguarda l'esercizio corporeo quale mezzo indiretto di educazione intellettuale e morale. Finalmente, avvisa il Rayneri che il lavoro moderato del pensiero giova alla salute, mentre una soverchia contenzione di mente rende torpidi i muscoli volontarii e rallenta le funzioni nutritive.

Taluno lo incolpa d'avere rimandato alla fine dell'opera, il discorso sull'educazione fisica, la quale dovrebbe precedere l'intellettuale e la morale. Ma egli pure riconoscendo che la sanità, a cui le cure fisiche mirano, è la condizione senza di cui riesce vana e priva di fondamento ogni coltura dello spirito, quasi avesse preveduta l'obbiezione, dichiara di non avere preposta questa parte dell'educazione umana alle altre, per essere la medesima più opera della famiglia che degli istitutori, a cui il suo lavoro è indirizzato. Ad ogni modo questo appunto bisognerebbe a più forte ragione rivolgerlo allo Spencer, il quale solennemente sostiene, che a riuscire nella vita occorre prima essere *un buon animale*, giacchè la *buona animalità* non si ottiene che coll'educazione fisica.

(1) Anche il già citato Parravicini consigliava agli educatori di procacciarsi una chiara idea del corpo umano e delle sue principali funzioni.

CONCLUSIONE

Qui faccio punto: il discorso protrarrebbesi di troppo, qualora volessi ricordare tutti coloro che scrivendo d'educazione, sull'esempio de' pedagogisti menzionati, assegnarono alla coltura delle potenze fisiche il posto conveniente (1). Tra questi dovrei in modo peculiare esporre il pensiero di G. Allievo, che in non pochi lavori e specialmente negli *Studi pedagogici* (Torino, 1892), discorre di proposito e molto diffusamente siffatto argomento; pago di avvertire come, da 25 anni, non cessi egli di alzare la voce contro il sovraccarico intellettuale. " Insieme colla vita intellettiva anche la vita fisica e la operativa patiscono naufragio (scriveva in *La riforma dell'educazione moderna mediante la riforma dello Stato*, 1879, p. 12) nell'attuale ordinamento dei nostri studi... il cervello giovanile... viene posto a sì terribile pressura da rimanerne scosso e svigorito il sistema nervoso „. Nè dovrei dimenticare i fisiologi, che consacrano le loro cure a riformare l'educazione fisica, come l' illustre prof. A. Mosso, nè i cultori dell'arte ginnastica, quali ad esempio, E. Baumann e F. Valletti (2), discepolo di quel R. Obermann, che col farsi maestro de' bimbi raccolti negli asili, diede chiaramente a vedere, ove ciò non fosse confermato dagli scritti (3), ch'ei vagheggiava una ginnastica scolastica, come sussidio all' educazione intellettuale e morale: ma de' viventi è mio proposito tacere.

---

(1) Gli è perciò, che non possiamo approvare la sentenza di Ausonio Franchi, il quale, nel suo corso di *Lezioni di Pedagogia* (Siena, 1898), asserisce che " l'educazione fisica non è veramente una parte della pedagogia „. Se la pedagogia mira alla maggiore perfezione possibile dell'uomo, come scrive il Rosmini (*Scritti varii di Metodo e di Pedagogia*, Torino, 1883, *lettera*, n° 25), mediante lo svolgimento bene ordinato e la coltura armonica di tutte le sue facoltà, non è lecito all'educatore omettere l'educazione fisica.

(2) Del V. gioverebbe rilevare l'opera intelligente ed indefessa al Ministero della P. I., ove diede un grande e razionale impulso all'ordinamento delle ginniche discipline.

(3) Veggansi dell'Obermann gli articoli pubblicati da G. Botta nella *Antologia ginnastica*, ecc., Torino, G. Candeletti, 1871, e l'opuscolo postumo: *Cenni sullo sviluppo dell'istruzione ginnastica nella città di Torino dal principio dell'anno 1833 al 1865*, Torino, tip. Candeletti, 1870.

Tuttavia non tornerà inutile avvertire che male si appongono coloro i quali tutta l'educazione fisica fanno consistere o nella sola igiene o nella sola ginnastica: imperocchè essa vuolsi riporre nell'una e nell'altra non disgiunte dalla coltura de' sensi. Coltura che è l'anello di congiunzione tra l'educazione corporea e quella spirituale, dappoichè i sensi ci si presentano come gli organi dell'intelligenza e dell'attività volontaria. Così mentre sono nel vero i fisiologi quando richiedono che la ginnastica non prescriva alcun esercizio, di cui non siasi mostrata l'utilità fisiologica, errano a mio credere, quando dichiarano di loro esclusiva spettanza l'educazione fisica.

Certo il pedagogista attinge dalla fisiologia, dall'anatomia e da altre discipline, i risultati più sicuri ed incontrastati, valendosene nello studio dell'educazione fisica, cui peraltro connette colla spirituale, da cui è inseparabile, come il corpo dallo spirito, giacchè l'una deve armonizzare coll'altra. Il che non mostrano di fare sempre i cultori della fisiologia, a cui dovrebbe essere presente, che l'educazione umana è una nella sua essenza, e che le parti, onde si compone, vanno tra loro così concertate, da costituire un tutto armonico. Se voi stralciate dalla coltura umana la parte che concerne le potenze animali, per farne una disciplina a sè, altri potrebbe fare altrettanto delle altre parti; e così verrà a scindersi l'unità della scienza pedagogica, e l'educazione fisica e l'educazione spirituale tenteranno di soverchiarsi a vicenda.

Gli scrittori superiormente ricordati, convengono pertanto nell'ammettere, che quantunque distinte per natura e per indole, l'educazione corporea e la mentale denno procedere concordi, non potendosi l'una dall'altra disgiungere: riconoscono la reciproca influenza dello spirito e dell'organismo e la necessità d'iniziare l'educazione dalla nascita, e taluni dal periodo che precede la natività medesima: l'opportunità d'indurire i bambini per gradi al freddo, al caldo, alle intemperie, alle fatiche, alle privazioni, al dolore. Che se alcuni imitando Rousseau, il quale alla sua volta seguiva G. Locke (1), pretendono erroneamente che l'uso de' bagni freddi valga a rinforzare il tenero or-

(1) Cfr. il mio opuscolo: *Le dottrine pedagogiche di G. Locke*, Torino, Paravia, 1893.

ganismo de' bambini appena nati, non manca però chi mette in guardia contro questa pratica funesta. " L'uomo nella prima età, scriveva il Parravicini, abbisogna di calore, essendo che nel grembo materno godeva d'una temperatura non inferiore ai 36 gradi ". Concordano inoltre nel riguardare quali mezzi della coltura organica, l'igiene, la ginnastica e l'esercizio dei sensi fisici. Così anteponendo all'artificiale la ginnastica naturale, da praticarsi all'aperto, in luoghi ombreggiati dagli alberi, vogliono non solo che quella non si discosti da questa, ma che s'informi ognora alla medesima. Perciò li vediamo vivamente raccomandare i giuochi, i quali, siccome quelli che lasciano agli alunni maggiore libertà d'azione, sono più conformi a natura degli esercizi voluti e precisati dal maestro. L'arte non deve mai sopraffare la natura in cui ha il suo fondamento. Tra gli esercizi più comunemente raccomandati sono le *passeggiate*, le quali ricreano l'organismo e la mente nell'atto stesso che conferiscono alla coltura de' sensi: la *corsa* e le *marce*, che i fisiologi riconoscono quali mezzi efficacissimi per lo sviluppo de' muscoli delle gambe non solo, ma anche per l'aumento dell'attività polmonare e cardiaca: il pattinare sul ghiaccio, così vivamente raccomandato dal Tommaseo: il *salto*, il *nuoto*, l'*equitazione*, il giuoco della *palla* e del *pallone*, ecc. Oggidì si conviene dai più doversi curare l'introduzione del lavoro manuale nella scuola, anche come sussidio all'educazione fisica, servendo esso allo sviluppo del corpo ed al perfezionamento del sentire: e di tale avviso si mostrano per l'appunto alcuni degli scrittori da noi menzionati. Nè manca tra di loro chi riprova il peso opprimente dell'istruzione e gli intemperanti programmi che riescono esiziali alla salute fisica ed al naturale sviluppo dell'intelligenza.

Da qualcuno si accusa la grande scuola pedagogica nazionale di avere trascurato l'educazione fisica. Se l'accusa sia fondata, lo giudichi il cortese lettore. Per parte mia aggiungerò un'osservazione: ed è che se tra noi non difettano pedagogisti, i quali si dimenticarono affatto dell'educazione fisica, questi vanno ricercati piuttosto in mezzo agli evoluzionisti, che ad essere logici, dovrebbero collocarla nel primo luogo. Citiamo il Siciliani e l'Angiulli.

Che se gli scrittori ricordati più sopra ben poco ottennero in vantaggio della coltura organica per le condizioni politiche

e sociali del tempo in cui vissero, meritano tuttavia lode incondizionata per avere richiamato l'attenzione delle famiglie, degli istitutori e delle autorità sul bisogno della medesima.

Ma dirà taluno: i pedagogisti de' quali tu facesti menzione, su per giù ripetono gli stessi precetti e raccomandano i medesimi esercizi. Ma, per non ridire qui quanto scrive G. P. Richter nella prefazione alla *Levana*, essere cioè cosa buona che in libri nuovi diasi luogo a pensieri vecchi, anche perchè i libri antichi, dato che si trovino, più non si leggono, dimando alla mia volta: Forse che i più ardenti fautori dell'educazione fisica de' giorni nostri, aggiungono cose nuove a quelle ripetute dagli scrittori ricordati? Ecco: io tengo sott'occhio la relazione ufficiale, pubblicata dalla *Commissione per la riforma dell'educazione fisica* (18 novembre 1893), e trovo, che vi si propone di lasciare larga parte a' giuochi ginnici, e di conservare della ginnastica, fin qui praticata, quel che v'ha di meglio, come gli esercizi di locomozione, e più specialmente la *corsa*, la *marcia*, le *passeggiate*, il *salto* nelle sue varie forme, l'*arrampicarsi*, ecc. Che se fa cenno degli esercizi di sospensione, d'appoggio e di equilibrio, giustamente raccomanda, che i medesimi abbiano luogo ne' modi più semplici e naturali. Nè basta. L'autorevole Commissione, alla quale non apparteneva alcun pedagogista, contemplava ancora quali mezzi di educazione fisica, il *bagno*, il *nuoto*, nonchè il *canto* ed il lavoro manuale. Or bene se i pedagogisti di tutti i tempi hanno riguardato il *canto*, come mezzo acconcio alla coltura del sentimento morale ed estetico, non sono mancati di quelli i quali lo ritennero quale esercizio utilissimo non solo alla salute ma ancora all'udito ed alla voce (1).

La sullodata Commissione conveniva coi pedagogisti italiani ed in peculiare modo con quelli del secolo XIX, nell'avvertire che i mali della vita sedentaria peggiorano somministrando il

(1) Veggasi Rayneri, *Della pedagogica*, libro III, c. 1, art. 4, § 2. Del resto è noto come Plutarco negli *Avvertimenti di Sanità*, che il Centofanti (*Saggio sulla vita e sulle opere di Plutarco*) chiama " antico manuale o saggio " d'igiene domestica ", consigliasse, non solo ai giovanetti ma pure agli uomini maturi, di rendersi famigliare la declamazione delle private letture, parendogli che oltre alla chiarezza ed alla forza della voce, dovesse anche derivarne salute e vigorìa di petto.

movimento a rare ma alte dosi, e che perciò gli esercizi vogliono essere frequenti ma moderati.

Per questi motivi siamo ben lieti che i precetti degli scrittori italiani, da noi studiati con affetto non comune, intorno alla coltura fisica siano da parecchi valentuomini trovati conformi agli ultimi risultati della scienza, e siamo convinti che nessuno di costoro vorrebbe dare lo sfratto alla Pedagogia, la quale in mente de' suoi cultori intende all'armonica coltura di tutte le potenze umane, fisiche e spirituali.

Di un economista piemontese del secolo XVIII (Donaudi delle Mallere).

A proposito di alcuni suoi manoscritti inediti.

Nota del Prof. PASQUALE JANNACCONE.

I. — Letteratura cameralistica in Piemonte sulla fine del sec. XVIII.

Mentre il Napoletano, la Toscana, la Lombardia e l'Emilia davano, nella seconda metà del secolo XVIII, copioso contributo d'opere e d'ingegni alla nascente scienza economica, il Piemonte non aveva quasi alcun nome da porre accanto a quelli di Genovesi, Beccaria, Verri, Ortes, Filangieri e tanti altri.

Tralasciando il Botero, assai più antico, la storia dell'economia politica non ricorda in questo scorcio di secolo nessun altro piemontese fuori di Giambattista Vasco (1733-96), il quale, se non scrisse alcun trattato sistematico d'economia, pure, per la varietà delle questioni discusse e per la originalità di alcune idee, poco conformi allo spirito dei tempi e alla comune opinione corrente nella sua patria, merita d'essere onorevolmente annoverato fra i più acuti scrittori italiani di materie economiche d'allora.

Fra i trentadue scrittori, le cui opere o monografie furono pubblicate dal Custodi, e di cui il Pecchio, nel 1829, espose brevemente la vita e le idee, appartengono al Piemonte soltanto il Vasco ed il Solera, ideatore, questi, nel 1784 di un immaginoso piano di emissione di biglietti di credito garentiti sul valor delle terre.

E in verità, la letteratura economica del Piemonte in quell'epoca è oltremodo scarsa. Non solo non vi si trovano opere sistematiche, nè precorritrici di quelle che in Francia e in Inghilterra andavano costituendo la nuova scienza, nè ispirate a queste e dominate da qualcuno dei sistemi che allora tenevano il campo, — ma neppure gli argomenti speciali più vivamente disputati in quel tempo, come il libero commercio dei grani o il mantenimento delle corporazioni d'arti e mestieri, vi sono trattati con l'abbondanza, l'interessamento e il calore che trovarono in altre parti d'Italia.

Soltanto le questioni concernenti l'industria della seta, la principal fonte di ricchezza dello Stato, attrassero maggiormente l'attenzione degli studiosi; e la disputa, se dovesse permettersi la libera estrazione delle sete greggie e dei bozzoli, che in Piemonte durò vivissima sin quasi alla metà del secolo XIX (1), già

(1) Il periodo di maggior fervore fu dal 1832 al 1834. Il movimento in favore dell'abolizione del regime vincolista per le sete greggie e i bozzoli, cui già accennano le memorie del 1788, cominciò a ridestarsi nel 1820 con la pubblicazione del primo volume della *Raccolta di opere di economia politica di Autori piemontesi*, tutto dedicato a tal questione (vedi la nota 3ª a pag. seg.), e fu ripreso nel 1829 col *Discorso sopra l'industria delle sete nei Regii Stati* del Lencisa, Intendente della provincia di Novi; discorso benevolmente accolto dalla Accademia delle Scienze nelle sue *Memorie*, su proposta di una commissione della quale faceva parte appunto uno degli autori delle memorie del 1788, il Galeani Napione („ Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, t. XXXIV, pp. I-XII e 99-150).

Nel 1832-33, nella temuta imminenza di un provvedimento legislativo in senso liberista, un anonimo *Ragionamento sull'esportazione della seta greggia dal Piemonte* (Torino, 1832) e l'opera del Martinengo, *Del sistema proibitivo dell'estrazione delle sete greggie dallo Stato* (Torino, Stamperia Reale, MDCCCXXXIII) sorsero a combattere le argomentazioni che a favore della libera estrazione avevano portate il Lencisa, il Napione, il Vasco, e l'Autore delle *Osservazioni sulla proibita estrazione della seta greggia dal Piemonte* (vedi nota 3ª a pag. seg.) pubblicate senza nome nella *Raccolta di opere di economia politica di Autori piemontesi* e pur anonimamente ristampate dal Pomba nel 1833.

Le ragioni dei vincolisti, sostenute ancora dal Martinengo, *Lettera economica sulle cause che resistono all'incremento della produzione serica in Piemonte* (Torino, Stamperia Reale, 1834) e dal Salvarezza, *L'industria e il commercio delle sete in Piemonte* (Torino, Pomba, 1833) e *Schiarimenti sulla questione serica che riguarda la famiglia piemontese* (Torino, Pomba, 1834, in risposta al Giovanetti), furono valorosamente ribattute dalle *Osservazioni sul Ragionamento sull'esportazione della seta greggia dal Piemonte*, dalla bella

in quegli anni cominciava ad essere agitata. Nel 1788, avendo l'Accademia delle Scienze di Torino messo a concorso il quesito: *Quels sont les moyens de pourvoir à la subsistance des mouliniers dans le temps que cette classe d'hommes si précieux au Piémont se trouve réduite aux horreurs de l'indigence par le manque de soie?* tre fra le memorie presentate, delle quali una del conte Galeani Napione (1) ed una dell'abate Vasco (2), sostenevano appunto che nell'interesse del paese e delle persone occupate nell'industria e nel commercio delle sete, dovessero togliersi i vincoli alla libera estrazione della materia greggia. Ma l'Accademia, pur riconoscendo i pregi di quegli scritti, dichiarò non reputar conveniente di premiare dissertazioni direttamente contrarie agli usi vigenti sull'esportazione dei bozzoli e delle sete (3).

---

memoria del Giovanetti, *Della libera estrazione della seta greggia dal Piemonte* (Torino, Fodratti, 1834) e dal Sacchi, *Sulla discussione promossa in Piemonte per la libera estrazione della seta greggia, con osservazioni di G. D. Romagnosi* (Milano, Lampato; e Torino, Pomba, 1834).

(1) *Discorso intorno al quesito proposto dalla Reale Accademia delle Scienze*, ecc. (Torino, Stamperia Reale, MDCCLXXXIX, senza nome d'autore e pur senza nome ristampato nella *Raccolta di opere di economia politica di Autori piemontesi*).

(2) *Risposta al quesito proposto dalla Reale Accademia delle Scienze*, ecc. (Torino, Stamperia Reale).

(3) " Mém. de l'Acad. „ etc., vol. IV, p. xli. Le memorie del Napione e del Vasco e quelle del Marchese Incisa della Rocchetta, anch'essa presentata nella stessa occasione all'Accademia e favorevolmente giudicata, insieme con le già citate *Osservazioni sulla proibita estrazione della seta greggia dal Piemonte*, furon poi ristampate nel Tomo I, fasc. 1°, della *Raccolta di opere d'economia politica di Autori piemontesi*, cominciatasi a pubblicare a Torino, sotto gli auspicii del Conte Balbo, nel 1820 coi tipi di Domenico Pane. L'intento di questa *Raccolta* di completare e continuare, pel Piemonte, quella del Custodi e il suo spirito liberale l'avrebbero resa una pubblicazione preziosa, ma pur troppo essa non ebbe seguito oltre il primo fascicolo, forse per gli avvenimenti dell'anno successivo.

Le *Osservazioni sulla proibita estrazione* ecc., comprese in quel primo volume, sono dal Giovanetti (op. cit., p. 15) attribuite con molta lode a Francesco Gambini, notando che " quell'egregio autore non si nominò nella stampa, ma il pubblico riconobbe di leggieri la modesta penna e non s'ingannò „. E il nome del Gambini ritorna infatti così nella memoria del Sacchi (p. 11) come negli *Schiarimenti sulla questione serica* del Salvarezza (pag. 4).

Il Manno e il Promis, invece, nelle addizioni e variazioni al I volume della loro *Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia* (Torino,

La *Biblioteca oltremontana e piemontese* (1), fondata nel 1787 con lo scopo di diffondere la conoscenza delle opere più importanti pubblicate all'estero e in Piemonte, nei sei anni di sua vita, non registra nella rubrica dei libri stampati in Piemonte quasi nessuno scritto d'argomento economico, fuori delle monografie sulle sete cui ora s'è accennato e di qualche altra riguardante l'agricoltura. Il che nei primi volumi di quella Rivista, quand'essa aveva l'operosa collaborazione del Vasco, fa vivo contrasto con la ricchezza delle informazioni su opere economiche forestiere, che vi erano diligentemente sunteggiate e criticate.

Nè pare, infine, che il movimento d'idee intorno a questioni economiche teoriche e pratiche dalle altri parti d'Italia si propagasse facilmente in Piemonte, e che le nuove vedute vi fossero prontamente accolte, poichè manca nella pur scarsa letteratura del tempo qualsiasi traccia di quelle molteplici influenze, e di quella lotta d'opinioni e di quei varii commenti che le opere e le idee nuove sogliono suscitare in tempi e luoghi aperti e disposti a riceverle. Le *Meditazioni sull'Economia pubblica* (1771) del Verri, che fra i primi trattati italiani di questa scienza occupano uno dei posti più eminenti per novità e per vigore d'idee, non ebbero in Piemonte nè seguaci nè fortuna, ma, al loro primo apparire, il rude assalto di uno che dicea di parlare a nome di una " società di galantuomini „ (2); e per assai gran

Bocca, 1884) pongono quelle *Osservazioni* sotto il nome del Segretario di Stato Rosasco. Ma le fanno credere del Gambini e il comune consenso dei contemporanei e la franchezza dello stile e le idee di libertà economica che animano quelle *Osservazioni* come l'altra sua bella opera *Delle leggi frumentarie in Italia*, pubblicata anch'essa senza nome in Torino nel 1819.

(1) *Biblioteca Oltremontana ad uso d'Italia, colla notizia dei libri stampati in Piemonte* (Torino, Stamperia Reale).

(2) Cfr. *Esame dell'opera intitolata " Meditazioni sull'Economia pubblica „* (Vercelli, 1771). È detto nell'introduzione: " Il desiderio del pubblico bene, " ed il soggetto di cui si tratta, e che tanto interessa la pubblica causa, " ha mosso una piccola società di galantuomini impegnati a promuovere, " per quanto sia fattibile, le viste dei Governi presenti dirette a sollevare " i popoli, e render migliore la loro costituzione, a prendere in esame " un'opera sortita di fresco alla luce col titolo di *Meditazioni sulla Economia* " *pubblica* „, ecc..... " Risultati però dall'esame intrapreso gli enormi ab- " bagli, nei quali è incorso l'Autore di tali *Meditazioni*, la fallacia dei suoi " principii e delle sue massime, e l'insufficienza dei suoi progetti, si sono " creduti in dovere di similmente dare alla pubblica notizia le riflessioni,

tempo l'eccletismo a base mercantilistica di Melon e di Genovesi, segnò il punto più avanzato cui parea che la dottrina economica potesse arrivare (1).

***

Della cultura economica in Piemonte in quello scorcio di secolo e della penetrazione in esso delle idee novatrici non bisogna però giudicare sul solo fondamento delle opere a stampa. Se gli studi economici non v'ebbero il rigoglio che in altre regioni italiane, se la censura vi era particolarmente avversa alla pubblicazione di scritti che proponessero mutamenti nel reggimento e nella politica dello Stato e suscitassero nei sudditi desiderii di novità, è notevole, d'altra parte, che l'amministrazione finanziaria dello Stato era sapientemente congegnata, buone le condizioni della pubblica ricchezza ed incessante la cura dei sovrani e dei loro consiglieri ad emanare e suggerire provvedimenti di carattere economico. Il che vuol dire che, come in quasi tutt' i rami della pubblica amministrazione, anche per la parte economica e finanziaria, il Piemonte aveva uomini di singolare valor pratico, la cui azione intellettuale non usciva d'ordinario fuori dell'àmbito degli ufficii pubblici cui erano addetti, ma, educandosi e svolgendosi là dentro, vi acquistava una non comune precisione e finezza di vedute (2).

Ma questi uomini, dalla cui schiera uscirono di tratto in tratto personalità davvero eminenti, anche a considerarle sol-

---

" che sono loro occorse nel scrutinio di detta opera, acciò il pubblico resti " disingannato, e insieme istrutto del vero valore non solo di questo, ma " d'una gran parte degli altri libri moderni, e di quanto pesino i soggetti, " che li compongono, lo studio dei quali è unicamente diretto ad abbattere " il Vero e la Ragione colla vernice di uno stile nuovo e seducente, e in " tal forma attirarsi degli ammiratori, e dei seguaci alle loro novità, ed ai " loro mal fondati Progetti „ ecc.

(1) Cfr. *Il plagio confessato:* Elementi di Economia politica, estratti dalle lezioni dell'Ab. Genovesi ad opera d'un antico impiegato piemontese (Torino, 1802).

(2) Questo apparente contrasto fra la scarsezza degli studii economici e la buona costituzione economico-finanziaria dello Stato piemontese si ripete pure fra tutti gli altri rami del diritto pubblico e i corrispondenti rami dell'Amministrazione dello Stato: cfr. Brondi, *Gl'inizi dell'insegnamento di Diritto Amministrativo in Piemonte* nel volume per le onoranze al professore Francesco Pepere (Napoli, 1901).

tanto nei riguardi dell'economia e della finanza, non avrebbero certamente potuto elevarsi e mantenersi al disopra del livello comune degl'impiegati dello Stato se non si fossero nudriti di una coltura superiore all'ordinaria, e se di queste loro speciali conoscenze ed attitudini non avessero date bastevoli prove. E queste prove, nel ramo almeno dell'amministrazione economica e finanziaria, consistevano sopratutto in rapporti e relazioni, progetti di riforme, esposizioni di pareri, indagini statistiche, critiche di ordinamenti vigenti, non però diffuse, col mezzo della stampa, nel pubblico; ma, anche quando non avevano carattere d'ufficio, presentate al sovrano o ai capi supremi dei corpi amministrativi. V'è quindi nelle biblioteche e negli archivi del Piemonte una larga raccolta di scritti inediti, i quali sono ad un tempo documenti delle condizioni economiche e finanziarie del paese, e del movimento del pensiero e della cultura economica.

Fra le opere di Gianfrancesco Napione, enumerate dal Martini nella vita di questo fecondissimo e versatile scrittore e uomo di Stato (1), appaiono inediti circa una cinquantina di scritti attinenti alle più varie questioni dell'economia e della finanza: da dissertazioni sui principii fondamentali della pubblica economia (1773) e della scienza di finanze (1798) a memorie sulla mercede e le condizioni dei contadini (1778 e 1796), sulla gabella del sale (1785) e sui prestiti forzati (1795); da riflessioni sullo stato delle finanze in Piemonte (1796 e 1797), sui sistemi di riscossione dei tributi (1789) e di amministrazione delle finanze (1815, 1816 e 1821), sui biglietti di credito e sulle monete (1793, 1796, 1797, 1799, 1800, 1814, 1816, 1826), sull'annona (1797) ecc., sino alle *Note* sulla *Ricchezza delle nazioni,* di Ad. Smith (1826).

Ed alcuni di questi scritti si riannodano a loro volta ad altre opere inedite di altri funzionarii piemontesi, come la memoria *Sui principii fondamentali della scienza delle finanze* al *Pensamento politico-economico sopra il commercio e le finanze* (1749) del conte di Salmour, già presidente del Consiglio di Commercio, e alle annotazioni che a questa scrittura appose il cav. Damiano di Priocca, ministro di Carlo Emanuele IV (2). E così pure alcuni

(1) *Vita del Conte Gian-Francesco Napione* per Lorenzo Martini (Torino, presso Giuseppe Bocca, MDCCCXXXVI).

(2) Cfr. Martini, op. cit., pp. 133-34 e Ricca Salerno, *Storia delle dottrine finanziarie in Italia* (Palermo, Reber, p. 343).

degli altri molti manoscritti di simil natura, esistenti nelle biblioteche e negli archivii, come, fra i tanti, il *Trattato politico ed economico delle Finanze* (1759) del conte Maistre di Castelgrana (1) e il trattato sui *Tributi negli Stati di S. M.* (1818) del Petitti di Roreto (2), contengono frequenti riferimenti e richiami ad altri volumi di questa letteratura cameralistica e burocratica piemontese. Oltre al già citato *Pensamento politico ed economico* del conte di Salmour, il Petitti ricorda, ad esempio, con lode, fra altri scritti minori o di carattere più strettamente tecnico ed ufficiale, le *Pensées diverses sur les moyens de rendre le commerce florissant en Piémont et d'acquitter les dettes du Roi en les rendant en attendant utiles à l'Etat* (1751) del conte Perrone, ambasciatore di Carlo Emanuele III a Londra, ed una memoria del conte San Martino della Motta al Consigliere di Stato francese Degerando, sulla *Celebrità dell'antico sistema di finanze piemontese,* opere manoscritte esistenti, a detta del Petitti, l'una negli Archivi di Corte, l'altra nella biblioteca del conte Caissotti di Chiusano.

Onde appare davvero strano che, fra gli antichi Stati italiani, il Piemonte sia quello la cui storia economica e finanziaria, nel campo dei fatti e nel campo delle idee, è meno nota e studiata, mentre questa ricchezza di documenti d'archivio, l'interesse che offrono alcuni suoi antichi istituti amministrativo-finanziarii giunti insino a noi, la continuità del regime, e infine l'ordinatissima raccolta delle leggi e degli editti, nella quale non meno di dodici volumi si riferiscono a materie economiche, avrebbero dovuto eccitare ed agevolare ogni sorta di ricerche, e tentare più d'uno studioso ad una descrizione della vita economica del Piemonte in correlazione alle sue varie e fortunose vicende politiche.

II. — I manoscritti del conte Donaudi delle Mallere.

Il nome del conte Donaudi delle Mallere è appena noto nella storia delle scienze economiche in Italia per un *Saggio di Economia civile* (3), compreso dal Cossa nella sua *Bibliografia dei*

(1) Ms. n. 484 della Biblioteca del Re in Torino.

(2) Ms. della Biblioteca Nazionale in Torino (P. I, 15).

(3) *Saggio di economia civile* del Conte Donaudi delle Mallere, Torino presso gli eredi Avondo). È senza data. Il Cossa gli attribuisce quella del

trattati e compendii d'Economia politica scritti da Italiani (1), ma nemmen ricordato da lui, classificatore pazientissimo d'uomini e d'opere, nella parte storica dell'*Introduzione allo Studio dell'Economia politica* (2). Eppure, il *Saggio* del Donaudi, essendo stato pubblicato nel 1776, a poca distanza dei trattati di Genovesi (1765), Beccaria (1769), Verri (1771) e Ortes (1774), sta con questi fra i più antichi trattati d'economia italiani del periodo presmithiano; ed essendo l'unica opera sistematica d'economia

---

1776; e giustamente, sia perchè a p. 41 è detto " recentemente emanato " un editto del 24 settembre 1776, sia perchè io stesso ho potuto leggere nell'Archivio di Stato una lettera, in data 18 gennaio 1776, nella quale il Conte Morelli dice esser " stato richiesto della permissione della stampa " d'un manoscritto che ha per titolo " Saggio di Economia civile del " Conte Donaudi delle Mallere „. E prosegue: " Le differenti materie che " ivi si trattano hanno per oggetto il pubblico bene delle Nazioni e sono " trattate con quella precisione che è propria d'un' opera che ne pro- " mette altra più estesa, con relazione in gran parte alle Regie Costitu- " zioni ecc..... e non si può negare che vi siano forse anche novi pensa- " menti dell'Autore, e che sia molto lodevole questo studio che tende a " giovare al pubblico, di maniera tale che meritino piuttosto d'essere ani- " mati coloro che seriamente si applicano per il bene pubblico.

" Siccome però le stesse materie del pari interessano i diritti dei So- " vrani, come sono le gabelle, le finanze, la monetazione e simili, e potreb- " bero i sentimenti dell'Autore talvolta opporsi alle massime del Governo " ed alle leggi che attualmente esistono, non ho creduto essere in grado a " poter permettere la stampa senza un ordine preciso di S. M., quand'anche " si volessero considerare in figura di semplici progetti, massimamente che " venendo approvati dal Revisore potrebbero credersi approvati dal Governo " e rendere talvolta gelose le vicine potenze.

" Che però mi credo in dovere di far pervenire alle mani di V. E. lo " stesso manoscritto, e pregarla d'umiliare questi miei deboli riflessi ai " piedi della M. S. per averne le reali sue determinazioni „.

(1) Nel *Giornale degli Economisti*, settembre 1891. Nelle *Nuove aggiunte alla bibliografia dei trattati e compendii di Economia politica* (ibid., marzo 1893), il Cossa cita anche una ristampa (Palermo, 1787) del *Saggio* del Donaudi. Non ho però potuto rinvenire questa ristampa palermitana in varie Biblioteche, cui l'ho chiesta; nè essa esiste nella ricca Biblioteca privata, lasciata dal Cossa, come gentilmente m'informa il Prof. Emilio Cossa, suo figliuolo.

(2) Milano, Hoepli. Ricordano però il *Saggio* il Ricca Salerno nella sua *Storia delle dottrine finanziarie in Italia* (Palermo, Reber, 1896, pp. 337-39) e il Gobbi, *La concorrenza estera e gli antichi economisti italiani* (Milano, Hoepli, 1884, pp. 155-57).

pubblicatasi in Piemonte a quel tempo, meriterebbe un men fuggevole ricordo, se non pei suoi meriti intrinseci, almeno per questo suo valor di rarità in rispetto al tempo e al luogo in cui apparve.

L'importanza scientifica di questo *Saggio* non è certo grande, non essendo esso, in fondo, che un compendio dei principii del mercantilismo, con speciali riferimenti alle condizioni e alle leggi del Piemonte, e con qualche sagace riflessione, ma senza che neppur vi baleni qua e là qualcuna di quelle vedute teoriche, per le quali altri economisti italiani dello stesso tempo acquistarono giusta fama di precursori, se non di fondatori, della scienza economica.

Lo scrittore piemontese non va però giudicato unicamente sul fondamento del *Saggio* dato alle stampe. Anch'egli appartenne a quella schiera di funzionarii, nei quali lo studio delle dottrine scientifiche si temperava all'esercizio dei pubblici ufficii, e questo si affinava per opera di quello; e anch'egli ha lasciati scritti inediti, completamente ignoti agli studiosi della storia delle dottrine economiche, i quali sono un necessario complemento al *Saggio* stampato, e sono in generale a questo superiori per una maggior larghezza di vedute e per qualche idea originale o qualche buona critica d'opinioni correnti.

I manoscritti del Donaudi che ho trovati e riscontrati sono i seguenti:

Mss. nella Biblioteca Nazionale di Torino.

A) Saggio d'Economia politica e pratica delle arti fondamentali (non numerato) [pp. 67]

B) Saggio d'Economia politica e pratica sovra lo stato presente delle Finanze e Commerzio del Re di Sardegna pp. 274

C) Saggi sovra il commerzio del Paese relativamente agli editti emanati dall' (*sic*) 1680 a questa parte pp. 67

D) Saggi sovra il commerzio del Paese relativamente agli editti emanati dall' (*sic*) 1680 a questa parte (duplicato del precedente) pp. 67

E) Considerazioni sovra le Finanze e il Commercio in generale con due trattati, l'uno delle sete, e l'altro dei grani pp. 94

F) Riflessioni teoriche e pratiche sovra l'Amministrazione delle Finanze con alcune osservazioni particolari riguardanti le Finanze e il Commerzio negli Stati di S. M. pp. 421

G) Relazioni e pareri su alcuni affari che si sono trattati nelle adunanze del Consiglio di Commercio pp. 157

Mss. nella Biblioteca Civica di Torino.

H) Riflessioni sopra varii rapporti delle Finanze col Commercio con alcune osservazioni riguardanti le Finanze e il Commercio negli Stati di S. M. (duplicato del Ms. *F*, salvo le differenze di cui in appresso) pp. 314

I) Abbozzo ragionato d'un Catastro politico, parte 1ª pp. 147

L) Abbozzo d'un piano in cui si disaminano alcuni mezzi per istabilire un fisso e regolare commercio tra la Sardegna e gli altri Stati di terraferma di S. M. e si prendono a un tempo stesso in considerazione quei rami di traffico che sembrano i più conducenti ad ottenere un sì rilevante oggetto pp. 176

Mss. nella Biblioteca del Re in Torino.

M) Abbozzo ragionato d'un cadastro politico, parte 1ª (duplicato del Ms. *I*) pp. 180

N) Altro duplicato dei Mss. *I* ed *M* pp. 171

O) Abbozzo d'un piano in cui si disaminano ecc. (duplicato del Ms. *L*) pp. 346

P) Riflessioni teoriche, pratiche sovra l'amministrazione delle Finanze ecc. (duplicato del Ms. *F*)
Insieme legati:

P_1 Abbozzo ragionato d'un cadastro politico, parte 1ª (duplicato dei Mss. *I*, *M*, *N*)

P_2 Delle cose militari e delle fortificazioni

P_3 Del lusso e delle leggi suntuarie ossia disamina di quanto abbiano inteso per lusso diversi Autori

P_4 Osservazioni sopra l'editto della nuova monetazione delli 15 febbraio 1755

P_5 Degl'inconvenienti che deriverebbero dal rendere i beni feudali allodiali
complessivamente pp. 415

Il Ms. *A*, salvo qualche differenza di parole e qualche lieve variante, non è che la copia del capo 4° " Dell'Agricoltura „ del Ms. *B*.

Il Ms. *C* (e il *D* che ne è un duplicato senza nessuna variante) contengono sette saggi: 1° del commerzio che non deroga alla nobiltà; 2° del commercio oltre mare; 3° delle sete: 4° del Magistrato del Consolato e della fede pubblica; 5° del Magistrato del Commerzio; 6° della libertà e licenza; 7° delle lane. I quali saggi son tutti testualmente riprodotti nei capitoli del Ms. *B* portanti identico titolo, salvo il 3° che nel Ms. *B* è rifatto, e il 6° che non vi si trova per disteso.

Il Ms. *E* contiene tre saggi: 1° delle Finanze e del Commercio in generale; 2° del commercio delle sete; 3° dei grani. I due ultimi sono quasi identici ai capitoli sulle sete e sui grani del Ms. *B*, e il primo è riprodotto in parte nei capitoli primo e secondo del Ms. *B* intitolati: " Delle forze naturali del Re di Sardegna rispetto alla Finanza ed al Commerzio „ e " Dei ripieghi di Finanze „, e in parte nel capitolo dello stesso Ms. che tratta " dei cambi „.

Questo Ms. *E* è certamente anteriore ai quattro precedenti: Anteriore di poco ai Mss. *C* e *D*, perchè a p. 16 vi si legge: " Questo..... è uno dei principali motivi, per cui appresso di noi le manifatture ed arti non sono giunte a quel grado di perfezionamento, che sarebbe desiderevole, ed a cui pare, che avrebbero dovuto pervenire, quando passati non fossero in trascuranza alcuni eccellenti editti, che sono emanati dall' (*sic*) 1680 a questa parte, dei quali mi riserbo a dimostrarne il vantaggio grandissimo, che ne sarebbe derivato, quando fossero stati osservati: e *ciò eseguirò in alcuni saggi che sto travagliando sopra il commercio del Paese relativamente a detti editti* „.

E anteriore anche al Ms. *B*, non soltanto perchè questi " Saggi sovra il Commerzio del Paese „ furono evidentemente incorporati di poi nella trattazione più ampia e sistematica contenuta nel Ms. *B;* ma anche perchè nel Ms. *A* (1), di cui il capitolo " Dell'Agricoltura „ del Ms. *B* è una copia, è detto: " la materia dei grani deve considerarsi come oggetto di commercio, *cosa che ho evidentemente dimostrato in un trattato particolare dei*

---

(1) Il Ms. *A* è del 1773. Infatti, a p. 48 del Ms. *I* si legge: " ... come " ho altrove dimostrato in un saggio politico e pratico sovra le arti fonda- " mentali, rassegnato nel 1773 a S. M. „.

grani „ (1). Il quale trattato dei grani altro non è che il saggio " dei grani „ del Ms. *E*.

Sembra, insomma, che i saggi contenuti nei Mss. *C*, (*D*) ed *E* siano come la trama su cui s'è poi venuta intessendo l'opera posteriore, e nella quale essi furono incorporati come capitoli distinti. E quest'opera riesce a due trattati, uno di Economia politica (Ms. *B*) ed uno di Scienza della Finanza (Mss. *F*, *H*, *P*).

Tutti gli altri Mss. formano un gruppo a parte, avendo un più spiccato carattere di scritture d'ufficio e di ordine pratico. E di essi si parlerà dopo d'aver esaminate le due opere che hanno maggior valore ed interesse teoretico.

III. — Il trattato d'Economia politica (Ms. *B*).

Importa innanzi tutto stabilire in che rapporto di tempo e in che connessione logica questo " Saggio d'Economia politica e pratica „ stia col *Saggio d'Economia civile* dato alle stampe nel 1776. Il manoscritto non è di certo il copione dell'opera stampata: ha i capitoli disposti in ordine diverso, e non sempre corrispondenti fra loro per la materia trattata, è più ampio e abbonda di osservazioni pratiche e di riferimenti alle condizioni e alle leggi del Piemonte: osservazioni e riferimenti che non sono riportati per disteso nell'opera a stampa, la quale ha andatura più succinta e carattere più teorico.

Potrebbe affermarsi che il libro a stampa sia un sunto di questo Ms., anche perchè in quello è più logico l'ordine dei capitoli, se le parole con cui esso ha termine: — " In questo saggio ho esposti alcuni principii generali, che riguardano l'economia civile. Da essi ho dedotte per ora quelle conseguenze, che parse mi sono le più giuste. Sto lavorando per ampliare il presente libro, e per corredarlo di quelle più ampie cognizioni ed osservazioni che solo una più lunga ed esatta esperienza può somministrare „ — non facessero invece pensare che i due Mss. *B* ed *F* (*H*, *P*) siano l'opera più ampia annunciata in quell'ultimo paragrafo.

---

(1) Nel capitolo " dell'Agricoltura „ del Ms. *B*, quella frase è mutata così: " La materia dei grani deve considerarsi come oggetto di commercio, " cosa che dimostrerò appresso „. Ma qui l'" appresso „ ha significato locale e non temporale, perchè è un rimando al capitolo " dei Grani „ che immediatamente segue.

Se, però, si può con tutta certezza affermare che le *Riflessioni sovra l'amministrazione delle Finanze* siano posteriori al *Saggio* a stampa, poichè in fronte al Ms. *H* è scritto: " Il presente libro è stato rassegnato a S. M. in Gennaio 1779 „ (1), manca pel *Saggio d'Economia politica e pratica* una così esplicita prova. E mentre degli altri scritti frequentemente si hanno richiami con l'indicazione dell'anno in cui furon pubblicati o composti o presentati al Re o trasmessi alla Segreteria di Stato, questo *Saggio d'Economia politica e pratica* non è mai nominato in verun altro manoscritto. L'unico rimando che potrebbe riferirsi ad esso è quello che si trova a p. 48 del Ms. *I* (vedi nota a p. 13), nel quale è detto che nel 1773 fu presentato al Re un *Saggio politico e pratico sulle arti fondamentali*. Si dovrebbe cioè concludere che il Ms. *A* e il Ms. *B* siano un' opera sola con titolo alquanto mutato (2), appoggiando quest' argomentazione anche sul fatto che il Ms. *A* non consta che di un saggio sull'Agricoltura, il quale, salvo qualche variazione di parola e qualche riga di più o di meno (3), è in tutto identico al capitolo dell'Agricoltura del Ms. *B;* di guisa che, così argomentando, il Ms. *A* verrebbe a considerarsi non come un' opera a sè, ma

---

(1) Il Ms. *F*, che fu quello ch'io vidi pel primo, quand'ancora non conoscevo l'esistenza delle copie *H* e *P*, è senz'alcuna data. Ma io ero riuscito a determinarne la data precisa in base ai criterii seguenti. Che dovesse essere posteriore al 1776 si deduceva dalla p. 386, ov'è detto: " vedansi gli Editti " citati a questo proposito nel mio saggio d'economia civile „. Che fosse anteriore al 1781 l'avevo argomentato dalla p. 266, dove, citando una lunga serie di editti sulla gabella del sale, l'A. non nomina quello del 21 settembre 1781, il quale è di singolare importanza, avendo mutato l'ordinamento di quel tributo, col sostituire la quota per comunità alla quota individuale. E che fosse precisamente della fine del 1779 o del principio del 1780, lo avevo desunto dalla pagina 335, ove si consiglia di occupare nella manifattura del cotone " le figlie dei militari le quali per sovrana " disposizione si ritirano nell'*opera non ha guari eretta* „, poichè il Regio Ritiro per le figlie dei Militari, fusosi dappoi col presente Istituto Nazionale, fu appunto fondato con RR. PP. 6 luglio 1779.

(2) Così è, ad esempio, del Ms. *F* (*P*), il quale è identico al Ms. *H*, salvo in quest'ultimo una lieve variazione nel titolo e un'aggiunta al principio ed alla fine.

(3) A p. 105 del Ms. *B* dieci righe che non si trovano in *A* — a pp. 56-7 del Ms. *A* ventiquattro righe che non si trovano in *B* — a pp. 137-38 del Ms. *B* quattordici righe mancanti in *A*.

come una copia di una parte dell'opera contenuta nel Ms. *B*. Riducendo così ad un' unica opera i Mss. *A* e *B*, si potrebbe attribuire ad essa la data del 1773, e quindi stabilire l'anteriorità del *Saggio d'Economia politica e pratica* al *Saggio d'Economia civile,* stampato nel 1776.

Ma ciò non regge per la ragione che or ora si esporrà, e per quanto possa parer strano che s'intitolino *Saggio d'Economia politica e pratica delle arti fondamentali* poche pagine sull'agricoltura, pure non è dubbio che questo scritto è distinto dal *Saggio d'Economia politica e pratica* (Ms. *B*), e che ad esso soltanto, e non pure a questo si riferisce il richiamo del Ms. *I* e va quindi attribuita la data del 1773.

E infatti, a pp. 137-38 del Ms. *B* v'è un periodo che comincia: " E riguardo alla garanza nell' (*sic*) 1773 si è fatta l'esperienza di tingere panni ed altre stoffe di lana con questa radice ", ecc., il qual periodo manca nel Ms. *A*; dimodochè la menzione di quella data nel Ms. *B* può servire a stabilire la sua posteriorità a quell'anno, come la mancanza di quella menzione nel Ms. *A* può suffragare l'anteriorità di questo al Ms. *B*.

Fissato da una parte che il *Saggio d'Economia politica e pratica* è posteriore al 1773, determinato d'altra parte che è anteriore al 1785, perchè a p. 130 è invocata l' istituzione di un'Accademia d'Agricoltura, che appunto in quell'anno ebbe vita, rimarrebbe pur sempre a stabilire se la sua composizione precede o segue il *Saggio d'Economia civile* pubblicato nel 1776. Sul qual punto bisogna rispondere che, se non la materiale formazione del manoscritto, certo la elaborazione della materia in esso contenuta è in gran parte anteriore al 1776. Infatti, come s'è già accennato (p. 13), i capitoli VI, VII, VIII, IX, X e XI del Ms. *B* altro non sono che i *Saggi* primo, quarto, quinto, terzo, settimo, e secondo *sovra il commerzio del paese relativamente agli Editti emanati dall'* (sic) *1680 a questa parte.* E siccome questi *Saggi* sono quasi contemporanei al Ms. *E* (cfr. p. 13) e questo è di certo anteriore al 1776 se non pure al 1773 (*ibid.*), così è evidente che molta parte della materia contenuta nel *Saggio di Economia politica e pratica* (Ms. *B*) fu raccolta ed elaborata anteriormente alla stampa del *Saggio di Economia civile* (1).

---

(1) Dippiù, il cap. IV del Ms. *B* è il saggio sull'agricoltura del Ms. *A* (1773), e il cap. V è quasi identico al saggio dei grani del Ms. *E*.

Pare dunque che il Ms. *B* non sia proprio l'opera di maggior mole annunciata e promessa nell'ultimo paragrafo del *Saggio* a stampa (cfr. p. 14), tanto più che di esso non si fa punto menzione in nessun altro manoscritto, e neppure nella prefazione al Ms. *H*(1), dalla quale risulterebbe invece che il trattato di Scienza della Finanza (Mss. *F*, *H*, *P*) era destinato ad essere la continuazione del *Saggio di Economia civile*, e in particolare lo svolgimento della materia abbozzata nel suo ultimo capitolo.

***

Ma se il Ms. *B* è anteriore al *Saggio di Economia civile*, potrebbe a prima vista riuscir difficile a comprendere perchè l'A., nel dare alle stampe la sua opera di economia politica, le abbia fatto subire una nuova elaborazione, e non abbia invece pubblicato lo scritto che già teneva in pronto, e che era in molte parti più diffuso e più nuovo. Le ragioni di ciò mi sembrano due, e proprio corrispondenti ai due caratteri suaccennati, pei quali il Ms. *B* differisce dal *Saggio* stampato.

In primo luogo, licenziando al pubblico il suo *Saggio di Economia civile*, l'A. volle, com'egli stesso dice, esporre alcuni " principii generali „ e quindi dal *Saggio di Economia politica e pratica* (Ms. *B*) tolse e riprodusse a parola quanto aveva carattere più generico e teorico, ed omise o rigettò in nota tutto ciò che aveva interesse prevalentemente pratico o locale. E così, ad esempio, nel testo del *Saggio* a stampa più non si trovano, come nel Ms. *B*, le lunghe esposizioni e commenti della legislazione piemontese sulle varie materie d'industria e commercio, ma per ogni argomento le note contengono copiosi richiami alle costituzioni, agli editti, ai manifesti, viglietti e patenti.

---

(1) Nella prefazione al Ms. *H* (mancante in *F* e *P*) è detto fra altro: " Nel saggio di Economia civile da me pubblicato nel 1776, ricercai quai " fossero i mezzi più valevoli a promuovere il Commerzio. Accennai nel- " l'ultimo capo il rapporto che il Commerzio ha colle Finanze scorrendone " e bilanciandone le principali osservazioni. Colla quale discussione avendo " conosciuto quanto possano influire le operazioni delle Finanze sull'avvan- " zamento del Commerzio, mi sono proposto di esporre nel presente libro " quali sieno i principii, da cui pare che si abbia a dedurre la vera scienza " delle Finanze e per ottenere un fine vantaggioso „.

Ma più importante mi par l'altro motivo: quello di non voler pubblicare cosa alcuna che fosse in troppo aperto contrasto con le opinioni predominanti o con la politica dello Stato.

Il Governo piemontese — e lo dimostrò più volte — non era avverso alle riforme, sia politiche che amministrative, finanziarie od economiche, ma voleva che l'idea e l'azione riformatrice uscissero dalle sfere governative stesse, e non che giungessero a queste venendo su dal popolo. È per ciò anche che il Piemonte, come già addietro fu notato, in tutt'i rami dell'amministrazione dello Stato ebbe eccellenti uomini pratici, ma pochi scienziati; per ciò, che è ricca e degna di studio la sua letteratura burocratica, povera e quasi senz'interesse scientifico, in queste materie, la produzione per il pubblico. Nè la censura era larga nel permettere che fossero stampate e diffuse opere contenenti critiche agli ordinamenti vigenti e progetti di riforme o soltanto attinenti all' economia e alle finanze pubbliche. Il che abbondantemente traspare dalla lettera su riportata (p. 10) nella quale il revisore non osa assumere la responsabilità di dare il permesso di stampa al *Saggio di Economia civile* del Donaudi, perchè, le materie che vi son trattate " interessano i diritti dei sovrani, come sono le gabelle, le finanze, la monetazione e simili, e potrebbero i sentimenti dell'Autore talvolta opporsi alle massime del Governo ed alle leggi che attualmente esistono „. E si trattava dell'opera di un funzionario, dedicata al Principe ereditario, e per ogni verso prudentissima!

Volendo dunque dare alle stampe il suo trattato d'economia politica, il Donaudi, da tutte queste ragioni, dovette esser condotto a purgare il suo manoscritto di tutto ciò che, pubblicato, avrebbe potuto apparire troppo nuovo e disforme dai principii cui la politica del Governo s'informava, e quindi poco confacente per una edizione *ad usum Delphini*.

*
* *

Sono parecchi i punti in cui il *Saggio d'Economia politica e pratica* (Ms. *B*) apparisce invero informato a spirito più largo e ad idee più nuove e di maggior consistenza scientifica che non il *Saggio d'Economia civile*. Notare i più rilevanti fra questi punti

equivarrà a dar contezza del Ms. *B* e a radunar gli elementi necessarii per determinare il suo valore scientifico e in sè e di fronte al *Saggio* a stampa, poichè pel rimanente non si discosta gran fatto da questo.

Il primo punto è quello della politica frumentaria. Benchè il Donaudi si fosse di quest'argomento occupato già nei suoi primissimi scritti (cfr. p. 12-13) e benchè la questione annonaria fosse fra le più dibattute in quei tempi, e la legislazione piemontese offrisse abbondante materiale a commenti e raffronti, essendo oltre a quattrocento gli editti, manifesti, patenti, circolari ed altre provvidenze emanate per restringere, allargare o regolare la libertà del commercio dei grani — dal *Decretum Comitum Sabaudiae, et Gebennarum, quo vetant frumentarias fruges extra Sabaudiam trahere* del 15 dicembre 1346 all'Editto di Vittorio Amedeo III del 24 settembre 1776 — un sol breve paragrafo è dedicato a tale notevolissima questione di politica e di scienza nel *Saggio di Economia civile.* E questo paragrafo dice soltanto: " Non vi ha dubbio che i grani considerar si possono come der- " rata di prima necessità. Lo stesso Melon che riguardava la " libertà, come l'anima del commercio, ne eccettua quello dei " grani, ch'egli pensa dover essere soggetto ad alcune restri- " zioni. Hanno presso che tutte le nazioni provveduto a un sì " importante oggetto con leggi particolari. Esse però nè sono, " nè esser possono uniformi. La varia posizione dei paesi, ed " altre circostanze naturalmente suggeriscono mezzi diversi per " conservare in una nazione l'abbondanza dei grani, e per al- " lontanare il più che si possa il pericolo di penuria. Con ot- " timi stabilimenti si è appresso di noi rettificato questo ramo " della pubblica amministrazione „ (1) (In nota: Editto del Re Vittorio III delli 24 settembre 1776): " Con essi procurati si sono " allo Stato, e maggiori, e più sicuri vantaggi, che se si fosse " lasciato affatto libero il commercio dei grani. Quando le parti " tutte dell'editto recentemente emanato con attenzione si disa- " minino, chiaro si comprenderà, ch'esso altro non lascia a de- " siderare, se non che pienamente se ne compia l'oggetto „ (1).

Ora, quest'editto del 24 settembre 1776 è uno dei più notevoli anelli di quella lunga catena di provvedimenti proibitivi

(1) Op. cit., pp. 40-41.

e protettivi sul commercio dei grani, appena per breve tempo interrotta sotto Emmanuel Filiberto e Carlo Emmanuele I. Innestandosi sull'editto del 1° luglio 1773, il quale proibisce l'estrazione dagli Stati di " frumento, barbariato, segale, avena, meliga, spelta, miglio, marsaschi e legumi di qualunque sorta, e le farine di essi grani ", l'editto del 1776 commette all'Uffizio generale del Soldo di fare " col mezzo dei suoi ministri compra e provvigione di grani, per essere conservati di scorta ad universale benefizio, indi venduti su mercati, quando così richiederà il bisogno del pubblico, ovvero la convenienza di mantenere la moderazione dei prezzi ". Per provvedere ai fondi occorrenti, l'editto ordina la creazione di nuovi biglietti di credito verso le finanze per la somma di un milione e mezzo di lire, importanti ciascuno un capitale di lire cento, aventi valore di moneta effettiva e corrente, e commutabili dalla zecca in danaro nella misura di lire quindicimila per settimana. Eccettuata la città di Torino, è proibito ad ognuno di fare per mezzo di compera o di qualsivoglia altro contratto, cumulo, ammasso, o magazzino di granaglie (1) dello Stato per rivenderle, e di accaparrarle a tal fine senza il permesso del Vicario della città in Torino o dei prefetti nelle Provincie, dai quali non potrà esser conceduto se non ricevuti gli ordini del Re per mezzo della Segreteria di Stato per gli affari interni. E per accumulamento o magazzino di grani è considerato il ritrovarsene " una quantità eccedente l'uso della famiglia per un anno, presso chi non gli avrà raccolti o ricavati dai beni, dritti e redditi proprii o tenuti per altro titolo di affitto, coltura, pegno, sequestro od economato, sia che le granaglie esistano presso di lui o di altri, per il di lui conto o caparramento. Ed è reputato per bastevole all'additato uso della famiglia il numero di sacchi tre di frumento in misura di Piemonte per ognuna delle persone, ond'è composta, e delle altre granaglie una quantità proporzionale, giusta la qualità e condizione di ciascuno.

Ai panettieri e fabbricanti di paste, abitanti a distanza maggiore di dieci miglia dai paesi esteri, è permesso tenere

(1) Oltre ai grani, legumi e farine indicati nell'editto del 1773, la proibizione dell'editto del 1776 si estende anche ad ogni qualità di castagne (art. 7).

tanto grano quanto occorre al loro abituale smaltimento per un anno; ai pubblici granaiuoli quella quantità solamente che " avuto riguardo ai bisogni del minuto commercio verrà permessa dal Vicario, Prefetto e ordinario rispettivamente ". Ma ciascuno di coloro cui in tali limiti è concesso di tener provviste di grani, non potrà comperarli sui pubblici mercati " se non dopo spirato il tempo che in essi verrà riservato a coloro che provvedonsi pel proprio uso ", e dovrà fare mensilmente una consegna di quanto tiene in magazzino o a suo conto esista altrove, ed avrà obbligo di vendere in ogni tempo agli accorrenti e mandarne sui pubblici mercati la quantità che gli fosse ingiunta.

E così, quest'editto del 1776, messo accanto a quello del 1773, dal quale l'estrazione dei grani viene proibita e severamente punita, ed accanto a quelli degli anni immediatamente precedenti, che ora chiudono, ora disserrano le porte del Regno all'uscita dei principali prodotti agricoli, segna uno dei punti culminanti di quella viziosa politica annonaria, la quale continuamente ed agitatamente si dibatteva fra le due imperiose esigenze dell'impedire che il prezzo dei grani salisse di troppo, scontentando il popolo, e dell'impedire che di troppo calasse, scontentando i proprietari di terre. È questa una lotta di opposti interessi che ha dovuto esercitare un'influenza notevolissima non solo sulla politica frumentaria — tutta dominata da essa — ma benanche talvolta sulla politica generale interna del Piemonte. Si vedono di ciò segni d'importanza non disconoscibile nelle due solenni promesse, fatte e non potute mantenere, da Emmanuel Filiberto e da Carlo Emmanuele I.

L'uno, nelle Lettere Patenti del 29 luglio 1572, richiedendo dai feudatari ed altri sudditi il due per cento di ogni sorta di grani e marzaschi per uso dei presidii e sovvenzione dei poveri proclamava che " per riconoscere tale amorevolezza usata da detti " nostri cari et bene amati vassalli et sudditi verso di noi, con " qualche sorte di gratitudine, *gli promettiamo in fede et parola di* " *Principe, che da mo' avanti non servaremo li grani, marzaschi* " *et vittovaglie, nè impediremo il negozio et commercio pubblico di* " *essi, perchè si possa ognuno valere de' suoi raccolti secondo le* " *piacerà, salvo che il grano ascendesse a più alto prezzo di quattro* " *scudi d'oro in oro d'Italia il sacco;* nel qual caso per la com- " passione che dobbiamo havere alla miseria di tante povere

" persone, che perirebbono di fame se non se gli provvedesse in " vietare che il grano non montasse più alto: non potremo a " manco di serrarlo per l'indennità di essi poveri ".

L'altro, ancor più recisamente e senz'alcuna subordinazione a limiti di prezzo, dichiarava nel proemio dell'Editto del 20 ag. 1604: " Essendo sempre stato uno delli maggiori nostri desiderii di " mantenere conforme all'obbligo che teniamo da Dio della cura " et amministratione di questi Stati, il più che sia stato possi- " bile, l'abbondanza in essi come da gli anni passati (benchè " molto penuriosi) da ogni uno è stato conosciuto e provato; la " qual cosa però non s'è potuta fare senza il serramento dei grani " nel paese, *da cui n'è proceduto e procede la strettezza del danaro* " *e lo sviamento del commercio che s'è patito, non potendo li ben* " *amati nostri popoli per altra via più comoda aver danaro che col* " *commercio dei grani:* ci siamo risoluti dopo longa e matura " consideratione, et udito anco il parere del nostro Consiglio, " nel quale è stato longamente et con molte sessioni trattato " e discusso questo fatto, *di concedere l'esito generale delli grani* " *in ogni tempo et in qualunque annata o abbondante o sterile che* " *sia permettendone l'estrattione fuori dello Stato nostro dove tor-* " *narà commodo ad essi popoli, con ampia licenza, la qual mai si* " *revocarà per qualsivoglia causa o pretesto, come così promettiamo* " *in fede e parola di Prencipe, et in forza di contratto;* la qual però " estrattione dei grani et vittovaglie non vogliamo habbi luogo " prima di tutto il mese di novembre prossimo, nel qual tempo " dovrà esser fatta la provvisione che segue per l'abbondanza " di questo primo anno: che per ciò e per mantenere la detta " abbondanza (alla quale, come habbiamo detto, siamo obbli- " gati e ne habbiamo sempre avuto tanta cura) si faccia dalli " ben amati nostri popoli il cumulo di grano in, et da ciascuna " terra et luogo, sì mediato che immediato, et per manco loro " incommodo in quattro annate, et a ragione di due per cento " l'anno; li quali grani però s' intenderanno di essi luoghi e " città respettivamente, et siano da loro conservati, acciocchè " con tal preventione si possa continuare l'abbondanza in questi " Stati, e tener a freno l'ingordigia delli granatieri e cumula- " tori de' grani, di modo che se il prezzo del grano venesse ad " eccedere l'honesto corso, si possa col vendere di questi cu- " mulati abbassar il prezzo et soccorrere di questa maniera al-

" l'indennità dei poveri e bisognosi. Et ciò facendo, *promettiamo*
" *in oltre alle dette città, terre e luoghi mediati et immediati, sotto*
" *la medesima fede e parola di Prencipe di non chiamar loro mai*
" *più per l'avvenire li detti due per cento, meno impedire che possano*
" *vendere i grani tanto dentro che fuori dello Stato ad arbitrio loro*
" et che li detti grani, come sopra cumulati et da loro conser-
" vati non si venderanno, salvo in caso di necessità et secondo
" le occasioni che di buon concerto delli Deputati delle Comu-
" nità et nostri sopra essi grani saranno giudicate ".

Ma le promesse dei due Duchi, intese a placar l'animo dei proprietarii di terre, vessati dai divieti dell'esportazione, dalla determinazione dei prezzi, dai contributi straordinarii, si ruppero, l'una volta e l'altra, dopo pochi anni, innanzi alla paura che l'elevamento del prezzo del grano potesse cagionare turbamenti interni. E quindi una interminabile fila di provvisioni, seguentisi a poca distanza l' una dall'altra, per rinforzare, per correggere, per temperare, per contraddire le precedenti, secondo che le circostanze del momento pareva che richiedessero. E quindi una legislazione minutissima, mutevole ad ogni mutare di condizioni economiche: libertà di esportazione appena che le raccolte sovrabbondassero, subitaneo divieto quando pareva che della libertà s'abusasse per far incette e vendere all'estero; ordini di far la consegna di tutte le derrate; proibizioni di comperar più che abbisognasse al consumo familiare; imposizioni alle comunità di far provviste per gettar grani sul mercato a sollievo dei più poveri, quando i prezzi crescessero; fissazioni di prezzo; comandi di vendere la parte sovrabbondante a ciascuno; divieti di alienare a forestieri; determinazione del necessario al consumo individuale; obbligo di tener invenduta una certa quantità sull' eccedente all'uso proprio; ecco le provvidenze che non solo d'anno in anno, ma più volte nell'anno si succedevano l'una all' altra, oppure erano mescolate insieme, nella fallace speranza di contemperare la libertà del commercio con la determinazione autoritativa del prezzo; l'abbondanza forzosa delle derrate col loro smaltimento naturale.

Ora, mentre nel saggio a stampa, col paragrafo sopra riportato e con la lode all'editto del 1776, si dà approvazione e plauso a siffatta politica annonaria, altre idee sono espresse al riguardo nel capitolo sui grani del Ms. *B*. Non è che qui il

Donaudi si dichiari schiettamente favorevole alla libertà del commercio; ma, pur facendo distinzioni e restrizioni, lascia comprendere che da essa soltanto può aspettarsi sollievo all'agricoltura, giovamento alla ricchezza nazionale, freno a violente oscillazioni dei prezzi. Egli ammette l'intervento dello Stato a serrare i grani e a fissarne il prezzo quando i raccolti siano scarsi, giacchè in tali congiunture, dice, la ragion di Stato vuole che a tali provvidenze si abbia ricorso. Ma combatte l'opinione di coloro che vorrebbero tener i grani rinchiusi e vincolarne il commercio, pel timore che l'esportazione ne cagioni la carestia e ne impedisca il buon mercato, il quale favorisce la popolazione, chiama gli stranieri ad abitar nel paese, contribuisce all'avvanzamento delle manifatture, rende la mano d'opera a minor prezzo (Ms. *B*, p. 142). Egli osserva che solo la libertà è " capace di far fiorire il commercio e metterlo in istato di spandere con uguaglianza le produzioni proprie a ciascun luogo e più abbondanti in uno che in un altro „; che l'abbondanza dei grani, quando ne sia impedito lo smaltimento fuori della Nazione, sarà non giovevole ma nociva e all'agricoltura, e ai proprietarii e alle altre classi di cittadini. Perchè chi coltiva le campagne o possiede fondi dovrà vendere il grano che gli avanza a basso prezzo, e quindi venderne una maggior quantità per supplire ai suoi bisogni, onde non sarà in grado di conservarne. " Che se poi gli anni di abbondanza venissero a seguitarsi saranno i granai dei mercanti ripieni, nè volendo impiegare maggiori somme in questo negozio diverrà il grano inutile ai coltivatori, i quali non ritroveranno a venderlo, nè avranno per conseguenza i mezzi di supplire a' loro bisogni, ed alle spese della coltivazione; questo produrrà la perdita sopra li altri prodotti, che si sarebbero comprati colla permuta nello stato di libertà, la diminuzione di tutte le parti sopra le rendite, e per conseguenza sovra le manifatture e salarii „ (*ibid.*, pp. 145-46). Ed osserva ancora che non deve considerarsi come cosa pericolosa che i grani si sostengano ad un certo prezzo proporzionato al valore dei fondi, alle spese dell'agricoltura, ai bisogni dei coltivatori ed alle imposte che pagano. Poichè il forte rinvilio dei prezzi distoglie dalla fatica i lavoranti, i quali guadagnando in due giorni quanto li abbisogna per vivere tutta la settimana, ricusano il travaglio e preferiscono lo starsene oziosi, e scoraggia l'agricoltore che

non ritrova più il suo conto nella coltura della terra; mentre, se la derrata si sosterrà a un certo prezzo, sarà allontanato il pericolo di carestie, perchè i proprietarii " useranno ogni mezzo per far rendere le loro terre di più, si adopreranno di render colti i siti gerbidi, e con questo assicureranno nel paese la quantità necessaria per sussistere negli anni di cattiva raccolta ". E dippiù la libertà del commercio farà sì che molti si potranno dare al negozio dei grani e con piccoli capitali; onde, contentandosi di un discreto profitto e vedendo subito che hanno qualche poco di guadagno, terranno in soggezione i grossi negozianti, i quali, impiegando somme ragguardevoli e conspicue, non vendono se non trovano un vantaggio considerevole. Di guisa che " questi piccoli magazzeni impediscono che il prezzo dei grani aumenti fuori misura, entrando in concorrenza con li altri; e tutti uniti facendoli fronte, dispensano per così dire il Governo dal dovere invigilare, mentre fanno che tutto circoli, tutto sia in vendita, si oppongono ai monopolii, non essendovi allo Stato cosa più vantaggiosa che il grano non solo esista nel paese, ma sia diviso fra molti " (*ibid.*, p. 152).

Queste idee non hanno certo alcuna grande originalità, poichè discendono direttamente da quelle espresse sulla stessa materia dal Melon (*Essai politique sur le Commerce*, 1734) e particolarmente dal Genovesi. È dalla lezione dell'economista napoletano *Sulla libertà dell'annona siccome principal fondamento della libertà del commercio* (1) che il Donaudi trae evidentemente la sostanza dei suoi argomenti contro il regime vincolista dei grani, i divieti di uscita, la determinazione dei prezzi, la formazione di pubblici magazzini. Al Melon (2) e al Genovesi appartiene la dimostrazione della inutilità e del danno dei magazzini di grano stabiliti con pubblico danaro; e l'affermazione che la libertà del commercio alletterebbe anche i piccoli coltivatori a negoziare in quella derrata, onde " le case di tutti potrebbero essere magazzini di grano " (3).

---

(1) Genovesi, *Lezioni di Economia civile* (Scrittori Classici Italiani di Econ. polit., t. VII, pp. 82 e segg.).

(2) Op. cit., cap. II, du bled.

(3) Genovesi, op. e loc. cit. Alcuni passi del Donaudi sono tolti dal Genovesi. — Cfr. Donaudi (Ms. *B*, pp. 147-48): " ...egli è massima, che l'avidità del

Ma quel che importa di più affermare è che l'Autore piemontese esponesse in quel Ms. idee contrarie alla politica seguìta nel suo paese, ch'egli trattasse la materia con assai maggiore libertà e veracità che non nel *Saggio* dato alle stampe; che egli, sopratutto, apertamente condannasse il sistema dei pubblici magazzini, mentre nell'opera pubblicata dà poi lode a quell'editto del 1776, per il quale lo Stato dovè contrarre un grave debito per far incetta di grani allo scopo di poterli gettare sul mercato quando paresse opportuno di deprimere i prezzi: la qual operazione cagionò al Governo piemontese in un decennio una perdita di circa mezzo milione di lire (1).

***

Un altro punto, che merita d'esser messo in rilievo, ed anch'esso per la discrepanza significativa che a suo riguardo si riscontra fra opera a stampa e manoscritto, è il giudizio in questo contenuto sovra una parte del clero e all'influenza sua sulla vita economica del paese.

Nel capo " della Popolazione ", dopo d'aver discorso dei vantaggi e danni d'una popolazione densa o scarsa, del rapporto fra il numero d'abitanti e le sussistenze, dei metodi d'investigazione; dei provvedimenti per rimuovere le cause di spopolamento e così via, il Ms. *B* (pp. 71 e segg.) contiene questo

---

" guadagno è uno dei più forti motivi, che solletichi e spinga gli uomini " alla fatica, all'arti, ed alle imprese più difficili; ora non vi ha dubbio " che la libertà di questo commercio è giovevole, come quella che procu- " rando guadagno, anima le arti; quando libero sia il commercio dei grani, " più non si temeranno monopolii, il grano correrà dappertutto con incre- " dibile prestezza, trovandovi tanti asili da ricoverarsi, e starvi bene; l'in- " dustria prenderà forza e vigore ".

E Genovesi (op. e loc. cit.): " Allora i popoli non temeranno più il " monopolio; il grano correrà per tutto con incredibile prestezza trovando " tanti asili da ricoverarsi e starvi bene; la fatica si animerà e la fame " per disperazione di non potersi ficcare in un paese così industriale e savio, " dimagrerà " (p. 101).

" Ma affinchè non paia ch'io farnetichi riflettiamo a quel ch'è detto, " che l'avidità del guadagno è uno dei più forti motivi che solletichi e " spinga gli uomini alla fatica, all'arti e all'imprese le più difficili " (pag. 102).

(1) Cfr. su ciò Nicomede Bianchi, *Storia della Monarchia Piemontese dal 1773 al 1861* (Torino, Bocca, 1877, vol. I. p. 109).

passo: " Non basta avere gli uomini, se non si procura di ren-
" derli utili alla Patria; perciò due sono gli oggetti, che de-
" vono in questo fissare le cure del Governo, cioè che tanto
" che si può, niuno abbracci uno stato, in cui si metta a peri-
" colo o di essere inutile alla società, o di vivere mal contento,
" e perturbatore della quiete altrui, e che molti sani e robusti
" non rubino col mendicare quella sussistenza, che lavorando
" sono in caso di guadagnarsi.

" Il Prencipe, e come Prencipe, e come difensore e protettore
" de' sacri Canoni e della Chiesa, deve invigilare che le leggi
" Ecclesiastiche sieno con esattezza osservate; perciò ordinando
" il Concilio di Trento nel cap. XIV, sess. XXIII, che niuno
" debba essere promosso ai sacri ordini, se non l'esige o la ne-
" cessità o l'utilità della Chiesa, non so comprendere qual van-
" taggio apporti alla Chiesa l'imporre così facilmente le mani
" sovra molti i quali, ancorchè abbiano vestito l'abito chieri-
" cale, non danno, nè per i loro talenti nè per la vita che hanno
" menata, la menoma speranza che l'ordinazione loro al sacer-
" dozio possa essere di qualche utilità.

" Questo fa che riescono preti dati al bel tempo, ed in
" molte famiglie la vanità d'avere un prete è causa che il padre
" si priva della miglior parte del suo per formare il patrimonio
" ecclesiastico ad un figlio con pregiudizio molte volte de' fra-
" telli; invece, che se a suo tempo fosse stato rimosso dal
" Clero, il bisogno di lavorare per guadagnarsi la sussistenza
" lo avrebbe costretto ad applicarsi a qualche arte meccanica
" e rendersi utile in qualche maniera alla società ed alla pro-
" pria famiglia.

" Non so poi comprendere, come i Principi ne' loro Stati
" non abbiano ancora con pubblica legge ordinato, che alcuno
" non possa fare la professione religiosa prima degli anni venti
" compiti, mentre la disciplina della Chiesa non tollera che un
" chierico, se non ha ventun anno, promosso sia al subdiaco-
" nato, nè le leggi prima degli anni venti dichiarano alcuno
" maggiore, massime che il Concilio di Trento non prescrive
" che si debba la professione religiosa assolutamente fare agli
" anni sedeci, ma solo la dichiara nulla, se fatta prima di
" tale età.

" Con simil legge si eviterebbe di scorgere tanti frati mal

" contenti, mentre conoscendo in età più matura cosa fanno, " abbraccierebbero un tale stato guidati dal vero spirito di re- " ligione, nè vi sarebbero tanti perturbatori della quiete e tran- " quillità monastica ".

Questo passo manca affatto nel corrispondente capitolo sulla popolazione del *Saggio* a stampa. E se pur questa volta le idee espresse sono ricalcate su quelle di Melon e di Genovesi (1), non è già l'originalità loro ma l'essere state energicamente riaffermate in quel luogo e in quel tempo che le fa degne di nota. Bisogna infatti ricordare che all' incirca in quello stesso torno di tempo veniva composta e pubblicata quell'operetta *Dell'impiego delle persone* (2), la quale suscitò contro il suo autore, l'abate Carlo Denina, le ire della censura ecclesiastica, e gli costò la perdita della cattedra d'eloquenza e l'arresto e quindi il volontario esilio. Ora, non sono punto dissimili da quelle del Donaudi le idee che il Denina esponeva intorno al numero degli ecclesiastici ed alle loro occupazioni.

Il rimedio di ordinar pochi religiosi osservando le norme dei sacri canoni è pur da lui indicato (3); il lamento che ogni famiglia volesse avere fra i suoi un ecclesiastico è ripetuto; e lo sdegno per la rilassatezza del costume e l'apprensione del danno derivante dalle numerose ordinazioni e dall'ozio dei religiosi al patrimonio familiare ed alla economia del paese, non è meno vivo nel passo del Donaudi, or riportato, che in parecchi capitoli della franca e ragionata opera del Denina (4).

---

(1) Personne n'ignore da quelle utilité seroit la Loi qui défendroit l'État Monastique avant l'âge de vingt-cinq ans, c'est-à-dire qu'on ne pût aliéner sa liberté qu'à l'âge où l'on peut aliéner son bien (Melon, *Essai politique sur le Commerce*, Nouv. édit. MDCCXXXVI, p. 30) — cfr. anche Genovesi, op. cit., cap. V, § 23.

(2) Fu pubblicata a Firenze nel 1777 ma composta nel 1773, come afferma un amico dell'Autore, Carlo Marco Arnaud, nella sua prefazione alla ristampa del 1803 (Torino, Morano).

(3) Op. cit., p. 60.

(4) Op. cit., p. 61. Anzi il Denina si limitava a chiedere che fosse permesso agli ecclesiastici l'agricoltura e l'esercizio di altri lavori manuali per campar la vita e non essere a carico degli altri (cfr. anche pp. 68 e segg.), mentre il Donaudi consigliava di non ordinar sacerdoti i cadetti, acciò non fossero sottratti uomini e capitali alle industrie ed ai commerci.

L'Accademico Segretario: R. Renier.

CLASSI UNITE

Adunanza dell'8 Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, MOSSO, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, MORERA e GRASSI. — Il Socio PARONA scusa l'assenza;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: PEYRON, Vice-Presidente dell'Accademia, FERRERO, Direttore della Classe, MANNO, BOSELLI, CIPOLLA, PIZZI e RENIER Segretario. — Il Socio BRUSA scusa l'assenza.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza plenaria antecedente, 21 dicembre 1902.

Invitato dal Presidente, il Socio GUARESCHI legge la commemorazione del defunto Presidente COSSA, la quale sarà inserita nelle *Memorie* accademiche. — La commemorazione è accolta da vivi applausi ed il Presidente, mentre ringrazia l'oratore, comunica che fra alcuni amici, colleghi ed estimatori del rimpianto COSSA si sta concretando il disegno di porre alla sua memoria un ricordo nella Scuola degli ingegneri.

Il Tesoriere JADANZA dà lettura della partecipazione con cui l'11 nov. 1902 il notaio Pietro Aimone informava l'Acca-

demia che il sig. dott. cav. Giacomo Pollini, deceduto in Torino il 19 ott. 1902, avea fatto nell'art. 6 del suo testamento il seguente legato:

" Lascio alla R. Accademia delle Scienze di Torino una " rendita annua di L. 250, Consolidato 5 %, i cui redditi an- " nuali capitalizzati dovranno servire per dare ogni tanti anni, " nella cifra che essa crederà, un premio alla migliore mono- " grafia storica, sul genere della mia di Malesco pubblicata a " Torino nel 1896, manoscritta od anche stampata, degli attuali " Comuni italiani delle antiche provincie piemontesi, da cui però " ne escludo quelli delle città capoluogo di provincia e circon- " dario, ad eccezione di quelli di Domodossola e Pallanza. A " tale premio potranno concorrere solamente scrittori di dette " provincie ".

L'Accademia, informata che il Consiglio d'Amministrazione, in sua adunanza del 23 dicembre 1902, mostravasi favorevole all'accettazione, autorizza la Presidenza a chiedere il R. Decreto che le consenta d'entrare in possesso del lascito.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, MOSSO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, MORERA, GRASSI e CAMERANO Segretario. — Il Socio PARONA scusa la sua assenza.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica: 1° una lettera del Socio nazionale non residente Prof. Vito VOLTERRA, il quale rende conto dell'opera sua quale rappresentante dell'Accademia delle scienze di Torino alla commemorazione del P. Angelo SECCHI tenutasi in Roma nel 25° anniversario della sua morte;

2° il Decreto Reale in data 8 febbraio col quale è approvata la nomina del Socio CAMERANO a Segretario della Classe.

Il Presidente presenta in dono all'Accademia a nome del Socio corrispondente Carlo KLEIN di Berlino le pubblicazioni seguenti: 1° *Totalreflectometer mit Fernrohr-Mikroskop* (Berlin, 1902); 2° *Die Meteoritensammlung der Königlichen Friedrich-Wilhelms Universität zu Berlin am 5. Februar 1903* (Berlin, 1903).

Vengono accolte per la pubblicazione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° *Determinazione di gravità relativa nel Piemonte*, Nota del Dr. Cesare AIMONETTI, presentata dal Socio JADANZA;

2° *Sulla teoria degli spazi che ammettono un gruppo conforme,* Nota del Dr. Guido Fubini, presentata dal Socio Segre.

Sono accolte all'unanimità dei votanti per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* i lavori seguenti:

1° *Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di Teleobbiettivo,* Memoria del Socio Jadanza;

2° *Contribuzione all'Ornitologia delle isole del Golfo di Guinea;* Parte III: *Uccelli di Annobom e di Fernando Po,* Memoria del Socio Salvadori.

Per ultimo il Socio Morera presenta a nome del Socio nazionale non residente Vito Volterra una Memoria del sig. Giulio Bisconcini, intitolata: *Sulle vibrazioni delle membrane elastiche.* Il Presidente nomina una Commissione coll'incarico di esaminarla e di riferirne poscia in una prossima adunanza della Classe.

LETTURE

Determinazioni di gravità relativa in Piemonte eseguite coll'apparato pendolare di Sternek.

Nota del Dott. CESARE AIMONETTI.

Continuando l'esecuzione del programma propostomi, di determinare le anomalie della gravità terrestre nel Piemonte, ho eseguito nell'estate dell'anno 1902 altre 8 stazioni, a Pinerolo, Carmagnola, Demonte, Mondovì, Ormea, Cairo Montenotte, Acqui e Novi Ligure.

Siccome in queste determinazioni ho assunto come stazione fondamentale o di riferimento Torino, R. Osservatorio, così nell'anno precedente ho misurato di nuovo la differenza di gravità fra Torino e Padova, onde potere più sicuramente riferire le misure fatte a quest'ultima stazione.

Nel rendere conto delle osservazioni fatte, sento il dovere di ringraziare l'On. Presidenza della Commissione Geodetica Italiana, che mi fornì i mezzi per compiere tale lavoro, l'On. Direzione delle Ferrovie della Rete Mediterranea, per le agevolezze accordatemi nel trasporto degli strumenti, l'egregio professore Jadanza, direttore di questo Gabinetto di Geodesia, che mise a mia disposizione tutto il materiale scientifico che mi potesse occorrere, il prof. Lorenzoni ed il dott. Antoniazzi, che nella stazione di Padova si incaricarono delle osservazioni del tempo e delle altezze barometriche, i dott. Balbi e Volta del R. Osservatorio di Torino, che mi fornirono i dati relativi al tempo, e tutte le gentili persone che con indimenticabile premura e cortesia mi agevolarono il mio còmpito.

I.

Nuova determinazione della gravità relativa a Torino.

Questa nuova determinazione fu eseguita nel 1901, adoperando l'apparato di Sternek N. 12, fornito di quattro pendoli n.i 41, 42, 45, 46, e del sostegno a pilastro. Nella stazione di Padova le osservazioni furono fatte nella sala destinata ad osservazioni pendolari, e nel medesimo luogo in cui il prof. Lorenzoni determinò la gravità assoluta col pendolo reversibile negli anni 1885 e 1886. Senonchè, per evitare un inutile trasporto di strumenti, mi sono servito dell'apparato delle coincidenze e del pilastro che fanno parte dell'apparecchio pendolare della R. Commissione Geodetica Italiana e che, trovandosi in quell'Osservatorio, l'egregio Direttore mise gentilmente a mia disposizione. Riguardo al pilastro, essendo esso, sia per la forma, sia per le dimensioni, eguale press'a poco a quello posseduto da questo Gabinetto di Geodesia, è lecito ammettere che la sostituzione non abbia potuto portare errori sensibili nei risultati.

Come cronometro d'osservazione adoperai il cronometro Nardin N. 32 a tempo siderale, il cui andamento fu determinato con numerosi confronti fatti durante le osservazioni col pendolo normale Frodsham, per mezzo del quale si dedussero gli stati assoluti e quindi gli andamenti orari del cronometro.

A Torino l'apparato pendolare fu montato sul pilastro trasportabile nei sotterranei del Palazzo Madama, sede dell'Osservatorio astronomico. Ivi si adoperò come orologio di osservazione il cronometro Frodsham N. 3576 a tempo siderale. Il suo andamento si ebbe per mezzo di numerosi confronti col pendolo Martin a tempo medio dell'Osservatorio, di cui le correzioni furono determinate dai dott. Balbi e Volta, astronomi in quell'Osservatorio.

I risultati relativi a queste due stazioni trovansi registrati nelle seguenti tavole.

Andamento dei cronometri.

Variazione oraria del cronometro Nardin N° 32 dedotte dai confronti col pendolo Frodsham a Padova:

Settembre	4	Variazione oraria	$+0^s,0088$
„	5	„ „	$+0^s,0079$

Variazione oraria del cron. Frodsham N. 3576 dedotta dai confronti col pendolo Martin dell'Osservatorio di Torino:

Dicembre	12	Variazione oraria	$+ 0^s,5173$
„	13	„ „	$+ 0,5236$
„	14	„ „	$+ 0,5366$
„	15	„ „	$+ 0,5352$

Durate di oscillazione dei 4 pendoli, ridotte al vuoto, a 0° ed all'ampiezza infinitesima.

Stazioni	Pendoli			
	N. 41	N. 42	N. 45	N. 46
Padova . .	$0^s,5080056$	$0^s,5076713$	$0^s,5080159$	$0^s,5083166$
	62	04	62	45
	63	23	64	61
	69	07	62	50
Medie	0,5080062	0,5076712	0,5080162	0,5083155
Torino Oss.	0,5080320	0,5076956	0,5080426	0,5083455
	55	94	24	11
	26	72	32	25
	47	98	46	42
Medie	0,5080337	0,5076980	0,5080432	0,5083433

Da questi valori, assumendo come valore della gravità a Padova

$$g_p = 9^m,80677$$

si dedussero dai quattro pendoli i seguenti

valori di $g_p - g_t$

Pendolo N°	41 :	$+ 0^m,001062$
„ „	42	1035
„ „	45	1042
„ „	46	1073
Media		$+ 0^m,00105$

Questo valore differisce di 0,00002 da quello trovato nel 1898 (1) cogli stessi pendoli. Ora, se si pone mente che in queste determinazioni l'error medio a temersi sui risultati è di circa 0,00005 (2), i due valori trovati si possono ritenere concordanti, e si può assumere come valore di $g_p - g_t$ la media dei due valori, cioè

$$g_p - g_t = + 0^m,00106$$

da cui si ha

$$g_t = 9^m,80571$$

II.

Osservazioni fatte nell'estate 1902.

Per le osservazioni fatte nell'anno 1902, servì lo stesso apparato accennato precedentemente, munito del sostegno a mensola da fissare al muro.

In tutte le stazioni si scelse come luogo di osservazione una camera situata possibilmente al Nord, per avere temperature poco variabili, ed il più che fosse possibile lontana da strade frequentate, per evitare scuotimenti nei muri, e quindi nel sostegno dei pendoli.

Nelle osservazioni ho seguìto lo stesso metodo già tenuto in tutte le altre determinazioni di gravità eseguite finora.

Le temperature venivano lette prima e dopo ogni osservazione su due termometri a lungo bulbo del costruttore Woytacek e segnati coi N^i 37 e 39. Essendo a scala arbitraria, ne determinai nuovamente le equazioni paragonandoli in un bagno ad acqua con tre termometri Baudin N^i 11594, 10887 e 10888, preventivamente campionati e confrontati tra loro. Essi erano immersi nel bagno ad acqua in modo che i loro bulbi corrispondevano rispettivamente ai due estremi ed alla parte centrale del lungo bulbo dei termometri Woytacek.

---

(1) Cfr. *Determinazione della gravità relativa nel Piemonte*, di C. Aimonetti, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXIV.

(2) Cfr. A. Venturi, *Determinazioni di gravità relativa nella regione occidentale della Sicilia*, pag. 51, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Palermo ", vol. VI, 3ª serie.

I confronti furono fatti alle temperature di circa 5°, 10°, 14°, 22° e 32°, e da essi si dedussero le due equazioni per i due termometri 37 e 39:

$$T_{37} = (L - 4{,}253)\ 1{,}735$$
$$T_{39} = (L - 5{,}211)\ 2{,}132$$

in cui T è la temperatura in gradi centigradi, e L la lettura del termometro in centimetri.

Le altezze barometriche furono lette su di un barometro aneroide di grande modello, che, prima e dopo il viaggio, fu confrontato col barometro normale dell'Osservatorio astronomico di Torino.

Il tempo fu determinato in ogni stazione col metodo delle osservazioni del passaggio di stelle orarie nel verticale della polare. Per questo adoperai un teodolite Troughton e Simms con circoli orizzontale e verticale del diametro di cm. 21 e munito di microscopi micrometrici ai quali si legge direttamente il secondo. Il cannocchiale è centrato, ed ha un obbiettivo dell'apertura di mm. 47 e distanza focale cm. 35, e tre oculari positivi, ai quali corrispondono rispettivamente gli ingrandimenti 16, 24, 50, ed uno spezzato a cui corrisponde l'ingrandimento 25. Nelle osservazioni mi servii esclusivamente dell'oculare spezzato.

Il reticolo, finamente inciso su una lastrina di vetro, è formato di 5 fili verticali equidistanti e di un filo orizzontale: le loro distanze furono determinate disponendo l'istrumento in meridiano, ed osservando i passaggi di parecchie stelle culminanti al nord dello zenit. La livella mobile, per determinare l'inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale ha il valore di una parte eguale ad $1'',48 \pm 0.02$, misurato ad un esaminatore di livelle Salmoiraghi.

In ogni stazione l'istrumento veniva montato su di un solido pilastrino costruito con mattoni cementati insieme con gesso per ottenere una più rapida presa e quindi maggiore stabilità.

Il tempo fu determinato nelle sere precedenti e seguenti i giorni di osservazione pendolare, e, tutte le volte che fu possibile, anche nelle sere intermedie. In ogni sera si osservarono da 6 ad 8 stelle, metà col cerchio ad est, metà ad ovest, facendo precedere di pochi minuti all'osservazione del passaggio di ogni

stella oraria, il puntamento alla polare, per evitare il più che fosse possibile ogni causa di errore proveniente da qualche eventuale spostamento dell'istrumento, e l'influenza dell'andamento del cronometro.

Le formole usate pel calcolo furono le seguenti:

$$t' - t = (T' - \alpha') - (T - \alpha)$$

$$\text{tang}\,.\,x = \frac{\text{tang}\,\delta\,\text{cotg}\,\delta'\,\text{sen}(t' - t)}{1 - \text{tang}\,\delta\,\text{cotg}\,\delta'\cos(t' - t)}$$

$$\text{sen}\,m = \text{tang}\,\varphi\,\text{cotg}\,\delta\,\text{sen}\,x$$

$$\Delta t = \alpha - T + \frac{x - m}{15} - i\sec\varphi \pm c\sec\varphi \frac{\cos\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}(z' + z)} \left\{ \begin{array}{ll} \text{cerchio ad } E. \\ \quad\text{"} \quad\quad \text{"} \quad W. \end{array} \right.$$

nelle quali T e T' sono gli istanti dei passaggi al filo di mezzo della stella oraria e della polare; α, δ; α' e δ' le ascensioni rette e declinazioni rispettive, i l'inclinazione dell'asse in secondi, positiva quando l'estremo W dell'asse è più alto, c l'errore di collimazione, e ΔT la correzione dell'orologio.

Applicando queste formole si ottennero per ogni sera da 6 ad 8 equazioni, dalle quali si dedussero i valori più probabili di ΔT.

Le posizioni apparenti delle stelle si ricavarono dalla *Connaissance des temps*, riducendole al luogo ed all'ora di osservazione, e correggendo inoltre le ascensioni rette delle stelle orarie dell'influenza dell'aberrazione diurna.

Per ciò che riguarda l'influenza di questa sulla polare, ho applicato al valore di ΔT la correzione

$$+ 0^s,021 \frac{\text{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta}.$$

Come orologio d'osservazione tanto nelle determinazioni del tempo, quanto nelle osservazioni pendolari, servì il cronometro Frodsham N° 3576 a tempo siderale ed a contatto elettrico. Però, per evitare errori provenienti da eventuali cambiamenti nell'andamento del Frodsham, dovendosi esso trasportare da un locale all'altro, mi servii come orologio regolatore del cronometro Plaskett N° 5190 a tempo medio. Questo in ogni stazione

veniva collocato nel locale delle osservazioni pendolari, e non ne veniva rimosso che a stazione compiuta.

Mediante confronti presi col Frodsham immediatamente prima e dopo ogni determinazione del tempo si dedussero le correzioni e quindi l'andamento del Plaskett; mediante poi numerosi confronti presi durante le osservazioni pendolari col Frodsham, si dedusse l'andamento orario di questo in ogni giorno di osservazione.

Tanto i confronti tra i due cronometri, quanto gli appulsi delle stelle ai fili del reticolo nelle determinazioni del tempo, furono presi ad orecchio.

In tutte le stazioni i pendoli si fecero oscillare tre volte ciascuno, tranne nella stazione di Cairo Montenotte, in cui, per mancanza di tempo, si fecero oscillare due volte solamente.

Le durate d'oscillazione s dei pendoli furono ridotte all'ampiezza infinitesima, alla temperatura di 0° ed al vuoto mediante le correzioni:

Correzioni per l'ampiezza a di oscillazione

$$\alpha = -\frac{1}{16}\left(\frac{a'}{R'}\right)^2 . s.$$

Correzione per la temperatura

$\tau = -45{,}47$ unità della 7ª decimale di s per ogni grado centigr.

Correzione per la densità dell'aria D:

$\delta = -555\,D$ in unità della 7ª decimale di s.

Nelle seguenti tavole sono registrati tutti i dati relativi ai luoghi di osservazione, ed i risultati ottenuti sia nelle determinazioni del tempo, sia nelle osservazioni pendolari.

Stazione	Luogo di osservazione	Posizione geografica	Altezza sul mare	Densità media del sottosuolo
Torino Osservatorio	Sotterraneo nel Palazzo Madama . . .	φ = 45°04′08″ θ = — 4 46 01	232^m,7	2,5
Torino Valentino . .	Locale al piano terreno, annesso al Gabinetto di Geometria prat. nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri . . .	φ = 45 03 12 θ = — 4 46 02	232^m,3	2,5
Pinerolo	Locale nelle scuole elementari	φ = 44 53 13.3 θ = — 5 07 06.4	370	2,6
Carmagnola . . .	Locale privato nell'Istituto Canonica . .	φ = 44 50 39.1 θ = — 4 43 53.4	240	2,5
Demonte	Locale privato (magazzino dell'Ospedale Civile)	φ = 44 18 43.0 θ = — 5 09 23.0	776	2,6
Mondovì	Aula delle Scuole ginnasiali	φ = 44 23 26 θ = — 4 37 29	475	2,5

Stazione	Luogo di osservazione	Posizione geografica	Altezza sul mare	Densità media del sottosuolo
Ormea	Locale nell'edifizio delle scuole elementari	$\varphi =$ 44°08′54″ $\theta =$ — 4 32 31	725^{m}	2,6
Cairo Montenotte .	Id. Id. Id. Id.	$\varphi =$ 44 23 58 $\theta =$ — 4 10 41	328	2,5
Acqui	Id. Id. Id. Id.	$\varphi =$ 44 40 25.4 $\theta =$ — 3 59 06.5	155	2,5
Novi Ligure . . .	Id. Id. Id. Id.	$\varphi =$ 44 45 37.4 $\theta =$ — 3 40 14.4	195	2,5

Le posizioni geografiche e le altezze furono dedotte per la massima parte dalle tavolette della Carta d'Italia ad $^{1}/_{25000}$, e per alcune dai quadranti ad $^{1}/_{50000}$. Le longitudini sono riferite al meridiano di Roma (M. Mario).

Osservazioni per la correzione del cro

Stazione	Data 1902	N. di stelle osservate	Tempo cronometr.
Torino Valentino . . .	22 Luglio	6	13^h,00
	25 „	6	13,00
Pinerolo	27 „	6	13,50
	28 „	6	13,20
	30 „	6	13,20
Carmagnola	31 „	6	13,40
	2 Agosto	6	13,20
Demonte	4 „	6	14,00
	5 „	6	13,20
	6 „	6	13,20
Mondovì	9 „	8	13,80
	10 „	6	13,60
	11 „	7	13,60
Ormea	13 „	6	15,20
	14 „	6	15,20
	15 „	6	13,30
Cairo Montenotte . . .	18 „	7	13,80
	19 „	8	13,80
Acqui	21 „	6	14,90
	22 „	6	14,30
	23 „	6	14,30
Novi Ligure	25 „	8	14,40
	28 „	8	14,10
Torino Valentino . . .	2 Dicembre	6	22,00
	3 „	6	22,00

tro Frodsham e del cronometro Plaskett.

Correzione ΔT del Frodsham	Errore medio	Correzione del Plasket	Tempo cronom.	Andamento orario del Plaskett
+ $3^h50^m30^s,54$	± 0,04	— $0^h40^m03^s,70$	$22^h,35$	— 0,175
+ 3 50 57,12	± 0,13	— 0 40 16,25	22,25	
+ 3 49 53,05	± 0,06	— 0 41 48,72	22,69	— 0,190
+ 3 50 03,18	± 0,11	— 0 41 53,19	22,25	— 0,177
+ 3 50 25,26	± 0,12	— 0 42 01,70	22,46	
+ 3 52 09,76	± 0,09	— 0 40 32,53	22,28	— 0,173
+ 3 52 31,71	± 0,12	— 0 40 40,78	21,88	
+ 3 51 10,85	± 0,14	— 0 42 32,68	22,80	— 0,154
+ 3 51 21,23	± 0,08	— 0 42 36,22	21,77	— 0,180
+ 3 51 31,62	± 0,11	— 0 42 40,60	22,05	
+ 3 54 11,41	± 0,10	— 0 40 45,10	22,53	— 0,159
+ 3 54 22,23	± 0,07	— 0 40 48,86	22,13	— 0,187
+ 3 54 32,35	± 0,14	— 0 40 53,42	22,45	
+ 3 55 14,65	± 0,13	— 0 40 39,95	23,10	— 0,170
+ 3 55 24,24	± 0,15	— 0 40 44,02	23,06	— 0,151
+ 3 55 34,06	± 0,10	— 0 40 47,46	21,85	
+ 3 57 31,46	± 0,05	— 0 39 32,80	22,02	— 0,176
+ 3 57 42,44	± 0,05	— 0 39 37,01	21,94	
+ 3 58 50,44	± 0,11	— 0 38 55,76	22,42	— 0,173
+ 3 59 01,63	± 0,15	— 0 38 59,82	21,84	— 0,170
+ 3 59 12,06	± 0,03	— 0 39 03,90	21,78	
+ 4 00 49,16	± 0,08	— 0 37 56,30	21,88	— 0,154
+ 4 01 20,88	± 0,09	— 0 38 07.34	21,44	
— 0 05 23,48	± 0,07	+ 0 30 04,53	17,46	— 0,040
— 0 05 25,15	± 0,04	+ 0 30 04,58	17,43	

Mediante l'andamento orario del cronometro Plaskett così determinato, e prendendo in ogni giorno di osservazioni pendolari 4 o 6 confronti col cronometro Frodsham, uniformemente distribuiti durante le osservazioni stesse, si dedussero gli andamenti orarii del Frodsham, coi quali si calcolarono le correzioni Δu da farsi alle durate d'oscillazione dei quattro pendoli.

Qui sono registrati i dati relativi ad un giorno di osservazione; per gli altri, essendosi sempre proceduto nell'identico modo, sono riferiti soltanto i risultati ottenuti.

Confronti cronometrici del cron. Frodsham col cron. Plaskett.

Stazione: Torino Valentino.

Giorno d'osservazione: 23 luglio 1902.

N. d'ordine	Plaskett	Frodsham	Combinazioni	Intervalli Plaskett	Intervalli Frodsham
1	$7^h05^m22^s,00$	$22^h34^m52^s,00$	4—1	$7^h01^m02^s,50$	$7^h02^m08^s,00$
2	8 51 29,50	0 21 16,00	5—2	7 11 01,00	7 12 08,00
3	10 40 42,50	2 10 46,00	6—3	7 17 54,00	7 19 02,00
4	14 06 24,50	5 37 00,00	somma	21 29 57,50	
5	16 02 30,50	7 33 24,00	correz.	— 3,75	
6	17 58 36,50	9 29 48,00	riduz. a tempo sid.	+ 3 31,90	
				21 33 25,65	
			Interv. Frodsham . . .	21 33 18,00	
			Correz. Frodsham . . .	+ 7,65	
			Variazione oraria . . .	+ $0^s,355$	

Correzione $\Delta u = +501$ in unità della 7ª cifra decimale.

Data	N. dei confronti	Andamento ordinario del Frodsham	Δu	Data	N. dei confronti	Andamento ordinario del Frodsham	Δu
28 Luglio	4	$+0^s,444$	+ 626	14 Agosto	4	$+0^s,416$	+ 587
29 „	4	+ 0,475	670	15 „	4	+ 0,462	652
1° Agosto	4	+ 0,475	670	19 „	6	+ 0,462	652
2 „	4	+ 0,471	665	22 „	4	+ 0,451	636
5 „	6	+ 0,462	652	23 „	4	+ 0,447	631
6 „	6	+ 0,445	628	26 „	4	+ 0,434	612
10 „	4	+ 0,463	653	27 „	4	+ 0,471	+ 665
11 „	4	+ 0,428	604	3 Dicembre	6	— 0,071	— 100

Nella stazione di Torino Osservatorio, l'andamento del Frodsham fu determinato mediante confronti presi col pendolo Martin dell'Osservatorio astronomico, le cui correzioni furono determinate dai dott. Balbi e Volta.

Durate di oscillazione in tempo siderale dei quattro pendoli ridotte a 0°, al vuoto ed all'ampiezza infinitesima.

Stazioni	Pendoli			
	41	42	45	46
Torino Osserv.	$0^s,5080261$	$0^s,5076876$	$0^s,5080341$	$0^s,5083355$
	301	879	365	389
Medie	281	877	353	372
Torino Val. (1)	283	895	375	358
	259	878	362	346
	274	889	362	342
	306	867	368	355
Medie	280	882	366	352

(1) Nella stazione di Torino Valentino, i pendoli si fecero oscillare due volte il giorno 23 luglio, prima di partire, e due volte il 3 dicembre, dopo il viaggio, onde verificare se i pendoli avessero subìto qualche mo-

Stazioni	Pendoli			
	41	42	45	46
Pinerolo . .	0^s,5080300	0^s,5076872	0^s,5080366	0^s,5083383
	281	6915	357	368
	303	6941	424	415
Medie	295	6909	382	389
Carmagnola .	460	7083	579	543
	474	7070	527	525
	442	7057	543	512
Medie	459	7070	550	527
Demonte . .	820	7426	901	893
	835	7425	900	889
	791	7411	900	890
Medie	815	7421	900	891
Mondovì . .	646	7225	714	713
	649	7234	686	671
	603	7198	689	661
Medie	633	7219	696	682
Ormea . .	696	7316	801	813
	740	7334	837	827
	750	7343	846	824
Medie	729	7331	828	821
Cairo Mont.e	424	7039	505	501
	461	7058	524	526
Medie	442	7048	514	513
Acqui . . .	512	7072	559	571
	510	7084	548	548
	483	7034	589	573
Medie	502	7063	565	564
Novi Ligure	548	7111	653	611
	548	7078	647	640
	578	7113	651	634
Medie	558	7101	650	628

dificazione. Le medie dei valori ottenuti nei due giorni sono le seguenti

	41	42	45	46
23 luglio	s = 0,5080271	0,5076886	0,5080368	0,5083352
3 dicembre	0290	6878	0365	3348
Diff.	+ 19	— 8	— 3	— 4

Da queste differenze si vede che i pendoli non hanno subìto alterazione alcuna.

Compensazione delle osservazioni.

Il prof. A. Venturi in una sua memoria (1) ha stabilito le formole che servono a compensare le osservazioni pendolari, determinandone col metodo dei minimi quadrati le correzioni in modo, che siano verificate le rigorose condizioni di eguaglianza fra i rapporti delle durate di oscillazione di due pendoli in due luoghi differenti. Nella stessa memoria l'egregio A. ha dimostrato anche che, nell'ipotesi di pendoli aventi lunghezze sensibilmente eguali, il valore più probabile della gravità in un luogo è dato dalla media aritmetica dei quattro valori risultanti separatamente da ciascuno dei quattro pendoli. Benchè adunque sembri superfluo applicare tale metodo di compensazione per avere il valore della gravità nelle diverse stazioni, nondimeno mi parve utile il farlo, sia per avere i valori più probabili delle durate di oscillazione dei pendoli nei differenti luoghi, sia per avere l'error medio che compete ad ogni valore definitivo di esse, e quindi l'error medio relativo ai risultati.

In questo calcolo ho ritenuto le osservazioni tutte di egual peso; mentre nelle stazioni di Torino Osservatorio, e Cairo Montenotte, essendosi fatti oscillare i pendoli due volte solamente, le osservazioni dovrebbero avere peso minore: ho creduto bene nondimeno di ritenerle del medesimo peso, a cagione delle condizioni eccezionalmente buone in cui le due stazioni furono eseguite.

Ritenendo gli stessi simboli adottati dal prof. Venturi nella sua memoria, ricorderò soltanto che, dicendo

$$s_{1,m} \quad s_{2,m} \quad s_{3,m} \quad s_{4,m}$$

le durate di oscillazione dei pendoli 1, 2, 3, 4 nella stazione m^a, si calcolano dapprima le quantità

$$w_{3m-2} = s_{1,m}\, s_{2m+1} - s_{1,m+1}\, s_{2m}\,; \quad w_{3m-1} = s_{1,m}\, s_{3,m+1} - s_{1,m+1}\, s_{3,m}$$

$$w_{3m} = s_{1,m}\, s_{4,m+1} - s_{1,m+1}\, s_{4,m}$$

indi i tre gruppi di quantità

$$w_{1,m}\,,\ w_{2,m}\,,\ w_{3,m}\,;\ v_{3m-2}\,,\ v_{3m-1}\,,\ v_{3m}\,;\ V_{3m-3}\,,\ V_{3m-2}\,,\ V_{3m-1}$$

(1) Cfr. A. Venturi, *Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre,* " N. Cimento ", serie IV, Gennaio 1900.

dati dalle formole ricorrenti

$$(1)\quad \begin{cases} w_{1,m} = w_{3m-2} + \dfrac{m-1}{m}\, w_{1,m-1} \\[2ex] w_{2,m} = w_{3m-1} + \dfrac{m-1}{m}\, w_{2,m-1} \\[2ex] w_{3,m} = w_{3,m} + \dfrac{m-1}{m}\, w_{3,m-} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} v_{3m-2} = w_{1,m} \\[2ex] v_{3m-1} = w_{2,m} - \dfrac{1}{2}\, w_{1,m} \\[2ex] v_{3m} = w_{3,m} - \dfrac{1}{3}\,(w_{2,m} + w_{1,m}) \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} V_{3m-3} = v_{3m-3} + \dfrac{m}{m+1}\, V_{3m} \\[2ex] V_{3m-4} = v_{3m-4} + \dfrac{m}{m+1}\, V_{3m-1} \\[2ex] V_{3m-5} = v_{3m-5} + \dfrac{m}{m+1}\, V_{3m-2} \end{cases}$$

osservando che, se r è il numero delle stazioni, compresa la fondamentale, m va da 1 ad $r-1$ nei gruppi (1) e (2), e da $r-1$ a 2 nel gruppo (3), e che inoltre si ha:

$$V_{3r-3} = v_{3r-3}\,;\quad V_{3r-4} = v_{3r-4}\,;\quad V_{3r-5} = v_{3r-5}$$

dove $h = r - 1$.

Assumendo come stazione fondamentale, Torino Osservatorio, si ottengono i seguenti valori numerici delle quantità sopra considerate, espressi in unità della 7ª decimale.

Valori di w_{3m-2}, w_{3m-1}, w_{3m}.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w_{3m-}	+3,15	+ 6,11	− 1,47	−2,42	−10,22	+ 8,16	+ 1,93	−22,84	− 9,12
w_{3m-1}	+7,12	+ 0,51	+ 2,03	−3,05	−11,18	+18,29	−13,72	− 4,57	+14,73
w_{3m}	−9,65	+11,18	−13,26	+3,96	−13,66	+21,81	−10,58	− 4,59	+ 4,05

Valori di $w_{1,m}$, $w_{2,m}$, $w_{3,m}$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$w_{1,m}$	+3,15	+7,63	+3,62	+0,30	— 9,98	—0,16	+1,79	—21,27	—28,03
$w_{2,m}$	+7,12	+4,07	+4,74	+0,51	—10,77	+9,32	—5,73	— 9,58	+ 6,21
$w_{3,m}$	—9,65	+6,36	—9,02	—2,81	—15,91	+8,55	—3,25	— 7,43	— 2,55

Valori delle v_i e V_i.

i	v	V	i	v	V	i	v	V
1	+ 3,05	— 3,19	10	+ 0,30	— 32,84	19	+ 1,79	— 39,54
2	+ 5,60	+ 10,74	11	+ 0,36	+ 8,81	20	— 6,63	+ 10,48
3	— 13,04	— 18,89	12	— 3,08	— 3,92	21	— 1,94	+ 4,37
4	+ 7,63	— 9,36	13	— 9,98	— 39,77	22	— 21,27	— 46,50
5	+ 0,23	+ 7,71	14	— 5,78	+ 10,14	23	+ 1,05	+ 19,25
6	+ 2,43	— 8,78	15	— 8,99	— 1,01	24	+ 2,85	+ 7,10
7	+ 3,62	— 22,65	16	— 0,16	— 34,76	25	— 28,03	— 28,03
8	+ 2,93	+ 9,98	17	+ 9,40	+ 18,57	26	+ 20,22	+ 20,22
9	— 11,81	— 14,95	18	+ 5,49	+ 9,31	27	+ 4,72	+ 4,72

Con questi valori si calcolarono le correzioni delle durate di oscillazione per ognuno dei pendoli nelle varie stazioni, in unità della 7ª decimale del minuto secondo.

Correzioni delle durate di oscillazione.

Pendoli	Torino Osservatorio	Torino Valentino	Pinerolo	Carmagnola	Demonte	Mondovì	Ormea	Cairo Montenotte	Acqui	Novi Ligure
41	+ 2,7	+3,0	+ 11,9	+ 5,5	+4,8	— 12,8	+ 11,4	+ 0,2	— 15,8	— 11,0
42	— 0,5	—6,3	— 9,7	— 13,0	—8,9	— 6,1	+ 1,8	— 13,3	+ 16,4	+ 39,5
45	+ 11,9	—2,1	+ 5,8	— 4,6	+0,7	+ 5,5	— 6,9	+ 9,4	+ 2,5	— 22,1
46	— 14,2	+5,4	— 8,1	+ 12,1	+3,4	+ 13,2	— 6,3	+ 3,7	— 3,1	— 6,4

Applicando le precedenti correzioni si hanno le seguenti durate di oscillazione corretta.

Durate di oscillazione corrette.

Stazioni	Pendoli			
	41	42	45	46
Torino Oss. .	0^s,5080284	0^s,5076877	0^s,5080365	0^s,5083358
Torino Valent.	0283	6876	364	357
Pinerolo . .	0307	6899	388	381
Carmagnola .	0465	7057	545	539
Demonte . .	0820	7412	901	894
Mondovì . .	0620	7213	702	695
Ormea . . .	0740	7333	821	815
Cairo . . .	0442	7035	523	517
Acqui . . .	0486	7079	568	561
Novi . . .	0547	7141	628	622

Con questi valori si calcolarono i residui di osservazione, che risultarono sensibilmente nulli.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w_{3m-2}	— 0,05	— 0,10	+ 0,10	+ 0,02	+ 0,13	— 0,11	— 0,05	+ 0,30	+ 0,17
w_{3m-1}	— 0,10	0,00	0,00	— 0,01	+ 0,10	— 0,20	+ 0,20	+ 0,05	— 0,10
w_{3m}	+ 0,15	— 0,20	+ 0,20	— 0,08	+ 0,15	— 0,22	— 0,20	+ 0,05	— 0,07

L'error medio unitario ϵ, e quindi l'error medio E che compete ad ogni valore definitivo delle durate di oscillazione, dati dalle formole:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{12\,S^2(r-1)} \sum_1^{r-1} \frac{m}{m+1} \left[4(w_{1,m}^2 + w_{2,m}^2 + w_{3,m}^2) - (w_{1,m} + w_{2,m} + w_{3,m})^2\right]$$

$$E = \epsilon \sqrt{\frac{r+3}{4r}}$$

ponendo

$$r = 10 \qquad S = 0^s,508$$

risultano rispettivamente

$$\epsilon = 0^s,0000013.2$$
$$\mathsf{E} = 0^s,0000007.5 \ .$$

Quindi l'error medio Mg da cui può essere affetto il valore di g, dato dalla formola

$$Mg = \frac{g}{S} \mathsf{E} \sqrt{8}$$

risulta

$$Mg = 0^m,00004.$$

Calcolo dei valori di g.

Dalle durate di oscillazione corrette, applicando la formola:

$$g_t - g_i = g_t \frac{(s_i + s_t)(s_i - s_t)}{s_i^2}$$

in cui g_t è il valore della gravità a Torino Osserv., e g_i quello nella stazione i^a, s_t ed s_i le durate di oscillazione di un pendolo nelle due stazioni, si deducono, considerando p. es. il pendolo 41, ed assumendo

$$g_t = 9,80571$$

i seguenti valori di $g_t - g_i$:

Valori di $g_t - g_i$.

Stazioni	$g_t - g_i$	Stazioni	$g_t - g_i$
Torino Valent.	— 0,000004	Ormea . . .	+ 0,001760
Pinerolo . . .	+ 0,000089	Cairo Monten.	+ 0,000610
Carmagnola .	+ 0,000699	Acqui . . .	+ 0,000780
Demonte . .	+ 0,002069	Novi Ligure .	+ 0,001015
Mondovì . . .	+ 0,001297		

Mediante i valori di $g_t - g_i$ dati nella precedente tavola, ed applicando inoltre le correzioni:

$$+ g \frac{2H}{R}$$

dovute all'altezza H del luogo di osservazione

$$- g \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\theta}{\theta_m} \cdot \frac{H}{R}$$

dovuta all'attrazione delle masse sottostanti alla stazione, e la correzione topografica calcolata col metodo solito (1) si ottennero i risultati segnati nella seguente tavola, in cui sono pure registrati i valori della gravità teorica al livello del mare, calcolati colla formola:

$$\gamma_0 = 9^m,780 \, (1 + 0,005310 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

e le anomalie di gravità corrispondenti.

Stazioni	Gravità osservata	Correzione per l'altitudine	Corr. per le masse sottostanti	Correzione topografica	Gravità ridotta al livello del mare G_0	Gravità teorica γ_0	Anomalie di gravità $G_0 - \gamma_0$
Torino Valent.	9^m,80571	+ 72	— 24	—	9^m,80619	9^m,80603	+ 16
Pinerolo . .	562	114	40	+ 3	639	586	+ 53
Carmagnola .	501	74	25	—	550	582	— 32
Demonte . .	364	239	83	+ 11	531	534	— 3
Mondovì . .	441	146	49	+ 1	539	541	— 2
Ormea . . .	395	223	78	+ 12	552	519	+ 33
Cairo Monten.	510	101	34	+ 1	578	542	+ 36
Acqui . . .	493	48	16	—	525	567	— 42
Novi Ligure .	469	60	20	—	509	575	— 66

(1) Cfr. Robert v. Sterneck, *Die Schwerkraft in den Alpen*, " Mitth. des k. u. militär-geograph. Instit. „, XI Bd.

Adoperando invece pel calcolo di γ_0 la formola data dal Prof. Helmert (1):

$$\gamma_0 = 978^{cm},075 \{ 1 + 0,005287 \operatorname{sen}^2\varphi - 0,000018 \operatorname{sen}^2 2\varphi \}$$

ed applicando in seguito ai valori di γ_0 trovati, la correzione $-0^{cm},015$ si avrebbero i seguenti valori di γ_0 e di $G_0 - \gamma_0$:

	γ_0	$G_0 - \gamma_0$
per Torino	$9^m,80623$	-4
„ Pinerolo	606	$+33$
„ Carmagnola	602	-52
„ Demonte	554	-23
„ Mondovì	561	-22
„ Ormea	539	$+13$
„ Cairo Montenotte	562	$+16$
„ Acqui	587	-62
„ Novi Ligure	595	-86

Dal Gabinetto di Geodesia della R. Università.
Torino, Marzo, 1903.

(1) Cfr. F. R. Helmert, *Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau*, " Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin „, XIV, 1901.

Sulla teoria degli spazii che ammettono un gruppo conforme.

Nota di GUIDO FUBINI.

In una memoria pubblicata negli *Annali di Matematica* (1902) e in altre due che spero presto pubblicate ho trattato della teoria degli spazii che ammettono un gruppo di movimenti, o un gruppo di trasformazioni geodetiche. Nel presente lavoro tratterò la teoria dei gruppi conformi, che è assai intimamente connessa con la teoria dei gruppi di movimenti.

§ 1. — *Se un gruppo* G *è un gruppo di trasformazioni conformi per uno spazio* S_n *e se ammette delle* V_m *come varietà (a* m *dimensioni) minime invarianti* ($m \leq n$) *il gruppo si può ridurre con un cangiamento di variabili a un gruppo su* m *variabili con sole* m *trasformazioni linearmente indipendenti.*

E di più:

Se $m < n$, *lo spazio* S_n *è rappresentabile conformemente su un altro spazio* S_n' *per cui* G *è un gruppo di movimenti.*

La prima parte è evidente se $m = n$. Sia dunque $m < n$. Con le varietà V_m invarianti noi certamente potremo formare almeno ∞^1 V_{n-1} invarianti (se $m = n - 1$ già le V_m stesse ci dànno un tale sistema). Prendiamo queste V_{n-1} come varietà $x_1 =$ cost. e consideriamone le traiettorie ortogonali (ciò ch' è sempre possibile a meno del caso, *che escludiamo,* che queste V_{n-1} siano tangenti in ciascun loro punto A al cono di linee di lunghezza nulla uscenti da A).

Prendiamo ora come per superficie coordinate $x_2, x_3, \ldots, x_n$ delle varietà formate con queste traiettorie ortogonali. Siccome il gruppo è conforme e le V_{n-1} sono invarianti, queste traiettorie ortogonali formeranno certamente un sistema d'imprimitività. Se una trasformazione infinitesima del nostro gruppo è

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

dovrà dunque essere $\xi_1 = 0$; di più le $\xi_2 \ldots \xi_n$ non potranno che dipendere dalle $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Il gruppo è perciò un gruppo su $n-1$ variabili, che trasforma conformemente in sè non solo lo spazio S_n, ma una qualsiasi delle V_{n-1} considerate. Di più le varietà minime invarianti sono delle V_m. Se $m < n-1$ applicando a una qualsiasi delle V_{n-1} precedenti il ragionamento ora applicato a S_n dimostreremo che il nostro gruppo si può ridurre operante su sole $n-2$ variabili e così via. Il nostro teorema è con ciò senz' altro dimostrato. Ma di più si è fatta l'importante osservazione:

Se $m < n$, *ossia se il gruppo è intransitivo, esso si può immaginare operante soltanto su* $n-1$ *variabili* $x_2, x_3, \ldots, x_n$ *e di più si può supporre che le* $x_1 = \text{cost.}$ *siano ortogonali alle* $x_2 = \text{cost.}$, $x_3 = \text{cost.}, \ldots, x_n = \text{cost.}$

Ossia, indicando al solito con

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$$

l'elemento lineare del nostro spazio si potrà supporre

$$a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0,$$

e perciò poichè (1) si suppone non degenere sarà

$$a_{11} \neq 0.$$

Passando perciò dal nostro spazio a uno spazio rappresentabile su esso conformemente, potremo supporre

$$a_{11} = 1.$$

Prima ora di dimostrare la seconda parte del nostro teorema scriviamo le equazioni che ci esprimono che la trasformazione

$$X = \sum_{1}^{n} \xi_r \frac{\partial}{x_r}$$

è conforme per lo spazio (1). Dovremo perciò esprimere che

$$X(\Sigma a_{ik} dx_i dx_k)$$

è, a meno di un fattore, identica con

$$\Sigma a_{ik} dx_i dx_k.$$

Indicando con k una funzione arbitraria delle x, avremo perciò:

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{n} \left(\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right) = k a_{ik} \quad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

Nel caso attuale scriviamo la (2) per $i = k = 1$. Notiamo che $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0$, $\xi_1 = 0$. La (2) diventa:

$$0 = k$$

e le (2) si riducono alle equazioni di Killing che esprimono essere le nostre trasformazioni dei puri movimenti del nostro spazio. c. d. d.

§ 2. — Abbiamo perciò un primo risultato: *Se un gruppo* G *si può considerare come gruppo conforme di due spazii a un numero differente di dimensioni, allora* G *si può considerare anche come gruppo di movimenti di uno spazio a* m *dimensioni* (se il gruppo G ha delle V_m per varietà minime invarianti) *e quindi anche di uno spazio a* " m + t „ (t intero positivo qualsiasi) *dimensioni* (Cfr. la mia Mem. cit., pag. 48).

Abbiamo perciò:

Quei gruppi di trasformazioni conformi che non si possono considerare come gruppi di movimenti godono della proprietà caratteristica (tra i gruppi conformi) di non poter essere considerati come gruppi di trasformazioni conformi che di spazii, le dimensioni dei quali sono in numero uguale alle dimensioni delle varietà minime invarianti del gruppo.

Noi sappiamo infatti (loc. cit.) che per i gruppi di movimenti la cosa è assolutamente l'opposta.

Di gruppi conformi di tale specie offrono un esempio il gruppo delle similitudini e quello delle inversioni per raggi vettori reciproci dello spazio euclideo.

Essi sono però transitivi e quindi si potranno pure, come i gruppi di movimenti, determinare tutti risolvendo equazioni finite; e sole quadrature permetteranno di ottenerli sotto forma finita (Cfr. mia Mem. citata, § 5).

§ 3. — Dimostreremo ora il seguente teorema, analogo a quello del § 6 della mia Memoria citata:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo immaginato operante in uno spazio euclideo si possa considerare come gruppo conforme, è che quel suo sottogruppo Γ *che lascia fisso un punto generico* A *lasci fisse le direzioni uscenti da esso poste sopra un cono quadrico.*

Da cui dedurremo:

Le direzioni uscenti dal punto A *generico sono trasformate dal sottogruppo che lascia fisso* A *mediante un gruppo simile a un sottogruppo del gruppo dei movimenti di uno spazio non euclideo a* " n — 1 „ *dimensioni* (che sarà ellittico se il nostro spazio è reale).

La condizione testè enunciata è certamente necessaria; dimostreremo ora che è sufficiente; di più dimostreremo, poichè tutti i gruppi conformi si possono ottenere per quadrature sotto forma finita, che *anche tutti gli spazii corrispondenti si possono ottenere per quadrature* e vedremo quale è l'*indeterminazione che resta nell'elemento lineare.* Per semplicità supporremo senz'altro il gruppo transitivo in n variabili, notando esplicitamente che se il gruppo fosse intransitivo, si dovrebbe verificare la condizione enunciata almeno in un punto di ciascuna varietà minima invariante.

Una trasformazione qualsiasi del nostro gruppo che porti un qualsiasi punto B in un punto C si può sempre immaginare ottenuta come prodotto di una trasformazione che porti B in A e di una che porti A in C. Basterà perciò dimostrare che esiste uno spazio tale che se una trasformazione qualunque porta A p. es. in C, gli intorni di A e di C si corrispondono in guisa che due direzioni uscenti da A e le due corrispondenti da C formano angoli uguali. Prendiamo ora in A i valori dei coefficienti dell'elemento lineare

$$\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$$

uguali o proporzionali ai coefficienti corrispondenti di quel cono quadrico (oppure di uno di quei coni quadrici) che Γ lascia fissi. Prendiamo ora ∞^n trasformazioni del nostro gruppo tali che nessuna di esse lasci fisso A (eccetto l'identità) e che due distinte

portino A in punti distinti. Questo insieme S di trasformazioni insieme a Γ genera il nostro gruppo.

Una trasformazione di S è individuata dalle coordinate $x_1' \ldots x_n'$ del punto, in cui essa trasporta il punto A. Ognuna di esse dovrà essere conforme per lo spazio cercato, ossia ne moltiplicherà l'elemento lineare per una certa funzione $k(x_1 \ldots x_n)$ variabile caso mai con $x_1' \ldots x_n'$, che noi potremo indicare con $k(x_1 x_2 \ldots x_n x_1' \ldots x_n')$. Io dico che, *scelti nel modo su scritto i valori delle* a_{ik} *nel punto* A *si può scegliere ancora a piacere la funzione* $h(x_1 \ldots x_n)$ (*purchè nel punto* A *questa funzione sia uguale a* 1) *che si deduce dalla* k *ponendovi*

$$x_1' = x_1 ; \ldots ; x_n' = x_n .$$

Tutto il resto resta allora determinato senza ambiguità.

(Nel caso di gruppi intransitivi si dovrebbe ripetere questo ragionamento per un punto A di ciascuna varietà minima invariante; la scelta dei valori delle a_{ik} in questi punti A porta all'introduzione di nuove funzioni arbitrarie).

Infatti con tale scelta noi sappiamo che quella trasformazione di T^0 di S che porta A in un punto $C = (x_1^0 \ldots x_n^0)$ deve moltiplicare $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ per $h(x_1^0 \ldots x_n^0)$. E poichè i valori di a_{ik} in A sono noti, T^0 si suppone conosciuto (e quindi è anche conosciuta la corrispondenza tra l'intorno di A e quello di C, ossia tra i differenziali delle x nei punti A e C) si ottengono subito delle relazioni lineari che dànno i valori di a_{ik} nel punto C. Fissate così le a_{ik} in tutto lo spazio, è ben chiaro che lo spazio ammette allora il nostro gruppo come gruppo conforme. Basta infatti che dimostriamo che una trasformazione del gruppo che porta A in un punto C stabilisce una corrispondenza conforme tra gl'intorni dei due punti. Ciò che è evidente, poichè una tale trasformazione è prodotto di una trasformazione di Γ per T_0. Ora i valori di a_{ik} in A furono scelti in guisa, che Γ trasformi in modo conforme l'intorno di A in sè stesso e i valori delle a_{ik} in C furono scelti appunto in modo che T^0 stabilisse una corrispondenza conforme tra gl'intorni di A e di C.

Tutte le nostre asserzioni sono così dimostrate. Noteremo che il cono lasciato fisso da Γ non deve essere degenere, perchè altrimenti l'elemento lineare sarebbe degenere, ecc. ecc.

Come si esprime analiticamente la condizione suaccennata? Noi seguiremo perciò un procedimento già usato nella mia Mem. cit. e supporremo per brevità il gruppo transitivo.

Se

$$X_k \quad \sum_{r=1}^{n} \xi_r^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_r} \qquad (k=1,\dots n)$$

sono le trasformazioni linearmente indipendenti del gruppo dato e le altre trasformazioni sono:

$$X_{n+t} = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{(t)} X_l \qquad (t=1, \dots, m)$$

se il gruppo è a $n+m$ parametri, dove le $\varphi_l^{(t)}$ sono funzioni delle x_i, scriviamo le equazioni (2) indicando con $k_1, k_2, \dots, k_n$, $k_{n+1}, \dots, k_{n+m}$ i valori che si devono intendere sostituiti a k nelle (2), secondo che si scrivono per la X_1 o per la X_2, ecc. o per la X_{n+m}. Sottraendo dall'equazione relativa a X_{n+t} quelle relative a X_k moltiplicate per $\varphi_k^{(t)}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ otteniamo:

$$(3) \qquad \sum_{l,r} \left(a_{i_r} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_k} + a_{k_r} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_i} \right) = F_t a_{ik}$$

dove F_t è una funzione delle $x_1 \dots x_n$. La risolubilità di queste equazioni rispetto alle a_{ik} in un punto generico A (quando al posto delle F_t si pongano costanti pure da determinarsi) traduce analiticamente la nostra condizione. Le (3) ci dànno nello stesso tempo a quali relazioni devono soddisfare i valori da scegliersi per le a_{ik} in A.

§ 4. — Dalle precedenti considerazioni si può trarre una notevole conseguenza. Consideriamo un sottogruppo del gruppo proiettivo di uno spazio a $n-1$ dimensioni, in cui indicheremo con $x_1, x_2, \dots x_n$ le coordinate omogenee. Una trasformazione

$$(4) \quad (b_{11}x_1+b_{12}x_2+\dots+b_{1n}x_n)p_1+\dots+(b_{n1}x_1+\dots+b_{nn}x_n)p_n \quad \left(p_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

lascierà fissa una quadrica

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k$$

se è

$$\sum_i (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)(b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n) = k \sum a_{ik} x_i x_k$$

$$(k,\ b_{ik},\ a_{ik} \text{ costanti}).$$

Se perciò quelli tra i polinomii $b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n$ non identicamente nulli sono proporzionali (o in particolare se ve n'è uno solo) in modo che si possa porre

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = k_i(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n)$$

si avrà

$$(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n) \sum k_i(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = k \sum a_{ik} x_i x_k.$$

Se dunque non è identicamente

$$b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n = 0$$

allora $\sum a_{ik} x_i x_k$ o è un cono sdoppiato in due iperpiani, oppure (se $k = 0$) $\sum k_i(a_1,\ x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = 0$ e perciò esso è a discriminante nullo e quindi degenere. Se noi escludiamo questo ultimo caso, il cono si sdoppia in due iperpiani senza essere degenere; perciò $n = 2$. *Dunque se in* (4) *indichiamo con* $x_1 \ldots x_n$ *le coordinate delle direzioni uscenti da un punto* A *di* S_n *e* (4) *indica come esse sono trasformate da una trasformazione infinitesima di un gruppo conforme di* S_n *che lasci fisso* A, *allora se* (4) *non è identicamente nulla, non possono i coefficienti di* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *essere proporzionali, se* $n > 2$. In particolare dedurremo:

Uno spazio a più che 2 *dimensioni non può ammettere due trasformazioni infinitesime conformi distinte con le stesse traiettorie.*

Indicando con $y_1 \ldots y_n$ le coordinate dello spazio in discorso, le due trasformazioni infinitesime si potrebbero immaginare ridotte alla forma $\frac{\partial}{\partial y_1}$, $\lambda(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial}{\partial y_1}$; tra le trasformazioni che lasciano fisso un punto generico $A \equiv (y_1^0 \ldots y_n^0)$ vi sarebbe la:

$$[\lambda(y_1 \ldots y_n) - \lambda(y_1^0 \ldots y_n^0)] \frac{\partial}{\partial y_1}$$

e usando le precedenti notazioni per le direzioni uscenti da A si avrebbe che esse dovrebbero essere permutate dalla trasformazione infinitesima:

$$p_1 \sum b_i x_i \quad \text{dove} \quad b_i = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_i}\right)_{y_1 = y^0_1; \ldots; y_n = y^0_n}.$$

Questa dovrebbe lasciar fisso un cono, che per il teorema precedente sarebbe per $n>2$ degenere a meno che $b_i = 0$, ossia a meno che le derivate prime di λ in un punto generico fossero nulle, ossia che λ fosse costante e quindi le due trasformazioni iniziali non fossero distinte.

È ben chiaro che per $n = 2$ il teorema non vale più. Infatti per una superficie

$$ds^2 = 2a_{12}\, dx_1\, dx_2$$

le due trasformazioni $\frac{\partial}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ formano un gruppo conforme. Per il caso di movimenti questo teorema fu già dimostrato dal Prof. Bianchi.

Ricordiamo ora che già Lie dimostrò (Lie, *Transformationsgruppen,* 1893, Bd. 3, Kap. 17-18) che uno spazio S_n $(n>2)$ ammette solo gruppi finiti di trasformazioni conformi e che per $n = 2$ i gruppi finiti di trasformazioni conformi non hanno più di 6 parametri. Egli trovò poi che un gruppo conforme, che permuti le direzioni uscenti da un punto nel modo più generale possibile, è sempre identico (simile) col gruppo dei movimenti di uno spazio a curvatura costante, o delle similitudini di uno spazio euclideo, o del gruppo dei movimenti, delle similitudini e delle inversioni per raggi vettori reciproci di uno spazio euclideo.

§ 5. — Sia ora un gruppo G_r generato dalle $X_1 X_2 \ldots X_r$ conforme per lo spazio

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Avremo, indicando con F_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ delle funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(\alpha) \qquad X_i(ds^2) = F_i\, ds^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Sia poi:

$$(\beta) \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=1}^r c_{iks} X_s.$$

Dalla (α) si deduce:

$$X_k[X_i(ds^2)] = X_k(F_i)\, ds^2 + F_i(X_k\, ds^2) = X_k(F_i)\, ds^2 + F_i F_k\, ds^2$$

donde, scambiando i, k e sottraendo membro a membro:

$$(X_i X_k)(ds^2) = [X_i(F_k) - X_k(F_i)]\, ds^2$$

ossia per (α), (β):

$$\left[\sum_{s=1}^{r} c_{iks} F_s\right](ds^2) = [X_i(F_k) - X_k(F_i)]\, ds^2$$

ossia:

$$(\gamma) \qquad \sum_{s=1}^{r} c_{iks} F_s = X_i(F_k) - X_k(F_i).$$

§ 6. — Noi dimostreremo ora il seguente teorema:

Se un gruppo G *conforme si può considerare come gruppo reale di movimenti, uno spazio* S *che ammette* G *come gruppo conforme è conformemente rappresentabile su un altro che ammette* G *come gruppo di movimenti.*

Siano delle V_m le varietà minime invarianti di G. Se S è più che a m dimensioni, il teorema ci è già noto (§ 1). Possiamo dunque senz'altro limitarci al caso che S abbia proprio m dimensioni. Se G fosse in un tale S_m semplicemente transitivo, la dimostrazione sarebbe senz'altro compiuta per mezzo delle (γ). Infatti se ds^2 è l'elemento lineare dello spazio ed M una funzione qualunque delle coordinate $x_1 x_2 \ldots x_m$ e se $X_1 \ldots X_m$ sono le trasformazioni definenti G, avremmo

$$X_i(ds^2) = F_i ds^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

donde:

$$X_i[M ds^2] = [F_i + X_i(M)]\, ds^2.$$

Le equazioni $F_i + X_i(M) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ dànno le derivate prime di M in funzione di M e formano un sistema completo per le (γ). La M così definita a meno di un fattore costante è tale che per l'elemento lineare $ds'^2 = M ds^2$ il gruppo G è un gruppo di movimenti.

Nel caso generale indichiamo con ds'^2 quella forma quadratica differenziale in M variabili, per cui G si può considerare come gruppo di movimenti. Noi potremo chiaramente con una trasformazione reale di variabili fare sì che ds'^2 in un punto

generico, che potremo supporre a coordinate nulle, assuma la forma:

$$(\delta) \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2$$

ossia, se $ds'^2 = \sum_1^m c_{ik} dx_i dx_k$ che sia:

$$c_{ii}(0, \ldots 0) = 1 \qquad c_{ik}(0, \ldots 0) = 0 \; (i \neq k)$$

G è transitivo nelle m variabili $x_1 \ldots x_m$ ed è un gruppo di movimenti per ds'^2. Quindi, indicando con p_i le $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ il gruppo conterrà m trasformazioni infinitesime del tipo

$$(A) \qquad p_i + \ldots\ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dove i termini trascurati contengono termini almeno del prim'ordine nelle x_i. Conterrà poi eventualmente delle trasformazioni con dei termini di primo ordine nelle x_i che per la forma (δ) dell'elemento lineare presso all'origine, dovranno essere del tipo

$$(B) \qquad \Sigma b_{ik} x_i p_k + \ldots \qquad , \qquad (b_{ik} = - b_{ki})$$

dove i termini trascurati sono almeno di second'ordine nelle x. Nè potrà contenere altre trasformazioni comincianti con termini di second'ordine nelle x, perchè una trasformazione d'un gruppo di movimenti che lasci invariati un punto e le direzioni uscenti da esso si riduce chiaramente all'identità. Sia ora ds^2 l'elemento lineare dello spazio S, per cui G è un gruppo conforme. Nel punto $A = (0, 0, \ldots, 0)$ questo elemento lineare divenga:

$$\Sigma a_{ik} dx_i \, dx_k.$$

Le trasformazioni che si ottengono da (B) trascurando i termini di ordine superiore al primo devono trasformare in sè il cono

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Sia

$$\Sigma b_{ik} x_i p_k \qquad (b_{ik} = - b_{ki})$$

una di queste trasformazioni. Dovrà essere:

$$\sum_k \Big[\sum_i a_{ik} x_i \sum_l b_{lk} x_l \Big] = h \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

dove h è costante. Donde in particolare:

$$\sum_k a_{ik} b_{ik} = h a_{ii}$$

e sommando rispetto a i

$$\sum_{i,k} a_{ik} b_{ik} = h \sum_i a_{ii} .$$

Ora, scambiando i, k il primo membro cangia segno perchè $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = - b_{ki}$. È perciò:

$$h \Sigma a_{ii} = 0.$$

Se noi ci limitiamo a spazii reali, deve essere $\Sigma a_{ii} \neq 0$. È dunque $h = 0$. Ora ricordiamo che lo spazio S è (§ 3) definito, quando oltre al dare i valori iniziali a_{ik} nel punto $(0, ..., 0)$ dei coefficienti del suo elemento lineare, si dia la funzione (cfr. § 3) $h(x_1, x_2 .... x_n)$ a cui si riduce la $k(x_1 ... x_n x_1' ... x_n')$. La serie G del § 3 rispetto a cui si calcolava la k si può ora immaginare quella generata dalle (A). Io dico che se noi moltiplichiamo l'elemento lineare ds^2 per questa funzione $h(x_1 .... x_n)$ io ottengo effettivamente uno spazio per cui G è un gruppo di movimenti. Sia infatti ds''^2 l'elemento lineare così ottenuto. Una trasformazione che porti il punto $(0, ..., 0)$ nel punto generale $(x_1 x_2 .... x_m)$ e che appartenga alle trasformazioni generate dalle (A) porta infatti la forma quadratica cui si riduce l'elemento lineare ds^2 nel punto $(0, 0, ... 0)$ alla forma quadratica cui si riduce ds^2 nel punto $(x_1 .... x_n)$ moltiplicata per $h(x_1 .... x_m)$, ossia appunto alla forma quadratica cui si riduce ds''^2 nel punto $(x_1 .... x_m)$. Di più osserviamo che per quanto abbiamo dimostrato più sopra una trasformazione che lasci fisso il punto $A = (0, 0, ... 0)$ lascia invariata (moltiplica proprio per 1) la forma quadratica, cui si riducono ds^2 e ds''^2 nel punto $(0, ..., 0)$. Basta allora ripetere i ragionamenti del § 3 per riconoscere che G per ds''^2 è un gruppo di movimenti. E di più noi abbiamo dimostrato che *se il gruppo* G *è transitivo, quello spazio* S′ *su cui* S *è conformemente applicabile e per cui* G *è un gruppo di movimenti è definito a meno di una similitudine.*

§ 7. — Noi dunque abbiamo con questo teorema esaurita la ricerca degli spazii S che ammettono un gruppo conforme G

che si possa considerare come gruppo di movimenti; e ci rivolgeremo allo studio degli spazii S_m che ammettono un gruppo G che non si può considerare come gruppo di movimenti. Per il teorema del § 1 il gruppo G dovrà essere transitivo nello spazio S_m. Nel punto generico A di S potremo con un cangiamento di variabili supporre nulle le coordinate $x_1 \ldots. x_m$ e l'elemento lineare ridotto alla forma:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2.$$

Avremo poi m trasformazioni infinitesime di ordine nullo nelle x_i

$$\text{(C)} \qquad X_1 = p_1 + \ldots;\ X_2 = p_2 + \ldots;\ \ldots;\ X_m = p_m + \ldots$$

dove i termini trascurati sono almeno del primo ordine. Il gruppo non potendo essere semplicemente transitivo (chè allora potrebbe anche considerarsi come gruppo di movimenti), avremo delle trasformazioni di prim'ordine, che per la forma che ha in A l'elemento lineare, saranno del tipo

$$\text{(D)} \qquad \alpha(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m) + \Sigma b_{ik} x_i p_k + \ldots \quad (b_{ik} = -b_{ki}).$$

E potranno esistere anche delle trasformazioni del secondo ordine o di ordine superiore. Notiamo che se esiste una trasformazione U del second'ordine, le $(X_i U)$ $(i = 1, \ldots, m)$ dànno origine a trasformazioni del prim'ordine che devono essere del tipo precedente; quindi (Lie, loc. cit.) esse saranno del tipo:

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu \left\{ 2x_\nu \sum_1^m x_k p_k - \sum_1^m x_k^2 p_\nu \right\} + \ldots$$

Le α, b_{ik}, b_ν sono costanti.

Se il gruppo contiene una trasformazione del prim' ordine

$$x_1 p_1 + \ldots. + x_m p_m + \ldots\ldots.$$

lo spazio è rappresentabile conformemente sullo spazio euclideo.

Infatti (Lie, Bd. 1, Teor. 111) in tal caso il gruppo con una trasformazione di coordinate si può ridurre a contenere il sottogruppo

$$p_1;\ p_2;\ \ldots..;\ p_m,$$

che è chiaramente a trasformazioni permutabili e transitivo semplicemente e che quindi si può considerare come gruppo di movimenti. Uno spazio che lo ammetta come gruppo conforme è conformemente applicabile su uno spazio S che lo ammette come gruppo di movimenti. Ma (Bianchi, *Su gli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo di movimenti*, " Memoria della Società dei XL ", 1897, pag. 297) un tale spazio S è euclideo; c. d. d.

Se il gruppo contiene qualche trasformazione di ordine superiore al primo, lo spazio è conformemente applicabile sullo spazio euclideo.

Infatti in tal caso il gruppo conterrebbe una qualche trasformazione del second' ordine del tipo

$$U = \sum_1^m \{ 2x_\nu \Sigma x_k p_k - p_\nu \Sigma x_k^2 \} b_\nu + \ldots$$

Essendo di più transitivo, esso conterrebbe una trasformazione del tipo:

$$T = \sum_1^m b_k p_k + \ldots$$

e quindi anche la trasformazione:

$$(TU) = 2 \sum_1^m b_\nu^2 \Sigma x_k p_k + \ldots$$

e per il teorema precedente è dimostrato il nostro asserto.

Esclusi dunque il caso ben noto di spazii applicabili conformemente sull'euclideo, il nostro gruppo non conterrà nè una trasformazione $x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m + \ldots$ nè una trasformazione di ordine superiore al primo. Se dunque il gruppo non si può considerare come gruppo di movimenti, esso non potrà contenere che trasformazioni dei tipi (C), (D). In una almeno delle (D) dovrà essere $\alpha \neq 0$. Anzi potremo senz'altro supporre che in una sola delle (D) sia $\alpha \neq 0$; perchè se ciò avvenisse in K delle (D), esisterebbero $K-1$ loro combinazioni lineari indipendenti, in cui $\alpha = 0$. Il gruppo delle (D) è perciò isomorfo a un sottogruppo di movimenti di uno spazio a curvatura costante a $m-1$ dimensioni; se per es. questo sottogruppo ha s parametri, esso deve contenere un sottogruppo invariante a " $s-1$ " parametri, generato da quelle $s-1$ trasformazioni infinitesime per cui $\alpha = 0$.

Lo studio dei gruppi conformi è così ricondotto alla ricerca di siffatti sottogruppi di movimenti di uno spazio a curvatura costante.

§ 8. — Per vedere la potenza del nostro metodo, studiamo il caso particolarmente interessante degli S_3. Escluso il caso degli spazii applicabili conformemente su spazii a curvatura costante, ogni gruppo conforme sarà imprimitivo (Cfr. Lie, Bd. 3, S. 139) e quindi il sottogruppo G' che lascia fisso un punto A dovrà lasciare fissa almeno una direzione per esso. Se anche essa fosse immaginaria, il gruppo lascierebbe fissa anche l'immaginaria coniugata e la direzione *reale* coniugata a queste due direzioni rispetto al solito cono quadrico. Nella metrica della stella definita da questo cono, considerato come assoluto, il gruppo G' sarà dunque una rotazione attorno a una direzione reale; e perciò il gruppo conforme totale avrà al più 4 parametri, e si potrà immaginare del tipo

$$X_1 = p_1 + \ldots; X_2 = p_2 + \ldots; X_3 = p_3 + \ldots;$$

$$X_4 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + b(x_1 p_2 - x_2 p_1) + \ldots$$

Sarà quindi:

$$(X_1 X_4) = X_1 + bX_2 + mX_4 \qquad (X_2 X_4) = X_2 - bX_1 + nX_4$$
$$(X_3 X_4) = X_3 + rX_4$$

dove m, n, r sono costanti. Aggiungendo a X_1, X_2, X_3 convenienti multipli di X_4 si potrà fare evidentemente $m = n = r = 0$. Le relazioni tra le costanti di composizione di un gruppo dimostrano allora che $(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_3) = 0$. Ossia le X_1, X_2, X_3 generano un gruppo semplicemente transitivo a trasformazioni permutabili e lo spazio sarebbe conformemente applicabile sull'euclideo.

Dunque: *Gli spazii* S *a tre dimensioni non conformemente applicabili su spazii a curvatura costante che ammettono un gruppo* G *conforme sono conformemente applicabili su spazii* S′ *che ammettono* G *come gruppo di movimenti.*

Questo teorema esaurisce la ricerca per gli spazii a tre

dimensioni (*). Per vedere quanto complicata sarebbe la ricerca diretta, basta p. es. cercare di determinare direttamente il gruppo conforme più ampio, che possa ammettere uno degli spazii, determinati dal Prof. Bianchi, che ammettono un G_4 di movimenti.

Se il nostro teorema valga anche per $n > 3$, non pare una cosa molto facile a verificarsi. La ricerca prima che si dovrebbe fare in questo senso sarebbe la ricerca dei sottogruppi di movimenti degli spazii a curvatura costante a $n-1$ dimensioni; per $n=4$ la ricerca è già compiuta dal Lie (Bd. 3, S. 209). Lo studio di questa questione certamente potrebbe illuminare assai anche la teoria dei gruppi di movimenti: e su essa spero di poter ritornare. Osserviamo intanto che si può dalle nostre considerazioni dedurre subito il risultato che *il gruppo conforme di uno spazio a* n *dimensioni non applicabile conformemente su uno spazio a curvatura costante non può avere più di* $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri*. Questo limite superiore si può assai probabilmente ancora abbassare; in ogni modo però esso è assai minore del limite " n^2 " dato dal Lie.

(*) Esso si potrebbe anche dedurre facilmente dai risultati del Cotton (" Thèses de la Faculté des Sciences ", 1899).

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peyron, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Bollati di Saint-Pierre, Pezzi, Carle, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Allievo, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 1° marzo 1903.

Il Presidente comunica la morte dell'illustre Socio straniero Gastone Paris, avvenuta il 6 marzo 1903 in Cannes, e legge il dispaccio con cui egli inviò al *Collège de France* le condoglianze dell'Accademia, pregando ch'essa fosse rappresentata ai funerali, non che la risposta gentile della Segreteria del *Collège*.

Il Segretario, a nome del Socio corrispondente Costantino Nigra, fa omaggio della nuova edizione splendidamente illustrata del poemetto di lui: *La rassegna di Novara,* Milano, Menotti e Bassani, 1903.

Il Socio Chironi presenta 10 pubblicazioni giuridiche del Dr. Guido Bonolis, stampate fra il 1896 ed il 1902, tra le quali specialmente notevoli: *a) La giurisdizione della mercanzia in Firenze nel secolo XIV*, Firenze, Seeber, 1901; *b) Svolgimento storico dell'assicurazione in Italia,* Firenze, Seeber, 1901; *c) Les assurances sur la vie en droit international privé,* Paris, Fontemoing, 1902, e colle seguenti parole elogia il contenuto di esse:

Gli scritti che il dott. Guido Bonolis offre alla nostra Accademia, per due diverse maniere di considerarne i risultati meritano speciale segnalazione: il pregio ch'è in essi, se difatti

procura liete accoglienze all'autore, dà nuova testimonianza del consolante progredire che da noi fanno gli studî del diritto commerciale, ravvivati da quello splendente faro che fu nei secoli la tradizione giuridico-mercantile italiana, e che, fino a poco or è, parve fosse destinato soltanto a illuminare le ricerche dei dotti d'oltr'alpe.

Ben vengano dunque tra gli altri dei maestri, ancor questi lavori dei giovani studiosi, che son ricerca ed illustrazione dei fonti della profonda dottrina e della savia pratica mercantile italiana nei tempi di mezzo, come la monografia su *La giurisdizione della mercanzia in Firenze nel secolo XIV;* o che concorrono a dar notizia dell'origine e dello sviluppo che da noi ebbero istituti penetrati poi largamente, a ragion della previdenza, nella vita sociale, com'è la monografia sulla *Storia dell'assicurazione in Italia;* a tacer di altri contributi minori, d'importanza varia, ma che per varî aspetti hanno interesse per chi studî la storia del diritto patrio.

E si deve pur aggiungere, per chi studî il diritto patrio. Perchè il Bonolis non rinserra le sue ricerche nel passato, ma con savio processo vuol indagare e dichiarare gl'istituti nella formazione prima e nelle successive trasformazioni loro, segnalando così le fasi per cui passò e si compiè la vita di essi come organismi giuridici viventi: e talvolta alla comparazione con le leggi straniere chiede materiali d'indagine, così ben scelti e così saviamente adoperati, da ricavarne risultanze notevoli.

Di tale attitudine sua come giurista, il Bonolis dà saggio nella monografia su *Le Assicurazioni della vita nel diritto internazionale privato,* condotta con dottrina, con buona critica, con eleganza di costruzione: e basterebbe a segnalarne il merito, la collaborazione che Giulio Valery, noto pei suoi studî commercialistici, e professore di diritto all'università di Montpellier, volle dargli qual collaboratore ed annotatore. E questa qualità ben si unisce all'altra che il Bonolis ha di studioso della storia del diritto, e la compie: perchè segnala ciò che dei fatti storici importi scrutare e cogliere, per fissare e descrivere il movimento degl'istituti giuridici.

Lo stesso Socio Chironi presenta per le *Memorie* uno scritto del Prof. Romualdo Bobba, *Da Kant a Nietsche a proposito di un libro recente.* Il Presidente designa a riferirne il Socio proponente in unione col Socio Allievo.

Per gli *Atti* il Socio Ferrero presenta una propria nota intitolata: *Una nuova iscrizione d'Industria* ed una nota del Prof. Luigi Valmaggi, *Per la novella nell'antichità.*

LETTURE

Una nuova iscrizione d'Industria.

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

A levante della strada comunale, che dalla provinciale Torino-Casale conduce al villaggio di Monteu da Po, passando per il piano, su cui sorgeva l'antica *Industria,* e a mezzodì di una vecchia stradicciuola, parallela alla provinciale ora menzionata, furono scoperti, nello scorso febbraio, avanzi di costruzioni e di un pavimento a mosaico, una tomba in parte fatta con pezzi di laterizii romani, ma che evidentemente non era dell'età romana, ed un cippo quadrangolare di marmo bigio destinato a sorreggere un' erma di bronzo ora scomparsa. Di questa e di altre recenti scoperte industriensi si parlerà nelle *Notizie degli scavi* e negli *Atti della Società di archeologia e belle arti per la provincia di Torino,* ove il Fabretti pubblicò la sua bella illustrazione della vetusta città e de' suoi monumenti (1). Qui riferisco soltanto, con qualche nota, l'iscrizione del cippo (2), acquisto abbastanza notevole per il corpo epigrafico piemontese. Il cippo è simile ad altri rinvenuti ad Industria (3): è provvisto in basso di un' appendice, che serviva ad infiggerlo nel terreno.

L'iscrizione è incisa con lettere regolari di forma allungata: la prima linea rimane fuori di una cornice, di un semplice listello,

(1) *Dell'antica città d'Industria detta prima Bodincomago e dei suoi monumenti* (*Atti,* vol. II, p. 17-115, tav. I-XXVII).

(2) Delle recenti scoperte industriensi debbo la notizia alla cortesia dell'avv. Edoardo Durando, il quale mi accompagnò a visitarle, ed ha raccolto parecchie anticaglie della scomparsa città.

(3) Fabretti, tav. VII, n. 5, 7, 8, 9, 10; tav. VIII, n. 17, 20. Specialmente si avvicina al penultimo.

parallela ai lati del cippo e racchiudente tutta la sua faccia anteriore (1).

GRATTIA · T · F · RESTITVTA
SIB | ET
M · APONIOPRSCo
VIVIROEPORE
DIAE · VIROET
M · APONIORESTITVTO
F | LIOVIVIROEPOR
AEDIL | IIVIRO | NDVS
TRIAE
V ♁ F

In questo titolo abbiamo la terza menzione epigrafica (2) d'*Industria,* il cui nome negli scrittori non si trova che presso il solo Plinio seniore (3), e la duodecima di *Eporedia* (4), più volte ricordata nei libri dell'antichità (5). Finora ignoti nell'una e nell'altra città gli Aponii, comparsi però ad *Augusta Taurinorum* (6), vicina ad entrambe, e ad *Augusta Praetoria* (7), confinante con Eporedia, dove si era già trovata un'altra donna di nome *Grattia* (8), come quella che inalzò il monumento funerario,

---

(1) Alt. del cippo m. 1,36, largh. media m. 0,28, spess. m. 0,16. Alt. delle lett., lin. 1ª m. 0,031, 2ª-5ª m. 0,025, 6ª m. 0,018, 7ª e 8ª m. 0,015, 9ª m. 0,027.

(2) Le altre due sono in *C. I. L.*, III, n. 10877 (Pettau); V, n. 7496 (Chieri). Aggiungansi in epigrafi del luogo la menzione degl'*Industrienses* (*C. I. L.*, V, n. 7468, 7469, 7483), del *municipium Industriense* (*C. I. L. Suppl. It.*, I, n. 958) ed il gentilizio *Industrius* (*C. I. L.*, V, n. 7474).

(3) *N. H.*, III, 5, 16.

(4) Le altre si hanno in *C. I. L.*, III, n. 2711 (Gardun); V, n. 6771 (Dorzano), 6955, 7016, 7033 (Torino); VI, n. 1858, 2375 *a*, 2379 *b* (Roma); XI, n. 3110 (Civita Castellana); Brambach, *I. Rh.*, n. 1192, 1224 (Zahlbach). Un *Eporediensis* si ha in *C. I. L.*, III, n. 6413 (Scardona).

(5) Holder, *Altcelt. Sprachsch.*, I, c. 1450 e segg.

(6) *C. I. L.*, V, n. 7060.

(7) *Ibid.*, n. 6844. Si ha anche un *Aponius* a Saluzzo (n. 7638).

(8) *Ibid.*, n. 6805.

ora tornato alla luce, al marito ed al figlio. Entrambi furono seviri ad Eporedia (1): il figlio tenne anche l'edilità ed il duovirato ad Industria (2).

Il suolo d'Industria ha ridato monumenti. Ripeto un voto: si riprenda presto l'esplorazione regolare di questo suolo, che ha fornito bronzi preziosi per l'arte, epigrafi di valore. Sia questa un' esplorazione compiuta, che ponga termine ai frugamenti, che da secoli colà si sono fatti e sembra si rifacciano al solo scopo di trar guadagno dalle anticaglie dissepolte; frugamenti, in cui si rovinano ruderi di costruzioni, si perde l'occasione di osservazioni importanti per la scienza, si disperdono, si portano lontano, si sottraggono allo studio monumenti. Chissà che con gli avanzi del municipio romano non si rinvengano memorie di Bodincomago, del borgo che lo ha preceduto, facendoci così penetrare nella conoscenza della civiltà anteriore alla romana nella nostra regione. Era questo il voto del Fabretti (3), costretto con dolore ad interrompere gli scavi industriensi, quando mancarono i mezzi necessarii alla Società di archeologia e belle arti, la quale, al suo sorgere, tosto si era rivolta a questa importante investigazione.

---

(1) Altri seviri di Eporedia: *C. I. L.*, V, n. 6786, 6789, 6792, 6793, 6794, 6821, 7033; *Suppl. It.*, I, n. 906.

(2) Un altro edile e duoviro della stessa città: *C. I. L.*, V, n. 7468.

(3) *Atti della Soc.*, vol. III, p. 71.

Per la novella nell'antichità.

Nota di LUIGI VALMAGGI.

È opinione comune che, all'opposto di quel che accadde nell'antico Oriente, e poi di nuovo e non men largamente nel Medio Evo e nei tempi moderni, ai Greci e ai Romani sia mancata ogni vera e propria inclinazione e disposizione per la novella. Certo di raccolte di novelle, quali sono ad esempio le indiane, o le latine del Medio Evo, non v'è traccia alcuna né nella letteratura greca né nella romana; e se qualcosa si trova che pare accostarsi in parte a questo genere, non può reggere il paragone che molto stentatamente. Cosí le *Passioni amorose* di Partenio, che molti citano come saggio, sia pure imperfetto e sporadico, di novellistica classica, hanno in realtà carattere affatto diverso, e sono piuttosto da considerare come opera esclusivamente di erudizione.

Ma se ai Greci e ai Romani mancò la novella, come genere speciale di letteratura, non si può dire che sia loro mancata del pari la tendenza al novellare; di che fanno fede non solamente le cosí dette favole milesie, e quelle numerose narrazioni, alle quali si suol dare assai impropriamente il nome di romanzi, ma anche alquanti racconti, di piú modesta estensione, e perciò assai piú vicini al tipo della novella propriamente detta, che troviamo qua e là inseriti in opere di maggior mole e di varia natura, cosí in prosa come in poesia. Gli esempî di questa sorta di racconti sono piú frequenti, che per consueto non si creda, e compaiono anche in scritture assai differenti da quelle, in cui gli studiosi della materia (1) sono soliti cercarli.

(1) V. ad esempio Dunlop-Liebrecht, *Gesch. der Prosadichtungen* (Berlino 1854), 3 sgg.; Chassang, *Histoire du roman et de ses rapports avec l'histoire dans l'antiquité grecque et latine* (Parigi 1862), passim; Rohde, *Der griech. Roman*[2] (Lipsia 1900), 578 sgg.; Susemihl, *Gesch. der griech. Litter. in der Alexandrinerzeit*, II (Lipsia 1892), 574 sgg.; ecc.

Nel breve spazio di questa nota io non intendo che delibare l'importante materia, richiamando l'attenzione su alcuni notevoli esempî di questo genere di narrazioni, che ci si offrono presso Ateneo. La messe riuscirebbe molto copiosa, se si volesse tener conto anzitutto dei brevi racconti con fondamento di arguzia, quali sarebbero, per citare un solo saggio, i due aneddoti riferiti in X, 420 c sgg., a proposito dei banchetti di Arcesilao. Nel primo è occasione al racconto di motti piacevoli la mancanza di pane; nel secondo è messa in ridicolo la balordaggine di un servo. Siffatti aneddoti in Ateneo sono in buon numero: se non che, quantunque abbiano frequentissimi riscontri nella novellistica antica e moderna, vogliono considerarsi piuttosto come semplici schemi o abbozzi di racconti, e mancano di quel certo sviluppo dei particolari, senza il quale non vi può essere novella vera e propria.

Similmente passeremo sotto silenzio le narrazioni che hanno fondamento nella storia, perché si tratta di un genere divulgatissimo nelle letterature classiche. Vuolsi nondimeno avvertire che anche alcuni di questi racconti appaiono rifoggiati con intendimento addirittura novellistico, quale sarebbe quello attribuito a Xanto in X, 415 c (= FHG. I, 38), relativo al voracissimo Camblete, re di Lidia, il quale una notte tagliò a pezzi la moglie, se la mangiò, e poi si uccise. L'episodio è riferito eziandio da altri (1); ma nella redazione di Ateneo, qual che ne sia l'autore, ci si presenta, benché in iscorcio, coi veri caratteri di una novella.

Gli stessi caratteri appaiono in altri racconti di origine leggendaria: ragguardevolissimo tra tutti è quello di Menodoto Samio, in XV, 672 a (= FHG. III, 103), dove si narra la storia di Admeta, figlia di Euristeo, la quale, fuggendo da Argo, giunta a salvamento in Samo, per gratitudine verso Era, prende in custodia il tempio della dea. Quei di Argo, per perderla, inducono i pirati a rapire certa statua che si conservava nel tempio: ma ecco che, deposta la statua sulla nave dei pirati, questa non può piú muoversi, e i pirati stessi per partire sono costretti a

(1) V. Eustazio ad *Odiss.* IX, p. 356: qui però l'aneddoto, anziché a Camblete, è riferito a Cambise. Della voracità di Camblete fa cenno anche Eliano, *Var. Hist.*, I, 27.

sbarcarla. Anche qui lo svolgimento dei singoli particolari è il proprio della novella.

Ma l'esempio piú insigne di tal sorta di svolgimento l'abbiamo in XII, 554 c sgg., dove è un racconto che ha per tema la gara di due ragazze, che contendono ποτέρα εἴη καλλιπυγοτέρα. Il tema non è nuovo: qualche cenno ne abbiamo nei giambografi Cercina e Archelao (presso Ateneo, ib., 554 d ed e); di piú compare nella poesia epigrammatica (*Anth. Gr.* vol. I p. 95 Stadtmüller), ed è trattato con molta crudezza di tinte in una nota lettera di Alcifrone (IV, 11 Schepers = I, 39 vulg.). Se non che i particolari di quest'ultimo sono puramente descrittivi, laddove quelli introdotti da Ateneo hanno carattere apertamente narrativo. Lo scrittore espone in breve la contesa delle due fanciulle; poi le fa imbattersi in un giovine, al quale viene sottoposto il giudizio definitivo. Il giovine esamina e sentenzia; ma si innamora di una delle due ragazze, mentre in seguito il fratello di lei si innamora dell'altra. Dopo qualche peripezia, le fanciulle finalmente si sposano, e in memoria della gara e della lieta sorte, dedicano un tempio a Venere Callipigia. Il racconto può essere derivato dai due giambografi dianzi menzionati, come suppose lo Schweighaeuser, o anche dalla tradizione popolare: se non che ciò che piú importa al nostro proposito è constatare come lo svolgimento datogli da Ateneo è in tutto conforme ai procedimenti tecnici del genere novellistico, talché lo scrittore, sia Ateneo stesso, o altra fonte dalla quale egli attingesse, pare avere l'intendimento precipuo di esilarare e dilettare i lettori, secondo il carattere che fu ed è tuttavia proprio della novella.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Berruti, Mosso, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente presenta in dono all'Accademia a nome del Socio corrispondente Victor Fatio sei note di argomento zoologico.

Il Socio Morera presenta in dono all'Accademia a nome dell'autore Dr. Tommaso Boggio una memoria intitolata: *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali,* Milano, 1902.

Il Socio Mattirolo presenta in dono all'Accademia a nome dell'autore Dr. Giuseppe Gola una nota intitolata: *Lo zolfo ed i suoi composti nell'economia delle piante,* Genova, 1902.

Vengono accolti per la pubblicazione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° *Ricerche petrografiche sulle valli del Gesso (Valle del Sabbione),* del Dr. Alessandro Roccati, presentata dal Socio Spezia;

2° *Risoluzione del problema generale dell'induzione elettrodinamica nel caso di un piano conduttore indefinito*, del Dr. Tommaso Boggio, presentata dal Socio Morera.

Viene accolto all'unanimità dei votanti per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro seguente: *I funghi Ipogei italiani raccolti da O. Beccari, L. Caldesi, A. Carestia, V. Cesati, P. A. Saccardo,* del Socio Mattirolo.

Il Socio Parona presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* un lavoro del Dr. Carlo Airaghi intitolato: *Gli Echini della scaglia cretacea veneta.*

Questa Memoria viene affidata ad una Commissione costituita dai Soci Parona e Camerano, affinchè ne riferisca all'Accademia.

Il Socio Foà presenta pure per l'inserzione nel volume delle *Memorie* un lavoro del Dr. Alfonso Bovero intitolato: *Canali venosi emissari-temporali.*

Questa Memoria viene affidata ad una Commissione costituita dai Soci Foà e Camerano, affinchè ne riferisca all'Accademia.

LETTURE

Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle del Sabbione).

Nota del Dott. ALESSANDRO ROCCATI.

(Con una Tavola).

Colla presente nota inizio uno studio petrografico sulle roccie cristalline delle valli del Gesso nelle Alpi Marittime.

Quantunque la zona cristallina, conosciuta sotto il nome di massiccio del Mercantour e dell'Argentera, nella quale si aprono le dette valli, presenti un potentissimo sviluppo e molto si sia pubblicato sulla sua orografia e stratigrafia, pure come fa giustamente rilevare il Franchi (1) mancano ancora studi petrografici particolareggiati sulle numerose roccie che con i gneiss ed i graniti costituiscono la zona in questione. A mia conoscenza i lavori che danno qualche cenno petrografico sulle roccie della regione sono quelli di Franchi (2), di Viglino (3) e di Zaccagna (4).

Feci le mie ricerche in tutte le valli che confluiscono al Gesso di Valdieri a monte di questo comune, le quali tutte, almeno nella loro parte superiore, sone incise nelle roccie cristalline; però in questa nota mi limito alla valle del Sabbione.

Questa si inizia poco sopra il comune di Entraque, punto ove il suo torrente si congiunge al Gesso di San Giacomo, e si continua per un'estensione di parecchi chilometri limitata quasi sempre regolarmente a destra da schisti, calcari, dolomie

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93,* " Boll. R. Comit. Geolog. ", anno 1894, N. 3.

(2) Lavoro citato e *Sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi nelle Alpi Occidentali,* " Boll. R. Com. Geol. ", anno 1898, n^i 3 e 4.

(3) *Escursioni e studi preliminari sulle Alpi marittime,* " Boll. del C. A. I. ", anno 1897, vol. XXX, N. 63.

(4) *Sulla Geologia delle Alpi occidentali,* " Boll. R. Com. Geol. ", a. 1887, n^i 11 e 12.

ed altre roccie sedimentarie o metamorfiche riferite al Trias ed al Permiano e che la dividono dalla valle della Vermenagna. A sinistra è invece limitata da roccie cristalline, le quali cominciano ad affiorare presso Entraque, sebbene ricoperte alla base da potenti formazioni moreniche, e si proseguono formando una catena che in varî punti supera i 2500 metri fino al Colle del Sabbione dividendo la valle da quella di San Giacomo. La zona cristallina sul lato sinistro è ininterrotta e solamente in alcuni punti passa al lato destro della valle, come ad esempio avviene alla Rocca dell'Abisso dove essa è a contatto colle roccie permiane.

Queste roccie cristalline sono essenzialmente costituite da gneiss, graniti e dioriti, essendo queste ultime assai sviluppate sotto forma di dicchi e stratificazioni in diretto rapporto con i gneiss e graniti per modo che si hanno numerosi ed evidenti termini di passaggio, come potei osservare fra le altre località presso al ponte Soffiet lungo la mulattiera reale che da Entraque risale la valle fino al colle del Sabbione. Si ha quindi un'associazione di roccie intimamente collegate per cui da graniti e gneiss tipici si passa rispettivamente a graniti e gneiss anfibolici ed a dioriti compatte e schistose.

Diorite. — Questa roccia presenta uno sviluppo molto potente poichè non è limitata esclusivamente alla valle del Sabbione, ma è anche assai diffusa in altri punti del massiccio; così la incontrai abbondante nella valle di San Giacomo nel versante opposto alla catena divisoria della valle del Sabbione; nella parte inferiore del vallone delle Finestre e con minor frequenza nel vallone delle Rovine in prossimità del lago omonimo, più in alto salendo al colletto di Laura, nei dintorni del lago Brocan e lungo la mulattiera che per il colle delle Fenestrelle fa comunicare l'alto vallone delle Rovine con quello delle Finestre.

Una grandissima quantità di frammenti provenienti dalla diorite s'incontrano sotto forma di massi e ciottoli nelle morene e nelle alluvioni sia antiche che recenti non solo nei dintorni di Entraque e Valdieri, ma ben anche di Cuneo. Infatti il letto del Gesso presso questa città contiene abbondanti ciottoli di tale roccia, la cui presenza mi fu segnalata dal prof. F. Sacco anche a Morozzo, a circa 10 km. dal punto attuale di confluenza

del Gesso colla Stura; fatto questo che può aver importanza per la determinazione della direzione che in altri tempi doveva avere il corso del fiume Gesso.

Malgrado questo potente sviluppo non mi risulta che finora alcuno abbia accennato alla presenza di diorite nelle dette località; soltanto trovai nella collezione litologica del Museo di Geologia di Torino un campione di questa roccia raccolto presso San Giacomo da Bartolomeo Gastaldi e da lui indicato appunto come " *diorite nel granito* ".

Il Franchi nel citato lavoro (1) enumerando le roccie del massiccio cristallino dell'Argentera non parla di diorite; però dopo aver distinto i gneiss in acidi e basici secondochè " hanno la composizione mineralogica normale degli gneiss o presentano questa più o meno profondamente modificata dalla presenza come elementi costituenti, subordinati, importanti o prevalenti, di granato, orneblenda, pirosseno, o calcite ", parlando dei rapporti stratigrafici fra queste due serie di roccie così si esprime (2):

" Queste roccie (le basiche) sono intercalate in quelle (le " acide) in zone, in banchi, in lenti ed in amigdali o rognoni. " Le intercalazioni variano da zone potenti centinaia di metri " ed estese dei chilometri alle amigdali rigonfie grosse qualche " metro e lunghe poco più ed ai rognoni grossi pochi centimetri.

" Il passaggio dalle roccie acide alle basiche è in generale " brusco, e la zonatura delle amigdali di queste è sovente al " contatto discordante con la stratificazione dello gneiss che lo " include. Allo stesso modo si trovano inclusi basici che risve- " gliano l'idea di inclusi di frammenti di roccie anteriori. Però " questa ipotesi è finora eliminata dal resto delle osservazioni ".

Siccome Franchi non accenna in modo preciso a località determinate, ma si limita ad indicare questo fatto in modo generico, rimane dubbio se egli con queste sue parole intende realmente di riferirsi alle roccie studiate da me, tanto più che come già ho fatto rilevare egli non accenna a dioriti.

Nel caso in cui realmente ciò fosse, come può lasciar sup-

---

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93,* " Boll. R. Com. Geol. ", a. 1894, N. 3, pag. 4.

(2) Id., pag. 11.

porre il fatto che i caratteri da lui rilevati sono appunto quelli in modo speciale proprî delle dioriti da me studiate, io non credo di poter condividere questa sua opinione di un'associazione molto intima di due roccie, l'una acida e l'altra basica, perchè dal complesso delle osservazioni risulta piuttosto trattarsi di una unica roccia la cui struttura presenta come particolarità l'avere gli elementi non distribuiti in modo regolare, ma variamente disseminati ed accentrati, risultandone quella variabilità di tipo che in alcuni punti potrebbe far supporre la presenza di varie roccie intercalate.

Volendo accettare la mia idea che si tratti realmente di una diorite occorre di ammettere che l'anfibolo sia sempre originario e componente essenziale, cosa questa che sembra pure contraria all'opinione di Franchi, secondo il quale, almeno in parte, l'anfibolo deriverebbe dalla uralitizzazione di un pirosseno. Ora io ritengo che nella roccia da me studiata un tale fenomeno non si manifesti in modo sensibile e che quindi la orneblenda sia sempre da considerarsi come minerale originario ed essenziale. È bensì vero che in qualche punto nel gneiss ho constatato la presenza di pirosseno, ma non l'ho mai trovato nella diorite e dove esiste nulla vi è che accenni ad una sua trasformazione in orneblenda.

La diorite si presenta con due strutture fondamentali distinte; l'una di aspetto granitoide, l'altra eminentemente schistosa.

Quando ha struttura granulare oltre al tipo compatto regolare ove i componenti hanno proporzioni pressochè costanti e sono per lo più isodiametrici, per cui assume tinta biancastra o grigiastra in cui spicca il color verde scuro dell'orneblenda, la roccia presenta anche in molti punti un curiosissimo aspetto dovuto alla disuguale distribuzione dei componenti ed alla variazione della loro grossezza, avendosi passaggi graduati da struttura macromera a struttura micromera ed afanitica.

La roccia macromera ha color bianco latteo in cui si possono distinguere granuli con aspetto vetroso di quarzo e cristalli prismatici fibrosi di orneblenda verde scura con lucentezza submetallica sparsi nella massa feldepatica.

Il quarzo è molto disugualmente distribuito, poichè si trova accentrato in plaghe o sparso in granuli ed anche mancante del tutto in molti punti. Pure l'anfibolo ha distribuzione molto irre-

golare. Vi sono zone in cui manca si può dire totalmente, altre ove è sparso in rari individui, altre poi ove è concentrato abbondantemente formando plaghe irregolari a tinta scura. Talvolta è disposto in letti e strati o paralleli gli uni agli altri, oppure variamente contorti, sinuosi con direzioni irregolarissime a zig-zag, ripiegati su se stessi od intersecandosi vicendevolmente; la potenza di questi strati è pure molto variabile poichè si ha passaggio anche repentino da strati di pochi millimetri ad altri di diecine di centimetri.

Sonvi nella massa delle grandi zone irregolari dove la roccia assume la struttura granulare regolare, circondate all'intorno da una massa quasi priva di anfibolo. Non raramente la diorite assume aspetto porfiroide dovuto alla presenza di grossi cristalli di plagioclasio, compiuti o in forma di mandorle ed in cui nettamente sono visibili le linee di geminazione, sparsi in una massa ove abbonda l'anfibolo microcristallino, oppure di grossi cristalli di orneblenda (ne osservai di quelli lunghi fin 3 cent.) sparsi in punti ove invece scarseggia l'anfibolo.

Entro alla roccia compariscono di frequente noduli di grossezza molto variabile da pochi centimetri fino a mezzo metro e più di diametro; tali noduli sono di diorite a struttura micromera e presentano tale abbondanza di anfibolo da assumere una tinta scura che spicca nettamente nel rimanente della roccia a tinta chiara; in essi manca normalmente il quarzo che si trova invece abbondante nelle zone macromere circostanti.

Intorno ai noduli gli strati di anfibolo prendono un aspetto fluidale evidentissimo; i noduli poi hanno forma molto variabile: alcuni sono sferoidali, altri allungati in grosse mandorle, altri sono poligonali od a contorno irregolare quasi di frammenti brecciati a spigoli vivi oppure come smussati da principio di fusione. A primo aspetto la roccia in molti punti sembra veramente una breccia in cui si avrebbero frammenti di una diorite più antica micromera inglobati in una massa costituita dalla diorite macromera. L'esame microscopico però dimostra trattarsi di una roccia unica poichè è evidente il graduale passaggio da un tipo all'altro; d'altronde vi sono punti ove sottili striscie macromere fanno comunicare i noduli brecciformi; in altri si ha inversione del fenomeno, cioè noduli macromeri inclusi nella roccia micromera, per cui l'aspetto è allora di una breccia formata da fram-

menti della roccia che nel primo tipo sembrava funzionare da cemento. La fig. 1 può dare un'idea della intricata struttura della roccia. Talvolta i noduli micromeri presentano la loro parte centrale di color verde-giallo omogeneo con aspetto compatto, oppure il nodulo è formato da strati alternati di questa massa apparentemente compatta giallo-verde con strati della solita diorite micromera. Lo stesso fenomeno si nota pure nei letti di anfibolo che, come dissi sopra, s'incontrano nella massa a struttura micromera.

Una struttura molto curiosa osservata in un masso erratico mi sembra degna di nota; si hanno cioè strati di ugual spessore a struttura micromera alternanti, gli uni scuri ricchissimi in orneblenda con poco quarzo, gli altri chiari privi quasi di orneblenda e molto ricchi di quarzo i cui granuli vetrosi sono visibili anche ad occhio nudo nella massa (fig. 2).

L'aspetto della roccia è allora schistoso, ma il fenomeno è solo apparente, poichè l'esame microscopico rivela il passaggio graduato da l'un tipo di roccia all'altro e si possono osservare cristalli di orneblenda giacenti parte in una zona, parte nell'altra, e lo stesso si dica per individui di quarzo.

L'abbondanza del quarzo mi fa supporre esser questo uno dei termini di passaggio dalla diorite al gneiss; però per quante ricerche abbia fatto non essendomi riuscito di trovare tale tipo in posto mi limito ad indicarlo come una delle molteplici strutture della roccia.

Nella diorite schistosa si possono avere come in quella compatta due tipi distinti. L'uno è dato dalla diorite tipica in cui però i componenti e specialmente l'anfibolo disponendosi in strati regolari assumono struttura schistosa più o meno netta.

L'altro tipo è eminentemente schistoso ed è dovuta tale schistosità alla presenza di abbondantissimo anfibolo disposto in strati regolarissimi di prismi allungati fibrosi. In questo caso la roccia osservata parallelamente alla schistosità si presenta di color nero o verde scuro omogeneo a seconda della qualità dell'anfibolo, che sembra essere l'unico componente; osservando però normalmente alla prima direzione si vedono fra gli strati di anfibolo sottili strati biancastri dovuti a feldspato plagioclasio, il quale forma anche venuzze che attraversano la massa anche in direzioni normali alla schistosità.

Queste varietà schistose della diorite sono piuttosto rare e formano intercalazioni frammezzo al gneiss; i due tipi di roccia presentano sempre distacco ben netto e solo l'esame microscopico rivela il passaggio dalla diorite al gneiss.

La roccia deve esser stata sottoposta a potenti azioni meccaniche, come dimostrano le numerose fessure che esistono nella massa e che furono per lo più riempite da quarzo granulare in alcuni punti associato a clorite in lamine esagonali od a epidoto in lungi prismi sottili di color verde giallognolo. Conseguenza di tali azioni meccaniche sono le frequenti traccie di rottura che si osservano nei componenti, i quali talora presentano spostamenti nei frammenti, talora invece si presentano nettamente separati, ma non spostati (fig. 3).

Una conseguenza notevole delle azioni meccaniche a cui fu sottoposta la roccia si è di trovare dei cristalli di plagioclasio che furono contorti ed incurvati (fig. 4) senza che però compariscano traccie evidenti di rottura.

Componenti della roccia sono: *plagioclasio*, *anfibolo*, *quarzo*, *ortosio*, *epidoto*, *apatite*, *sfeno*, *ematite* e *zircone;* come prodotti di alterazione o di formazione posteriore si hanno *epidoto*, *zoizite*, *calcite*, *clorite*, e *limonite*.

Il *plagioclasio* è l'elemento predominante nelle varietà compatte; si presenta al microscopio talora in individui che presentano sezione cristallina ben distinta, ma più comunemente in granuli a contorno irregolare, modellati gli uni sugli altri o sugli altri componenti.

Esso presenta tre geminazioni ben evidenti: la più comune è secondo la legge dell'albite che si manifesta in finissime linee parallele, sulle quali misurai l'angolo di estinzione che da un minimo di 2° a 3° sale in certi casi fino a 15° e 19°. Questo valore dell'angolo di estinzione mi fa ritenere trattarsi di *oligoclasio*, ma a composizione variabile, poichè nei termini in cui detto angolo raggiunge i massimi indicati si avrebbe un oligoclasio fortemente calcico e quindi più basico dell' altro a angolo minore.

Associata alla geminazione secondo la legge dell'albite non è rara quella del periclino, le cui traccie si incontrano con quelle della prima con un angolo quasi retto. Più raramente potei osservare l'associazione di due individui geminati secondo la

legge di Karlsbad e presentanti alla loro volta la geminazione dell'albite.

Non manca il plagioclasio inalterato limpido ed incoloro; esso però è comunemente alterato in una massa bianca lattiginosa, granulare, semiopaca con colori di polarizzazione quasi nulli e dove o non compariscono più o soltanto confusamente le linee di geminazione. Un altro prodotto di alterazione frequente è la *zoisite* in granuli o aghetti finamente intrecciati, che se talora non formano se non un nucleo nell'interno delle sezioni, in altri punti le riempiono del tutto.

Non di rado trattando con acido cloridrico il plagioclasio si ha notevole effervescenza dovuta alla presenza di *calcite*, la quale, quantunque date le condizioni della roccia non si possa escludere assolutamente che provenga da infiltrazioni, pure ritengo piuttosto dovuta ad alterazione del feldspato, poichè se l'alterazione in calcite non è comune nei plagioclasi acidi, non è però da escludersi, tanto più nel caso mio in cui si tratta di un oligoclasio relativamente molto basico.

Nel plagioclasio notai inclusioni di un altro *feldspato*, analogamente a quanto avrò occasione di accennare più a lungo parlando del granito, di *quarzo* in granuli che nei cristalli porfirici del feldspato raggiungono tali dimensioni da potersi scorgere ad occhio nudo, di *ematite* in laminette e di *zircone* in prismetti per lo più tozzi ma in generale ben definiti.

Associato al plagioclasio, ma come minerale accessorio, si nota l'*ortosio* sempre in granuli a contorni indistinti e più piccoli di quelli del plagioclasio; all'opposto di questo è normalmente inalterato o presenta solo un nucleo torbido interno dovuto ad incipiente alterazione. È limpido, incoloro con colori di polarizzazione grigio-azzurri e caratteristica estinzione ondulata; rari sono gli individui geminati e questi secondo la legge di Karlsbad. Talvolta i cristalli furono rotti ed i frammenti spostati e ricementati fanno assumere all'ortosio struttura a mosaico.

Si hanno qui inclusioni analoghe a quelle incontrate nel plagioclasio.

L'*anfibolo*, che nelle varietà schistose della roccia predomina sugli altri componenti, è in cristalli prismatici allungati, fibrosi che a seconda del taglio dànno sezioni allungate a terminazioni indistinte o come sfilacciate, striate longitudinalmente

e non di rado con i margini corrosi, oppure sezioni rombiche a contorno ben netto e che presentano le linee di sfaldatura intrecciate a reticolo. L'anfibolo è generalmente ben conservato limpido; però in alcuni punti esso forma plaghe a contorno irregolare di color verde cupo torbido, senza linee di sfaldatura e con debole pleocroismo.

Si notano nella roccia tre varietà di anfiboli: la più comune è *orneblenda* tipica di color verde cupo con pleocroismo verde scuro, verde bruno, bruno; non sono rari i geminati secondo 010 e l'angolo di estinzione oscilla fra 17°, 19° e 21°.

L'altra varietà è pure orneblenda, ma di color verde azzurro con pleocroismo azzurro, verde-azzurro, verde carico e angolo di estinzione identico a quello della prima varietà. In alcuni punti l'anfibolo è più chiaro ed ha pleocroismo verde azzurro, verde-giallo e bruno chiaro ed il suo angolo di estinzione misurato sulle linee di geminazione mi diede un valore di 15°, il che non esclude che sia ancora da considerarsi come orneblenda.

Finalmente havvi un terzo anfibolo con caratteri analoghi ai due primi, ma perfettamente incoloro con angolo di estinzione identico o di pochissimo inferiore all'orneblenda tipica, dotato di altissimi colori di polarizzazione e non raramente di notevole dispersione. Questi caratteri mi fanno ritenere che possa trattarsi di *edenite* che appunto presenterebbe tali caratteri.

Interessanti sono i rapporti fra i tre anfiboli: anzitutto si possono trovare isolati e ben distinti ed anche prevalenti or l'uno or l'altro nei varî punti della roccia; più abbondante è però sempre l'orneblenda tipica e solo localmente sono diffusi l'azzurro e la varietà incolora.

Più comunemente i tre anfiboli sono associati dando luogo a molteplici e curiose strutture; così si possono incontrare sezioni di anfibolo verde che contengono nel loro interno plaghe irregolari incolore od azzurre (più raramente queste ultime), od inversamente cristalli incolori che hanno internamente zone di color verde, oppure azzurre con nuclei o verdi od incolori. In altri individui l'interno del cristallo è di un colore mentre i bordi o le terminazioni sono di altro. Si hanno anche cristalli a striscie alternate verdi od incolore con passaggio graduato da una tinta all'altra oppure distacco ben netto; più raramente si

hanno contemporaneamente le tre colorazioni alternanti regolarmente in uno stesso individuo.

Notevole è il fatto che in grossi cristalli costituiti appunto di zone alternate incolori e verdi le linee di sfaldatura si continuano esattamente da una zona all'altra ed a luce polarizzata soltanto si distinguono le zone per i diversi colori d'interferenza essendo identica l'estinzione.

Havvi pure accrescimento parallelo con isorientazione di individui a colorazione differente ma sempre con estinzione perfettamente uguale e solo in pochi casi notai cristalli incolori che presentano nell'interno fibre di orneblenda verde con differente orientazione dell'individuo maggiore. Interessante è il caso di cristalli allungati presentanti una fessura normale all'allungamento nella parte mediana ed ai lati della fessura con distacco netto senza passaggio o sfumature da una parte il color verde e dall'altra l'azzurro. Caratteristica è poi l'associazione indicata dalla fig. 5, ove un grosso cristallo incoloro ben definito si continua con netto distacco in orneblenda tipica.

In certi punti finalmente l'anfibolo osservato con forte ingrandimento risulta formato da fibre distinte dei varî anfiboli disposte parallelamente od intrecciate od anche su ogni singola fibra si possono vedere alternare le tre colorazioni.

Le stesse varietà di anfibolo con i medesimi caratteri e le identiche associazioni si hanno nelle varietà schistose della roccia, soltanto in esse i diversi anfiboli sono meglio individualizzati, poichè si hanno punti ove predomina or l'una or l'altra specie di orneblenda, essendo l'altra solo più accessoria o mancando del tutto; conseguenza di questa distribuzione dell'anfibolo si è una variazione nella tinta della roccia che prende color verde più o meno intenso a seconda del prevalere dell'orneblenda tipica o della varietà verde-azzurra. Quantunque l'anfibolo incoloro sia per lo più nella roccia schistosa associato all'orneblenda, trovai in un campione di tale roccia una disposizione regolare fra anfibolo incoloro ed orneblenda tipica, che stanno in strati alternati, per cui tagliando nella roccia preparati parallelamente alla schistosità ne ebbi di molto chiari con prevalenza dell'anfibolo incoloro ed altri scuri ove predomina invece l'orneblenda.

Per quanto riguarda l'anfibolo incoloro, che ho riferito ad edenite, mi pare fuori di discussione che si tratti di una specie

minerale distinta formatasi contemporaneamente all'orneblenda; infatti esso è sempre limpido, per lo più con distacco ben netto dalle due altre varietà quando ad esse è associato, ed è importante che lo si trova anche isolato in molti punti della roccia.

In quanto alla varietà di orneblenda azzurra non credo neppure che si possa ammettere la sua provenienza da alterazione dell'orneblenda tipica e ritengo più logico l'ammettere l'esistenza di due varietà di orneblenda con differente tenore in ferro, che porterebbe la variazione nel colore. Infatti se in alcuni punti vi è associazione intima fra i due anfiboli e passaggio graduatissimo dall'uno all'altro, sta però il fatto che per lo più il distacco negli individui ben conservati è netto; così pure si hanno individui dell'anfibolo azzurro isolati ed anzi esso entra come componente quasi esclusivo insieme al plagioclasio in certe varietà della roccia schistosa.

Prodotti di alterazione dell'anfibolo, oltre al minerale verde torbido non pleocroico a cui ho sopra accennato, sono *clorite* e *limonite*; quest'ultimo minerale si trova a formare come un orlo giallastro ai cristalli o si trova insinuato fra le fibre dell'anfibolo.

Comuni negli anfiboli sono inclusioni di *quarzo*, di *apatite*, di *zircone* e di *feldspato triclino*, generalmente però alterato analogamente a quanto accennai per il plagioclasio della roccia. In qualche punto notai pure inclusioni di *ematite* in laminette rossovive talora con un orlo giallo di limonite.

Notevole infine è il fatto che certe fessure esistenti nella massa laddove attraversano l'orneblenda furono riempite da un anfibolo secondario più chiaro.

Sparsi nella massa si trovano grani irregolari o fibre allungate di *epidoto* incoloro o giallo chiaro verdognolo. L'epidoto è anche in certi punti prodotto d'alterazione dell'orneblenda ed allora si trova in fibre associate a quelle dell'anfibolo o forma le terminazioni dei cristalli di questo.

L'epidoto come prodotto di alterazione dell'orneblenda è comune nei nuclei di color giallo verde che ho detto incontrarsi nei noduli brecciformi della roccia macromera; infatti al microscopio questi nuclei risultano formati da grani e fibre di color verde giallognolo di epidoto associato a fibre di orneblenda o di anfibolo incoloro; alcuni dei noduli poi sono esclusivamente

formati da intreccio di fibre di epidoto che è quello che dà il colore alla roccia.

Il *quarzo* ha diffusione molto irregolare; esso in certi punti della roccia manca del tutto, mentre in altri è abbondantissimo, sparso nella massa in granuli irregolari od accentuato a formare plaghe vetrose che si scorgono facilmente ad occhio nudo. Il quarzo ad ogni modo è sempre molto più abbondante nelle varietà compatte che nelle schistose, ove, specialmente nelle varietà molto ricche in anfibolo, manca si può dire del tutto.

Esso è incoloro, limpido con frequenti traccie di rotture ed abbondanti inclusioni di *zircone* sotto forma di prismi a terminazioni indistinte, e più raramente di cristalli perfetti prismatici con terminazioni ottaedriche. Altre inclusioni in finissimi aghetti riferisco ad *apatite*.

Il quarzo non di rado forma il riempimento delle fessure esistenti nella roccia.

Abbondante ma anch'esso molto disugualmente distribuito è lo *sfeno*; infatti mentre in taluni punti manca del tutto, in altri punti va gradatamente aumentando fino a raggiungere tale diffusione da potersi in qualche zona considerare come elemento accessorio caratteristico. Si presenta per lo più in cristalli che dànno sezioni rombiche allungate acute, triangolari o cuneiformi, oppure in granuli sferoidali; gli individui sono talora così voluminosi da raggiungere le dimensioni dei cristalli di anfibolo.

Ha color bruno chiaro e per lo più sono ben evidenti le linee di sfaldatura; il pleocroismo va dal bruno chiaro all'incoloro, i colori di polarizzazione sono poco vivi e la dispersione è sensibile.

Abbondante è pure l'*apatite* in grossi granuli a contorno sferoidale ed ovoidale, oppure in cristalli che dànno sezioni rettangolari allungate od esagone; le dimensioni degli individui sono talora così rilevanti da potersi osservare ad occhio nudo nei preparati.

L'apatite o è inclusa nei componenti o sparsa nella massa; è incolora, ha estinzione retta e colori di polarizzazione grigio-azzurri; le sezioni esagone si mantengono estinte a nicols incrociati.

La roccia ridotta in polvere e trattata con acido nitrico mi permise di ottenere ben evidente la reazione caratteristica col molibdato ammonico.

Nei granuli maggiori di apatite notai talvolta inclusioni di quarzo.

Gneiss. — Il gneiss è la roccia più diffusa nella località; non presenta tipi molto variati per struttura e la schistosità è sempre ben evidente.

Se la struttura è poco variabile, varia invece molto la composizione, poichè da gneiss anfibolici in cui manca totalmente la mica si passa per termini intermedî ove havvi contemporaneamente anfibolo e mica a gneiss tipici con mica, biotite e muscovite. Fra questi ultimi osservai due notevoli varietà: L'una comparisce verso la sommità del colle del Sabbione; è molto compatta e dura quantunque eminentemente schistosa; ha color nero se osservata parallelamente alla schistosità, nella qual direzione la roccia sembra formata quasi esclusivamente da lamelle di biotite; normalmente a questa direzione si notano straterelli di color biancastro che alternano molto regolarmente con quelli di biotite e che hanno pressochè lo stesso spessore. Questi straterelli sono costituiti da quarzo e plagioclasio con rara mica.

L'altra varietà s'incontra come accidentalità nel gneiss normale. È un gneiss del tipo di quelli che il Franchi (1) menziona sotto il nome di *gneiss laminati;* esso presenta la superficie di schistosità di color nericcio lucente con aspetto sericitico. Al microscopio compariscono fascie sottili parallele formate da biotite, fra le quali sono accentrati gli altri componenti.

Minerali componenti del gneiss sono: *quarzo*, *ortosio*, *microclino*, *plagioclasio*, *anfibolo*, *mica (biotite, muscovite)*, *epidoto*, *sfeno*, *apatite*, *ematite* e *zircone*.

Il *quarzo* è sempre abbondantissimo in granuli irregolari modellati sugli altri componenti; è limpido, incoloro, per lo più minutamente fessurato; non è rara in esso l'estinzione ondulata; abbondanti sono inclusioni di microliti ed altre facilmente discernibili di *zircone*, talora in cristalli perfetti costituiti da prismi quadrati terminati da ottaedri.

---

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93.* " Boll. R. Com. Geol. ", a. 1894, N. 3, pag. 6.

Il quarzo si trova anche in minuti granuli associati all'ortosio, assumendo caratteristica struttura a mosaico.

Pure in granuli irregolari è l'*ortosio* ben conservato, limpido, incoloro, o che presenta nell'interno un nucleo torbido dovuto ad incipiente alterazione. È raramente geminato secondo la legge di Karlsbad, presenta talvolta struttura zonata ed ha per lo più estinzione ondulata.

Non rare nell'ortosio sono inclusioni di dimensioni variabili, alcune sferoidali, altre a contorno irregolare e con varie dimensioni, di *plagioclasio* per lo più alterato, ma che in alcuni punti lascia ancora scorgere le linee della geminazione polisintetica. Altre frequenti inclusioni si hanno di *quarzo*, *apatite* e *zircone*.

Spesso frammezzo all'ortosio trovasi del *microclino*, poco abbondante, in stato abbastanza buono di conservazione e che a luce polarizzata presenta evidente la caratteristica struttura a reticolato.

Il *plagioclasio* è molto meno abbondante dell'ortosio ed ha distribuzione irregolare, poichè mentre è scarso in taluni punti, diventa in altri frequente, specialmente nei termini di passaggio alla diorite; è sempre in granuli irregolari; presenta la geminazione secondo la legge dell'albite, con angolo di estinzione oscillante fra 4° e 13°; meno comune è la geminazione del periclino associata alla prima.

Quantunque non sia raro incontrare il plagioclasio abbastanza ben conservato, esso è per lo più alterato in una massa biancastra, torbida, semiopaca, analogamente a quanto dissi per il plagioclasio della diorite.

Come prodotto di alterazione si ha frequentemente della *zoisite* in minuti aghetti.

L'*anfibolo* che o accompagna la mica o localmente la sostituisce, è l'*orneblenda* tipica di color verde scuro con pleocroismo dal verde scuro al verde bruno, al bruno; i caratteri sono analoghi a quelli indicati per l'orneblenda della diorite. Nel gneiss manca la varietà di orneblenda azzurra, non è però raro l'anfibolo incoloro che ha le associazioni descritte sopra con l'orneblenda.

Sparse nelle masse della roccia si hanno fibre allungate di *epidoto* di color giallognolo od incoloro con distinte le linee di sfaldatura; ha forti colori d'interferenza.

L'epidoto esiste pure in fibre associate a quelle di orneblenda di cui talora forma le terminazioni; in questo caso è logico ammettere trattarsi d'un prodotto d'alterazione.

La *biotite* è in scaglie o laminette irregolari od esagonali con i margini netti o corrosi ed evidenti finissime strie di sfaldatura; sovente le lamine sono deformate o contorte.

Ha color bruno con forte pleocroismo dal giallo bruno, al bruno-nero, all'opaco.

Come prodotto di alterazione la biotite dà una sostanza verde, torbida, non pleocroica; frequentemente contiene dell'*ematite* in laminette o grani di color rosso vivo, non di rado alterati in limonite.

In qualche punto associata alla biotite trovasi della *clorite* in laminette verdi chiare con evidente pleocroismo.

La *muscovite* è meno abbondante della biotite, colla quale è sempre associata; manca poi del tutto nelle varietà di gneiss anfibolici. Essa è in laminette minute con caratteri analoghi a quelli della biotite; sono esse incolore e leggermente giallognole con alti colori d'interferenza madreperlacei. Entrambe le miche sono fortemente biassiche.

Spesso nella massa della roccia, ma non mai molto abbondante, havvi dello *sfeno* in minuti cristalli, che dànno sezioni rombiche allungate di color bruniccio.

L'*apatite*, sempre presente, è molto disugualmente distribuita, per cui mentre in alcuni punti si presenta in rari individui sparsi sporadicamente nella roccia o inclusi negli altri componenti, in altri punti è così abbondante ed in individui così voluminosi da potersi considerare, analogamente a quanto notai nella diorite, come elemento accessorio caratteristico. I caratteri sono quelli già indicati.

Granito. — Il granito forma come il gneiss una serie di tipi per cui da graniti anfibolici in cui manca assolutamente la mica si ha, per termini intermedi con mica ed anfibolo, passaggio al granito tipico dove più non esiste l'anfibolo.

Delle miche si hanno biotite e muscovite associate, oppure solamente biotite, la quale in certi punti della roccia associata a plagioclasio in quantità rilevante, dà passaggio alla *granitite*.

Il granito è fra le roccie della valle la meno diffusa, non

comparendo che come accidentalità fra i gneiss, nei quali si presenta in dicchi di varia potenza.

Componenti sono: *quarzo, ortosio. mica (muscovite* e *biotite), anfibolo, microclino, plagioclasio. epidoto, pirosseno, apatite, sfeno, zircone, ematite* e *pirite.*

Il *quarzo* è sempre granulare, modellato sugli altri componenti; è incoloro, limpido; presenta talvolta estinzione ondulata; frequenti sono le traccie di rottura e le inclusioni specialmente di *zircone.*

Forma anche filoncini sparsi nella massa con direzioni molto irregolari; contiene sovente dei cristalli prismatici allungati di epidoto verde giallognolo.

L'*ortosio*, per lo più in buono stato di conservazione, è anch'esso granulare, limpido, incoloro; talora leggermente torbido per incipiente alterazione. Rari sono i geminati e questi sono secondo la legge di Karlsbad: presenta estinzione ondulata e non raramente struttura a mosaico.

In qualche punto associato all'ortosio notasi un feldspato triclino, reso evidente dalla geminazione polisintetica, le cui lamine sono interposte nell'ortosio in modo che le loro linee di geminazione sono normali a quella dell'ortosio, non potendosi quindi riferire il fenomeno ad un accrescimento micropertitico, nel quale le dette linee dovrebbero esser parallele.

Notevole nell'ortosio è la presenza di abbondanti inclusioni sferoidali od a contorno irregolare di quarzo o di un plagioclasio che le geminazioni e l'angolo di estinzione mi portano a riferire ad *albite;* queste inclusioni presentano generalmente un nucleo interno scuro e sono attraversate per tutta la lunghezza dalle linee di geminazione che compariscono ben evidenti anche sopra il nucleo interno. Questo a forte ingrandimento presenta struttura granulare e lo ritengo dovuto ad un inizio di alterazione.

Dette inclusioni sono in alcuni punti abbondantissime tanto da gremire l'ortosio; non rare sono anche inclusioni di *apatite* e di *zircone.*

L'ortosio si trova anche associato al quarzo con struttura microgranulitica; tale associazione occupa i vani frammezzo ai grandi individui di quarzo ed ortosio.

Uniti all'ortosio, ma con distribuzione molto irregolare, sono grandi individui per lo più ben conservati di *microclino.*

Oltre ai feldspati sopra menzionati si ha del *plagioclasio* con abito granulare o cristallino più o meno distinto; i caratteri e le alterazioni sono analoghi a quanto ho descritto per quello della diorite.

La distribuzione del plagioclasio è molto irregolare; mentre in alcuni punti della roccia manca si può dire del tutto, in altri aumenta fino a prevalere sull'ortosio, dando passaggio dove vi è la biotite ad una granitite e, dove abbonda l'anfibolo, alla diorite.

Dell'*anfibolo* si trova quasi esclusivamente l'*orneblenda tipica* verde bruna con i caratteri sopra indicati; solo raramente notai la presenza dell'orneblenda azzurra, mentre manca del tutto la *edenite*.

Talvolta nei cristalli di orneblenda le estremità si presentano con colore verde più chiaro e pleocroismo meno sensibile; in altri punti l'orneblenda si è ridotta in aggregati filamentosi che i colori e l'esame a luce polarizzata rivelano formati da un intreccio di fibre di *attinoto* con *epidoto;* il primo di color verde erba, il secondo verde giallognolo chiaro.

Accentrate specialmente in vicinanza dei filoncini di quarzo che attraversano la massa si hanno laminette di *clorite* con colore verde chiaro ed evidente pleocroismo; con analoga giacitura esistono prismi allungati fibrosi di *epidoto*.

La *mica* è duplice: *biotite* e *muscovite*. La prima non manca mai, per cui la si trova da sola od associata all'orneblenda od alla muscovite, dando passaggio alla diorite ed al granito normale. Ha color verde bruno con forte pleocroismo ed in certi punti è quasi opaca; talora ha colore bruno rossastro.

È in lamine isolate od associate, variamente deformate, piegate, corrose; per lo più sono ben evidenti linee finissime di sfaldatura. Prodotti d'alterazione sono *clorite*, *limonite*, oppure una massa torbida verde scura senza pleocroismo.

Frammezzo alle lamine di biotite si hanno talora liste incolore con alti colori d'interferenza di *epidoto*.

La *muscovite*, che è associata alla biotite e talvolta prevale su questa, è in minute lamelle variamente aggregate, incolore o giallognole e che a luce polarizzata presentano vivissimi colori d'interferenza madreperlacei.

Accessoriamente s'incontrano nella roccia piccoli individui prismatici allungati di *pirosseno* con color verde e sensibile pleo-

croismo; notevole è la fortissima dispersione che presentano, non essendo mai completamente estinti.

Raro è lo *sfeno;* abbondante invece l'*apatite*, sia inclusa nei componenti, che sparsa nella massa; i caratteri dei due minerali sono quelli già indicati.

Nella roccia s'incontrano anche *ematite* e *pirite;* questa in laminette di color rosso vivo, quella in granuli che a luce riflessa hanno il caratteristico color giallo ottone; entrambi i minerali possono esser alterati in limonite.

In zone ristrette della roccia il granito normale dà passaggio a noduli di identica composizione, ma a struttura nettamente macroscopica, raggiungendo i componenti diametri fin di parecchi centimetri.

Nei detti noduli il *quarzo* è in grossi granuli vetrosi con lucentezza grassa e frattura concoide; forma anche grosse inclusioni visibili ad occhio nudo nel feldspato.

L'*ortosio* è in cristalli prismatici ben definiti o mancanti di terminazione distinta; ha color bianco latteo; comuni sono grandi geminati secondo la legge di Karlsbad.

Grossi granuli si hanno di *microclino* e *plagioclasio;* quest'ultimo è per lo più caolinizzato e solo in alcuni individui sono visibili le geminazioni secondo le leggi dell'albite e del periclino.

Biotite e *muscovite* formano ampie lamine facilmente sfaldabili; la muscovite è bianca argentea o giallognola con lucentezza madreperlacea: la biotite verde scura (bruno-rossastra al microscopio) ha lucentezza submetallica; entrambe le miche sono fortemente biassiche.

Non raro è l'accrescimento parallelo di biotite e muscovite, per cui frammezzo a lamine incolori ne compariscono altre brune con netto distacco fra le due varietà. Prodotto di alterazione della biotite è in molti punti limonite.

Nei feldspati macrocristallini sono abbondanti inclusioni granulari di *apatite*, che manca invece nei feldspati della roccia microcristallina circostante.

Termino menzionando alcuni filoncini che spesso attraversano il gneiss ed il granito con direzioni molto irregolari e potenza variabile da pochi millimetri a parecchi centimetri.

Essi sono formati esclusivamente da *quarzo* granulare o da

Atti R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. XXXVIII.

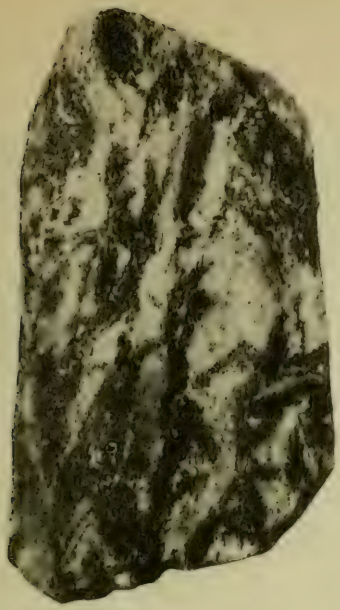


Fig. 1

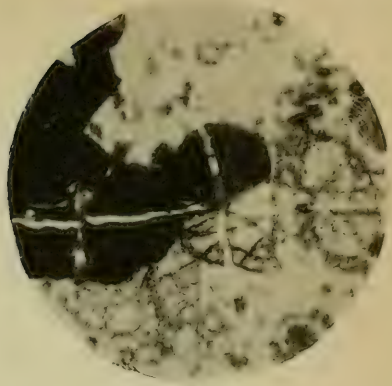


Fig. 3

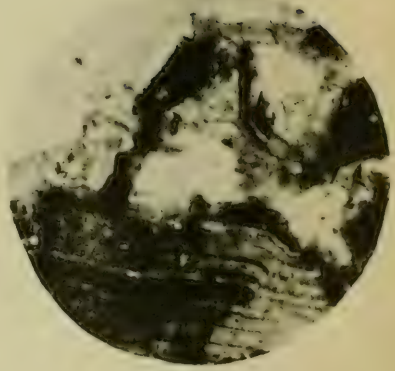


Fig. 4

Fig. 2

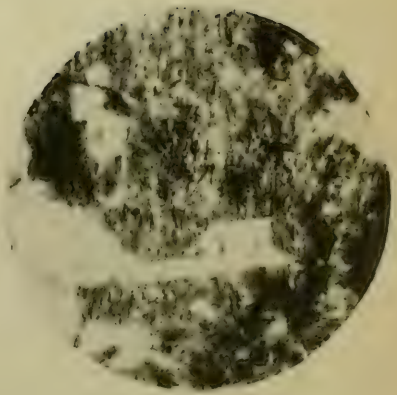


Fig. 5

associazione granulare di *quarzo, ortosio* e *plagioclasio;* in altri il quarzo è accompagnato da cristalli allungati e finamente striati di *epidoto* e molto comunemente da abbondante *clorite* in laminette di color verde scuro di forma romboidale, talvolta con struttura vermiculare; tale clorite è pure inclusa nel quarzo e riveste pure in alcuni casi dei piccoli cristalli di quarzo ben definiti che si osservano in alcune minute geodi che si incontrano nei filoncini. La clorite poi forma da sola alcuni dei filoncini e non di rado è alterata assumendo una tinta bruna per formazione di limonite.

Filoni più complessi sono costituiti da *quarzo, ortosio, clorite, epidoto* in grossi prismi di color giallo miele, *sfeno* discretamente abbondante, ma sempre in individui microscopici, ed *ematite* in grossi granuli, talora alterati in limonite.

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.
Marzo 1903.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª. — Particolarità di struttura nella diorite. Grandezza naturale.
Fig. 2ª. — Id. Id. Id. Id. Id.
Fig. 3ª. — Linee di frattura nella diorite senza spostamenti.
Fig. 4ª. — Cristalli di feldispato plagioclasico contorti.
Fig. 5ª. — Associazione di edenite e di orneblenda.

Risoluzione del problema generale dell'induzione elettrodinamica nel caso di un piano conduttore indefinito.

Nota di TOMMASO BOGGIO a Torino.

In due importantissime Memorie (*) il Prof. Levi-Civita determinò l'influenza di un piano conduttore indefinito sul campo elettromagnetico generato o dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente al piano conduttore, o da una corrente alternata, pure parallela allo stesso piano, ottenendo risultati notevolissimi sì dal punto di vista teorico che pratico.

In questa Nota risolvo il problema generale di determinare l'influenza di un piano conduttore indefinito sopra un campo elettromagnetico qualunque: suppongo dapprima (§ 2) che il campo elettromagnetico inducente sia sinusoidale, poi considero (§ 6) il caso generale.

1. — Consideriamo un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile, e in quiete, la cui omogeneità sia interrotta soltanto da alcune sedi Σ (isolate, a una, o a due dimensioni) di cariche e di correnti elettriche, e indichiamo con F, e (U, V, W) rispettivamente i potenziali elettrico e vettore *ritardati* (cioè

(*) Levi-Civita, *Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini* (" Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse ", III série, t. IV, a. 1902).

Id., *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo* (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", serie 5ª, vol. XI, 1° semestre 1902).

Cfr. anche: Levi-Civita, *La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione* (Id., id., 2° semestre 1902).

Picciati, *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica, ecc.* (Id., vol. XII, 1° semestre 1903).

propagantisi colla velocità della luce, che denoteremo con $\frac{1}{A}$).
Nella loro qualità di potenziali ritardati, F, U, V, W verificano le equazioni:

$$\text{(I)} \qquad \Box F = 0, \qquad \Box U = 0, \qquad \Box V = 0, \qquad \Box W = 0$$
$$\left(\Box \equiv \Delta_2 - A^2 \frac{d^2}{dt^2}\right)$$

e si comportano nei punti delle Σ come potenziali ordinarî delle distribuzioni corrispondenti. A priori queste possono essere qualunque, purchè soltanto (oltre a ovvie condizioni di continuità, di derivabilità, ecc.) sia soddisfatto il principio di conservazione dell'elettricità, che si traduce nell'equazione:

$$\text{(II)} \qquad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Per tenere poi conto degli effetti prodotti dalla presenza di un conduttore, sopra un campo elettromagnetico assegnato, basta evidentemente aggiungere ai potenziali del campo i contributi provenienti dalle distribuzioni (di cariche e di correnti) che si destano per induzione sul conduttore.

Designino F', U', V', W' i potenziali del campo dato [i quali devono naturalmente soddisfare alle equazioni (I), (II)], F_1, U_1, V_1, W_1 quelli (a priori incogniti) che provengono dalle distribuzioni indotte.

Per determinare F_1, U_1, V_1, W_1 — oltre a ovvie condizioni, iniziali o qualitative, di continuità, di regolarità, di comportamento all'infinito, ecc. — abbiamo:

a) le equazioni (I), (II);

b) le equazioni che esprimono la legge di Ohm per la superficie conduttrice.

Supponendo che quest' ultima sia addirittura il piano conduttore $z = 0$, che indicheremo anche con σ, è chiaro che sarà intanto $W_1 = 0$, e le equazioni relative a tale piano potranno porsi sotto la forma:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{dF_1}{dx} + A \dfrac{dU_1}{dt} - h \dfrac{dU_1}{d|z|} = -\left(\dfrac{dF'}{dx} + A \dfrac{dU'}{dt}\right) \\[2ex] \dfrac{dF_1}{dy} + A \dfrac{dV_1}{dt} - h \dfrac{dV_1}{d|z|} = -\left(\dfrac{dF'}{dy} + A \dfrac{dV'}{dt}\right), \end{cases}$$

ove h è una costante che dipende dalla resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore, e $|z|$ indica il valor assoluto di z; poichè è chiaro che F_1, U_1, V_1 possono riguardarsi come funzioni di $|z|$ anzichè di z, a causa della necessaria simmetria di queste funzioni rispetto al piano σ.

Sicchè, in conclusione, si tratta di determinare tre funzioni regolari di $x, y, |z|, t$ che verifichino le (I), (II), si annullino per $|z| = \infty$, e per $z = 0$ verifichino le (III).

2. — Supponiamo che i potenziali del campo (inducente) dato siano della forma:

$$(1) \quad F' = f(t)F'', \quad U' = u(t)U'', \quad V' = v(t)V'', \quad W' = w(t)W''$$

ove f, u, v, w sono funzioni solo di t ed F'', U'', V'', W'' dipendono solo da x, y, z.

È chiaro che queste funzioni non possono essere affatto arbitrarie, perchè infatti esse devono, come si disse, soddisfare alle (I), (II).

Sostituendo le (1) nelle (I) si trova facilmente che le funzioni f, u, v, w devono essere integrali dell'equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0,$$

cioè devono essere della forma:

$$c_1 e^{mt} + c_2 e^{-mt},$$

ove m, c_1, c_2 sono costanti arbitrarie (reali o complesse); ne viene poi subito che le funzioni F'', U'', V'', W'' devono soddisfare all'equazione:

$$\Delta_2 - m^2 A^2 = 0.$$

Un'altra condizione si otterrebbe sostituendo le (1) nelle (II).

Ciò posto, supponiamo dapprima che i potenziali (inducenti) F', U', V' siano le parti reali (o immaginarie) di espressioni della forma:

$$F' = e^{iat} F'', \quad U' = e^{iat} U'', \quad V' = e^{iat} V'', \quad (i = \sqrt{-1}),$$

ove a è una costante reale, ed F'', U'', V'' sono funzioni soltanto di x, y, z, aventi derivate dei primi 5 ordini finite; è chiaro allora che le posizioni precedenti rientrano nelle (1) e che il campo inducente considerato è sinusoidale.

Proponiamoci, in conseguenza, di determinare (i potenziali indotti sul piano σ) F_1, U_1, V_1 nel caso che i potenziali inducenti abbiano l'espressione precedente. È chiaro che trovati F_1, U_1, V_1 basterà prenderne la parte reale (o immaginaria rispettivamente) per avere i potenziali indotti, sul piano σ, dal campo dato.

Vediamo se si possono assumere F_1, U_1, V_1 sotto la forma:

$$F_1 = e^{i\alpha t} F_2, \qquad U_1 = e^{i\alpha t} U_2, \qquad V_1 = e^{i\alpha t} V_2, \tag{2}$$

ove α è una costante reale da determinarsi, ed F_2, U_2, V_2 sono funzioni solo di $x, y, |z|$, pure da determinarsi.

Sostituendo le (2) nelle (I), (II) si trova intanto che le funzioni F_2, U_2, V_2 devono soddisfare alle equazioni:

$$\Delta_2 + \alpha^2 A^2 = 0 \tag{3}$$

$$i\alpha A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = 0. \tag{4}$$

Sostituendo poi le (2) nelle (III) si ha, per $z = 0$:

$$\begin{cases} e^{i\alpha t}\dfrac{dF_2}{dx} + i\alpha A e^{i\alpha t} U_2 - h e^{i\alpha t}\dfrac{dU_2}{d|z|} = -e^{i\alpha t}\dfrac{dF''}{dx} - i\alpha A e^{i\alpha t} U'' \\[2ex] e^{i\alpha t}\dfrac{dF_2}{dy} + i\alpha A e^{i\alpha t} V_2 - h e^{i\alpha t}\dfrac{dV_2}{d|z|} = -e^{i\alpha t}\dfrac{dF''}{dy} - i\alpha A e^{i\alpha t} V'', \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \dfrac{dF_2}{dx} + i\alpha A U_2 - h\dfrac{dU_2}{d|z|} = -e^{i(a-\alpha)t}\left(\dfrac{dF''}{dx} + i a A U''\right) \\[2ex] \dfrac{dF_2}{dy} + i\alpha A V_2 - h\dfrac{dV_2}{d|z|} = -e^{i(a-\alpha)t}\left(\dfrac{dF''}{dy} + i a A V''\right) \end{cases} \tag{5}$$

derivando rispetto a t si ha:

$$\begin{cases} (a-\alpha)\left(\dfrac{dF''}{dx} + i a A U''\right) = 0 \\[2ex] (a-\alpha)\left(\dfrac{dF''}{dy} + i a A V''\right) = 0, \end{cases}$$

onde, supponendo che le funzioni

$$(6) \qquad \frac{dF''}{dx} + iaAU'', \qquad \frac{dF''}{dy} + iaAV''$$

non si annullino entrambe per $z = 0$, dovrà essere:

$$\alpha = a;$$

così la costante α è già determinata, e le equazioni (3), (4), (5) possono perciò scriversi:

$$(3') \qquad \Delta_2 + a^2A^2 = 0$$

$$(4') \qquad iaAF_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = 0$$

$$(5') \qquad \begin{cases} \dfrac{dF_2}{dx} + iaAU_2 - h\dfrac{dU_2}{d|z|} = -p \\[2ex] \dfrac{dF_2}{dy} + iaAV_2 - h\dfrac{dU_2}{d|z|} = -q, \end{cases} \qquad (z=0)$$

ove p, q sono quantità conosciute, e precisamente rappresentano il valore delle funzioni (6) per $z = 0$.

Dall'ipotesi fatta sulle funzioni F'', U'', V'', segue che le funzioni p, q, e le loro derivate parziali rispetto ad x, y dei primi 4 ordini, sono funzioni finite, e noi supporremo inoltre che nei punti all'infinito del piano σ si annullino di ordine superiore al secondo.

Ora, in virtù di un teorema del Prof. Picciati (*), esiste una sola funzione che soddisfa all'equazione $\Delta_2 + k^2 = 0$, per $z = 0$ assume valori dati, e inoltre soddisfa alle condizioni seguenti, che, per brevità, chiameremo *condizioni fondamentali*:

a) è regolare per tutti i valori reali di x, y, e positivi di $|z|$ (cioè è regolare nel semispazio in cui $z > 0$);

b) si annulla, colle sue derivate prime, per $|z| = \infty$, come $\frac{1}{|z|^2}$ almeno.

Perciò, nel caso nostro, se indichiamo con P, Q le funzioni

(*) Picciati, Nota citata.

che soddisfano alla (3′), alle condizioni fondamentali, e per $z=0$ diventano rispettivamente eguali a $-p$ e a $-q$, tali funzioni sono uniche; allora considerando le coppie di funzioni:

$$\left(\frac{dF_2}{dx}+iaAU_2-h\frac{dU_2}{d|z|}\ ,\quad P\right)$$

$$\left(\frac{dF_2}{dy}+iaAV_2-h\frac{dV_2}{d|z|}\ ,\quad Q\right),$$

le (5′) mostrano che, per $z=0$, le funzioni della prima coppia, e così pure quelle della seconda, assumono valori eguali; e poichè, pel teorema sopra ricordato del Picciati, non vi possono essere due integrali della (3′), che verifichino le condizioni fondamentali, e prendano gli stessi valori per $z=0$, così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per $z=0$):

$$\frac{dF_2}{dx}+iaAU_2-h\frac{dU_2}{d|z|}=P \tag{7}$$

$$\frac{dF_2}{dy}+iaAV_2-h\frac{dV_2}{d|z|}=Q. \tag{8}$$

Siamo pertanto ridotti a integrare il sistema (3′), (4′), (7), (8) *mediante funzioni* F_2, U_2, V_2 *di* x, y, $|z|$ *regolari per tutti i valori reali di* x, y, *positivi di* $|z|$ *e nulle per* $|z|=\infty$.

3. — Per ciò fare incomincieremo a dedurre da queste equazioni un'altra contenente solo la funzione F_2.

Deriviamo perciò la (7) rispetto ad x, la (8) rispetto ad y, e sommiamo, si ha:

$$\frac{d^2F_2}{dx^2}+\frac{d^2F_2}{dy^2}+iaA\left(\frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}\right)-h\frac{d}{d|z|}\left(\frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}\right)=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\ ;$$

ora dalla (3′) si ha:

$$\frac{d^2F_2}{dx^2}+\frac{d^2F_2}{dy^2}=-\frac{d^2F_2}{d|z|^2}-a^2A^2F_2,$$

perciò si può scrivere:

$$-\frac{d^2F_2}{d|z|^2}+ihaA\frac{dF_2}{d|z|}+ \tag{9}$$

$$+iaA\left(iaAF_2+\frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}\right)-h\frac{d}{d|z|}\left(iaAF_2+\frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}\right)=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\ ,$$

e, ricordando la (4'):

$$(10) \qquad -\frac{d^2F_2}{d|z|^2} + i\hbar a A \frac{dF_2}{d|z|} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy},$$

che è l'equazione che volevamo ottenere.

Ciò posto, io dico che il sistema (3'), (4'), (7), (8) è equivalente al sistema (3'), (10), (7), (8); basterà dimostrare che da quest'ultimo sistema si può ricavare la (4').

Orbene la (9), ricordando la (10) diventa:

$$i a A \left(i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} \right) - h \frac{d}{d|z|} \left(i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} \right) = 0,$$

che, ponendo $c = \frac{aA}{h}$, può scriversi:

$$(11) \qquad \frac{d}{d|z|} \left(i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} \right) - i c \left(i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} \right) = 0,$$

e l'integrale generale di quest'equazione è della forma:

$$i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = \varphi e^{ic|z|},$$

ove φ è una quantità indipendente da $|z|$; ora per $|z| = \infty$ il secondo membro è indeterminato, mentre il primo deve annullarsi, bisogna perciò che sia $\varphi = 0$, e quindi

$$i a A F_2 + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = 0,$$

che è precisamente la (4').

Basterà dunque integrare il sistema (3'), (10), (7), (8) *mediante funzioni* F_2, U_2, V_2 *di* $x, y, |z|$, *regolari per tutti i valori reali di* x, y, *positivi di* $|z|$, *e nulle per* $|z| = \infty$.

Dalla (10) integrando rispetto a $|z|$ fra un valore generico ed ∞ si deduce:

$$(12) \qquad \frac{dF_2}{d|z|} - i b F_2 = \int_{|z|}^{\infty} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) d|z|, \qquad (b = h a A);$$

se ora si considera la funzione:

$$(13) \qquad F_2 = - e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_{|z|}^{\infty} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) d|z|,$$

(nella quale le integrazioni fra $|z|$ e ∞ hanno effettivamente senso, per le ipotesi fatte circa il comportamento di P e Q per $|z| = \infty$), essa soddisfa alle (3′), (12), è regolare per tutti i valori reali di x, y e positivi di $|z|$, e si annulla per $|z| = \infty$; orbene io dico che tale funzione è anche l'unica che soddisfa a tutte queste condizioni, perchè se esistessero due di tali funzioni, la loro differenza Φ verificherebbe intanto l'equazione

$$\frac{d\Phi}{d|z|} - ib\Phi = 0\,,$$

e si annullerebbe per $|z| = \infty$; ora, l'equazione precedente essendo dello stesso tipo della (11), si conclude, come in quel caso, che deve essere identicamente $\Phi = 0$, e ciò prova il nostro asserto.

Perciò *la funzione cercata* F_2 *rimane definita dalla* (13).

Ponendo poi:

$$P_1(x, y, |z|) = -\int_{|z|}^{\infty} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right) d|z|\,,$$

si può ancora porre F_2 sotto la forma:

$$F_2 = i\int_0^{\infty} e^{-b\lambda} P_1(x, y, |z| - i\lambda)\, d\lambda.$$

Per determinare U_2, V_2 consideriamo le (7), (8) che possono scriversi:

$$\frac{dU_2}{d|z|} - icU_2 = \frac{1}{h}\left(\frac{dF_2}{dx} - P\right) \tag{14}$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} - icV_2 = \frac{1}{h}\left(\frac{dF_2}{dy} - Q\right); \tag{15}$$

i secondi membri sono ormai noti, perciò da esse si possono ricavare le funzioni U_2, V_2 con formole analoghe alla (13), e si ottiene così:

$$U_2 = \frac{1}{h} e^{ic|z|}\int_z^{\infty} e^{-ic|z|} P\, d|z| - \frac{1}{h} e^{ic|z|}\int_z^{\infty} e^{-ic|z|} \frac{dF}{dx}\, d|z| \tag{14$_1$}$$

$$V_2 = \frac{1}{h} e^{ic|z|}\int_{|z}^{\infty} e^{-ic|z|} Q\, d|z| - \frac{1}{h} e^{ic|z|}\int_{|z}^{\infty} e^{-ic|z|} \frac{dF_2}{dy}\, d|z|\,, \tag{15$_1$}$$

ovvero, sostituendo ad F_2 il suo valore (13) e poi integrando per parti:

$$(14') \qquad U_2 = \frac{1}{h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} P \, d|z| -$$

$$- \frac{1}{i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_{|z|}^{\infty} \left(\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dx\, dy} \right) d|z| +$$

$$+ \frac{1}{i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_{|z|}^{\infty} \left(\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dx\, dy} \right) d|z| ,$$

ed una formola analoga si ha per V_2. Anche in queste formole sono effettivamente legittime le integrazioni fra $|z|$ ed ∞.

Le espressioni così ottenute per F_2, U_2, V_2 verificheranno pure, come si dimostrò dianzi, l'equazione (4').

Prendendo poi, come si disse, le parti reali dei secondi membri delle (2) si avranno i potenziali indotti, sul piano σ, dal campo sinusoidale dato.

Supponiamo ora invece che le funzioni (6) si annullino per $z = 0$ (*); allora le funzioni P, Q sono identicamente nulle, perciò dalla (13) risulta $F_2 = 0$, e quindi dalle (14_1), (15_1): $U_2 = V_2 = 0$; in tal caso si avrebbe dunque:

$$F_1 = U_1 = V_1 = 0 ;$$

cioè i potenziali delle correnti indotte sul piano σ, sarebbero nulli in ogni punto dello spazio, e quindi non esisterebbero correnti indotte.

4. — Per ciò che dovremo dire in seguito, conviene trasformare le espressioni ora ottenute di F_2, U_2, V_2.

Cerchiamo dapprima l'espressione effettiva delle funzioni P, Q che soddisfano alla (3') e per $z = 0$ assumono rispettivamente gli stessi valori dei secondi membri delle (5').

Poniamo perciò:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (|z| - \zeta)^2 ,$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (|z| + \zeta)^2 .$$

(*) È chiaro che dall'annullarsi di queste funzioni per $z = 0$, non segue il loro annullarsi per ogni valore di $|z|$.

allora r indica la distanza del punto $(x, y, |z|)$, del semispazio $z > 0$, dal punto arbitrario (ξ, η, ζ) ed r_1 è la distanza del punto $(x, y, -|z|)$ [simmetrico del punto $(x, y, |z|)$ rispetto al piano σ] dallo stesso punto (ξ, η, ζ). Allora le funzioni P, Q sono espresse da (*):

$$\begin{cases} P(x, y, |z|) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma p(\xi, \eta)\, \dfrac{d}{d\zeta}\left[\dfrac{\cos(aAr)}{r} - \dfrac{\cos(aAr_1)}{r_1}\right] d\sigma \\ Q(x, y, |z|) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma q(\xi, \eta)\, \dfrac{d}{d\zeta}\left[\dfrac{\cos(aAr)}{r} - \dfrac{\cos(aAr_1)}{r_1}\right] d\sigma\,; \end{cases}$$

in questi integrali le variabili di integrazione sono ξ, η; e si intende bene che, una volta calcolata la $\frac{d}{d\zeta}$, bisogna poi fare $\zeta = 0$.

Osservando che nei punti di σ, cioè per $\zeta = 0$, si ha $r_1 = r$, è facile avere, per $\zeta = 0$:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\cos(aAr)}{r} - \frac{\cos(aAr_1)}{r}\right] = -\frac{1}{r^2}[aAr\,\mathrm{sen}(aAr) + \cos(aAr)]\left(\frac{dr}{d\zeta} - \frac{dr_1}{d}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}[aAr\,\mathrm{sen}(aAr) + \cos(aAr)]\,\frac{2|z|}{r} =$$

$$= \frac{2}{r^2}[aAr\,\mathrm{sen}(aAr) + \cos(aAr)]\,\frac{dr}{d|z|} = -2\,\frac{d}{d|z|}\,\frac{\cos(aAr)}{r},$$

quindi:

$$(16)\qquad \begin{cases} P(x, y, |z|) = -\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d}{d|z|}\displaystyle\int_\sigma p\,\dfrac{\cos(aAr)}{r}\,d\sigma \\ Q(x, y, |z|) = -\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d}{d|z|}\displaystyle\int_\sigma q\,\dfrac{\cos(aAr)}{r}\,d\sigma. \end{cases}$$

Come si vede, questi integrali sono affatto analoghi all'integrale dell'equazione di Laplace, che soddisfa alle condizioni fondamentali, e assume dati valori sul piano σ; e si può pertanto fare, relativamente ad essi, uno studio analogo a quello che si fa per l'integrale anzidetto dell'equazione di Laplace.

(*) Picciati, Nota citata.

Calcoliamo ora $\frac{dP}{dx}$. Si ha:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d|z|}\int_\sigma p\frac{d}{dx}\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d|z|}\int_\sigma p\frac{d}{d\xi}\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d|z|}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\left[\int_{-\infty}^{\infty} p\frac{d}{d\xi}\frac{\cos(aAr)}{r}d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d|z|}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\left[-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{d\xi}\frac{\cos(aAr)}{r}d\xi\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d|z|}\int_\sigma \frac{dp}{d\xi}\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma;$$

formole analoghe si hanno per le derivate successive di P, Q rispetto ad x, y. Si deduce quindi che per prendere le derivate di un ordine qualunque, rispetto ad x, y, delle funzioni P, Q, basta prendere le derivate, dello stesso ordine, rispetto a ξ, η, delle funzioni p, q sotto il segno $\int_\sigma$.

Poichè le funzioni p, q, date su σ, sono funzioni finite e continue dei punti del piano σ, aventi derivate parziali dei primi quattro ordini rispetto a ξ, η pure finite, e nei punti all'infinito dello stesso piano si annullano di ordine superiore a quello di $\frac{1}{r^2}$, ne segue che gli integrali

$$\int_\sigma p\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma, \qquad \int_\sigma q\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma$$

e le loro derivate dei primi 4 ordini soddisfano alle condizioni fondamentali, e tendono a limiti finiti quando ci avviciniamo ai punti di σ; e allora le funzioni P, Q date dalle (16) soddisfano alle condizioni fondamentali, verificano identicamente la (3'), e quando ci avviciniamo ai punti di σ tendono ai corrispondenti valori assegnati in questi punti.

È poi chiaro che:

$$\int_{|z|}^{\infty}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}\right)d|z| = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left(\frac{dp}{d\xi}+\frac{dq}{d\eta}\right)\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma,$$

quindi la (13) può scriversi:

$$(13') \qquad F_2 = -\frac{1}{2\pi}e^{ib|z|}\int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|}d|z|\int_\sigma\left(\frac{dp}{d\xi}+\frac{dq}{d\eta}\right)\frac{\cos(aAr)}{r}d\sigma.$$

Dalla (14′) si ha poi:

$$U_2 = -\frac{1}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \frac{d}{d|z|} \int_\sigma p \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{d^2q}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{d^2q}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma;$$

eseguendo una integrazione per parti nel 1° integrale, si può scrivere:

$$(14'') \quad U_2 = \frac{1}{2\pi h} \int_\sigma p \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma - \frac{ic}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma p \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{d^2q}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{d^2q}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma;$$

analogamente:

$$(15'') \quad V_2 = \frac{1}{2\pi h} \int_\sigma q \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma - \frac{ic}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int q \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi d\eta} + \frac{d^2q}{d\eta^2} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma +$$

$$\frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2p}{d\xi d\eta} + \frac{d^2q}{d\eta^2} \right) \frac{\cos(aAr)}{r} d\sigma.$$

Poichè le funzioni p, q hanno derivate dei primi 4 ordini, ne viene che le funzioni F_2, U_2, V_2 date dalle (13′), (14″), (15″) ammettono derivate dei primi 2 ordini, che soddisfano a tutte le condizioni richieste; perciò tali funzioni risolvono la questione proposta.

5. — Consideriamo ora un campo inducente i cui potenziali F', U', V', siano le parti reali di espressioni del tipo:

$$F' = e^{iat} F_1'' + e^{ibt} F_2''$$

$$U' = e^{iat} U_1'' + e^{ibt} U_2''$$

$$V' = e^{iat} V_1'' + e^{ibt} V_2'',$$

con a, b costanti reali ed F_1'', F_2'', U_1'', U_2'', V_1'', V_2'' funzioni soltanto di x, y, z, aventi derivate dei primi 5 ordini finite.

Vediamo se si può porre, per i potenziali indotti sul piano σ:

$$F_1 = e^{i\alpha t} F_{21} + e^{i\beta t} F_{22}$$

$$U_1 = e^{i\alpha t} U_{21} + e^{i\beta t} U_{22}$$

$$V_1 = e^{i\alpha t} V_{21} + e^{i\beta t} V_{22},$$

ove α, β sono costanti reali da determinarsi, ed F_{21}, F_{22}, ..., V_{22} sono funzioni solo di x, y, $|z|$, pure da determinarsi. È chiaro che dopo aver determinati F_1, U_1, V_1 basterà prenderne la parte reale per avere effettivamente i potenziali indotti sul piano σ dal campo dato.

Sostituendo nelle (I) si ha:

$$(\Delta_2 + \alpha^2 A^2) F_{21} + e^{i(\beta-\alpha)t} (\Delta_2 + \beta^2 A^2) F_{22} = 0,$$

quindi:

$$(\Delta_2 + \alpha^2 A^2) F_{21} = 0, \qquad (\Delta_2 + \beta^2 A^2) F_{22} = 0,$$

ed equazioni analoghe alle due precedenti sono verificate rispettivamente dalle funzioni U_{21}, V_{21}; U_{22}, V_{22}.

Dalla (II) si ricava poi:

$$i\alpha A F_{21} + \frac{dU_{21}}{dx} + \frac{dV_{21}}{dy} + e^{i(\beta-\alpha)t} \left(i\beta A F_{22} + \frac{dU_{22}}{dx} + \frac{dV_{22}}{dy} \right) = 0,$$

cioè:

$$i\alpha A F_{21} + \frac{dU_{21}}{dx} + \frac{dV_{21}}{dy} = 0$$

$$i\beta A F_{22} + \frac{dV_{22}}{dx} + \frac{dV_{22}}{dy} = 0.$$

Dalle (III), supponendo che le funzioni F_1'', ..., V_2'' siano generiche, si ricava:

$$\alpha = a, \ \beta = b; \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha = b, \ \beta = a;$$

questa seconda soluzione però non differisce sostanzialmente dalla prima, onde attenendoci alla prima, le condizioni per $z = 0$ potranno scriversi:

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{21}}{dx} + iaAU_{21} - h\dfrac{dU_{21}}{d|z|} = -\dfrac{dF_1''}{dx} - iaAU_1'' \\ \dfrac{dF_{21}}{dy} + iaAV_{21} - h\dfrac{dV_{21}}{d|z|} = -\dfrac{dF_1''}{dy} - iaAV_1'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{22}}{dx} + ibAU_{22} - h\dfrac{dU_{22}}{d|z|} = -\dfrac{dF_2''}{dx} - ibAU_2'' \\ \dfrac{dF_{22}}{dy} + ibAV_{22} - h\dfrac{dV_{22}}{d|z|} = -\dfrac{dF_2''}{dy} - ibAV_2''; \end{cases}$$

col procedimento dei §§ 2, 3 si possono determinare separatamente dapprima le funzioni F_{21}, F_{22}, e poi le funzioni U_{21}, V_{21}; U_{22}, V_{22}; e con ciò il problema è risolto.

Analogamente si può procedere se i potenziali inducenti F', U', V' sono le parti reali di espressioni della forma:

$$F' = \sum_0^m{}_n e^{ia_n t} F_n'', \quad U' = \sum_0^m{}_n e^{ib_n t} U_n'', \quad V' = \sum_0^m{}_n e^{ic_n t} V_n'',$$

con a_n, b_n, c_n costanti reali, ed F_n'', U_n'', V_n'' funzioni solo di x, y, z.

6. — Consideriamo infine il caso di un campo elettromagnetico qualunque.

Applicando il noto sviluppo di Fourier possiamo sempre ritenere che i potenziali inducenti F', U', V' siano le parti reali delle serie dei secondi membri delle eguaglianze:

$$(17) \qquad F' = \sum_0^\infty{}_n e^{int} F_n'', \quad U' = \sum_0^\infty{}_n e^{int} U_n'', \quad V' = \sum_0^\infty{}_n e^{int} V_n'',$$

ove F_n'', U_n'', V_n'' sono funzioni di x, y, z.

Supporremo che le serie precedenti abbiano derivate successive dei primi 5 ordini, rispetto ad x, y, z, t.

Proponiamoci di trovare F_1, U_1, V_1 nel caso che i potenziali inducenti siano quelli espressi dalle (17); è allora evidente che, una volta determinati F_1, U_1, V_1, basterà prenderne la parte reale per avere effettivamente i potenziali indotti sul piano σ dal campo dato.

Vediamo se è possibile porre:

$$(18) \qquad F_1 = \sum_0^\infty{}_n e^{int} F_{2,n}, \quad U_1 = \sum_0^\infty{}_n e^{int} U_{2,n}, \quad V_1 = \sum_0^\infty{}_n e^{int} V_{2,n},$$

con $F_{2,n}$, $U_{2,n}$, $V_{2,n}$ funzioni soltanto di x, y, $|z|$.

Le (I), (II), (III) diventano allora:

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma e^{int}(\Delta_2 + n^2A^2)F_{2n} = 0 \\ \Sigma e^{int}(\Delta_2 + n^2A^2)U_{2n} = 0 \\ \Sigma e^{int}(\Delta_2 + n^2A^2)V_{2n} = 0 \end{array}\right.$$

$$\sum e^{int}\left(inAF_{2n} + \frac{dU_{2n}}{dx} + \frac{dV_{2n}}{dy}\right) = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum e^{int}\left(\frac{dF_{2n}}{dx} + inAU_{2n} - h\frac{dU_{2n}}{d|z|}\right) = -\sum e^{int}\left(\frac{dF_n''}{dx} + inAU_n''\right) \\ \sum e^{int}\left(\frac{dF_{2n}}{dy} + inAV_{2n} - h\frac{dV_{2n}}{d|z|}\right) = -\sum e^{int}\left(\frac{dF_n''}{dy} + inAV_n''\right); \end{array}\right.$$

in queste equazioni si è scritto, per brevità Σ invece di $\sum_0^\infty{}_n$; le ultime due equazioni hanno luogo naturalmente per $z=0$.

Le equazioni precedenti risultano soddisfatte determinando le funzioni F_{2n}, U_{2n}, V_{2n} in modo da soddisfare all'equazione:

$$\Delta_2 + n^2A^2 = 0 \tag{19}$$

e alle seguenti:

$$inAF_{2n} + \frac{dU_{2n}}{dx} + \frac{dV_{2n}}{dy} = 0 \tag{20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dF_{2n}}{dx} + inAU_{2n} - h\frac{dU_{2n}}{d|z|} = -\frac{dF_n''}{dx} - inAU_n'' \\ \frac{dF_{2n}}{dy} + inAV_{2n} - h\frac{dV_{2n}}{d|z|} = -\frac{dF_n''}{dy} - inAV_n''; \end{array}\right. \quad (z=0)$$

indicando con $-p_n$, $-q_n$ i secondi membri di queste due equazioni possiamo scrivere:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dF_{2n}}{dx} + inAU_{2n} - h\frac{dU_{2n}}{d|z|} = -p_n \\ \frac{dF_{2n}}{dy} + inAV_{2n} - h\frac{dV_{2n}}{d|z|} = -q_n. \end{array}\right. \tag{21}$$

Segue, dalle ipotesi fatte sulle serie (17), che le fun-

zioni p_n, q_n hanno derivate dei primi 4 ordini, finite, e noi supporremo inoltre che nei punti all'infinito di σ si annullino di ordine superiore al secondo.

Le equazioni (19), (20), (21) sono dello stesso tipo delle (3'), (4'), (5'), perciò le funzioni F_{2n}, U_{2n}, V_{2n} saranno date da formole analoghe alle (13'), (14''), (15''), e precisamente si avrà:

$$F_{2n} = -\frac{1}{2\pi} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{dp_n}{d\xi} + \frac{dq_n}{d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma,$$

$$U_{2n} = \frac{1}{2\pi h} \int_\sigma p_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma - \frac{ic}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z} d|z| \int_\sigma p_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma -$$
$$- \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 q_n}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 q_n}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma,$$

$$V_{2n} = \frac{1}{2\pi h} \int_\sigma q_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma - \frac{ic}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma q_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma -$$
$$- \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi d\eta} + \frac{d^2 q_n}{d\eta^2} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i h(b-c)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi d\eta} + \frac{d^2 q_n}{d\eta^2} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma,$$

$$\left(b = hnA, \quad c = \frac{nA}{h} \right).$$

Occupiamoci ora della convergenza delle serie (18).

Indicando con D^i una qualunque delle derivate d'ordine i rispetto ad x e ad y, e osservando che: $h(b-c) = nA(h^2-1)$, si ha:

$$(22) \qquad D^i F_{2n} = -\frac{1}{2\pi} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma D^i \left(\frac{dp_n}{d\xi} + \frac{dq_n}{d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma,$$
$$(i \leq 3)$$

$$(23) \quad D^i U_{2n} = \frac{1}{2\pi h} \int_\sigma D^i p_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma - \frac{ic}{2\pi h} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma D^i p_n \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma -$$
$$- \frac{1}{2\pi i nA(h^2-1)} e^{ib|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ib|z|} d|z| \int_\sigma D^i \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 q_n}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i nA(h^2-1)} e^{ic|z|} \int_{|z|}^{\infty} e^{-ic|z|} d|z| \int_\sigma D^i \left(\frac{d^2 p_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 q_n}{d\xi d\eta} \right) \frac{\cos(nAr)}{r} d\sigma,$$
$$(i \leq 2).$$

Ora, per l'ipotesi fatta che le serie (17) abbiano derivate successive dei primi 5 ordini rispetto ad x, y, z, t, ne viene che saranno soddisfatte delle disuguaglianze della forma:

$$|D^i F_n''|,\ |D^i U_n''|,\ |D^i V_n''| < \frac{H^{(*)}}{n^{6-i}}, \qquad (i \leq 5),$$

perciò per le funzioni p_n, q_n si avranno delle diseguaglianze del tipo:

$$|D^i p_n|,\ D^i q_n| < \frac{H'}{n^{5-i}}, \qquad (i \leq 4);$$

d'altra parte dovendo le funzioni p_n, q_n e loro derivate annullarsi all'infinito d'ordine superiore al secondo, potremo supporre soddisfatte le diseguaglianze:

$$|D^i p_n|,\ |D^i q_n| < \frac{K}{n^{5-i}(r^3+a^2)} \qquad (i \leq 4),$$

ove a^2 è un conveniente numero fisso positivo.

Dalla (22) si ricava quindi:

$$|D^i F_{2n}| < \frac{K}{\pi n^{4-i}} \int_\sigma d\sigma \int_{|z|}^\infty \frac{d|z|}{(r^3+a^2)r};$$

ora l'integrale ha un valore finito, perchè ponendo

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

si ha:

$$\int_\sigma d\sigma \int_{|z|}^\infty \frac{d|z|}{(r^3+a^2)r} < \int_\sigma d\sigma \int_{|z|}^\infty \frac{d|z|}{r^4} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \rho d\rho \int_{|z|}^\infty \frac{d|z|}{(|z^2|+\rho^2)^2} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho \left[\frac{\pi}{4\rho^3} - \frac{|z|}{2\rho^2(|z|^2+\rho^2)} - \frac{1}{2\rho^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{|z|}{\rho}\right],$$

che è una quantità finita. Si può perciò scrivere:

$$(24) \qquad |D^i F_{2n}| < \frac{K'}{n^{4-i}}, \qquad (i \leq 3).$$

Per quanto riguarda le derivate di F_{2n} rispetto a $|z|$ si osservi che dall'equazione seguente, analoga alla (12),

$$\frac{dF_{2n}}{d|z|} - ibF_{2n} = \int_{|z|}^\infty \left(\frac{dP_n}{dx} + \frac{dQ_n}{dy}\right) d|z|,$$

(*) In questa disuguaglianza e nelle seguenti conveniamo di indicare colle lettere H, K, munite di apici, od indici, delle quantità positive fisse, convenientemente grandi.

si ricava:

$$\left|\frac{\mathrm{d}F_{2n}}{\mathrm{d}|z|}\right| < b|F_{2n}| + \left|\int_{|z|}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}|z|\right|,$$

quindi:

$$\left|\frac{\mathrm{d}F_{2n}}{\mathrm{d}|z|}\right| < \frac{hAK'}{n^3} + \frac{K_1}{n^4} = \frac{K''}{n^3}; \tag{25}$$

siccome poi, per la (19):

$$\frac{\mathrm{d}^2F_{2n}}{\mathrm{d}|z|^2} = -\frac{\mathrm{d}^2F_{2n}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^2F_{2n}}{\mathrm{d}y^2} - n^2A^2F_{2n},$$

ne viene:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2F_{2n}}{\mathrm{d}|z|^2}\right| < \frac{2K'}{n^2} + n^2A^2\frac{K'}{n^4} = \frac{K'''}{n^2}. \tag{26}$$

Le (24), (25), (26) ci assicurano pertanto che la prima delle serie (18) è assolutamente ed uniformemente convergente colle sue derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, $|z|$, t.

Occupiamoci ora della funzione U_{2n}.

Dalla (23) si ha:

$$|\mathrm{D}^iU_{2n}| < \frac{1}{2\pi h}\frac{K}{n^{5-i}}\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{(r^3+a^2)r} + \frac{nA}{2\pi h^2}\frac{K}{n^{5-i}}\int_{|z|}^{\infty}\mathrm{d}|z|\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{(r^3+a^2)r} +$$

$$+ \frac{1}{\pi nA(h^2-1)}\frac{K}{n^{4-i}}\int_{|z|}^{\infty}\mathrm{d}|z|\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{(r^3+a^2)r}, \qquad (i \leq 2),$$

e poichè gli integrali hanno un valor finito (come già vedemmo), si può scrivere:

$$|\mathrm{D}^iU_{2n}| < \frac{K_2}{n^{4-i}}, \qquad (i \leq 2).$$

Dall'equazione seguente analoga alla (14),

$$\frac{\mathrm{d}U_{2n}}{\mathrm{d}|z|} - icU_{2n} = \frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{d}F_{2n}}{\mathrm{d}x} - P_n\right),$$

si ha poi:

$$\left|\frac{\mathrm{d}U_{2n}}{\mathrm{d}|z|}\right| < \frac{nA}{h}\frac{K_2}{n^4} + \frac{1}{h}\frac{K'}{n^3} + \frac{1}{h}|P_n|,$$

quindi:

$$\left|\frac{\mathrm{d}U_{2n}}{\mathrm{d}|z|}\right| < \frac{K_2'}{n^3}.$$

Essendo poi, per la (19):

$$\frac{d^2 U_{2n}}{d|z|^2} = -\frac{d^2 U_{2n}}{dx^2} - \frac{d^2 U_{2n}}{dy^2} - n^2 A^2 U_{2n},$$

è facile trarne:

$$\left| \frac{d^2 U_{2n}}{d|z|^2} \right| < \frac{K_3'}{n^2}.$$

Disuguaglianze analoghe alle precedenti si hanno per le derivate di V_{2n}. Si conclude quindi che anche le ultime due delle serie (18) sono assolutamente ed uniformemente convergenti colle loro derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, $|z|$, t.

Perciò le serie (18) soddisfano a tutte le condizioni richieste, e per conseguenza risolvono effettivamente la questione proposta.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 29 Marzo 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEYRON, Vice-Presidente dell'Accademia, FERRERO, Direttore della Classe, ROSSI, BOLLATI DI SAINT-PIERRE, CARLE, GRAF, BOSELLI, CIPOLLA, BRUSA, CHIRONI e RENIER Segretario. — È scusata l'assenza del Socio ALLIEVO.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 15 marzo 1903.

È fatto omaggio delle seguenti pubblicazioni:

1° da parte del Direttore della Classe FERRERO, l'opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe GATTI, *Iscrizione onoraria di Termanzia madre dell'imperatore Teodosio,* Roma, 1902, estratto dai Rendiconti dell'Accademia dei Lincei;

2° da parte del Socio RENIER il volume di Giuseppe GRAZIANO, *Umberto I di Savoia, bio-bibliografia,* Torino, Sacerdote, 1902.

Per l'inserzione nelle *Memorie* sono presentate le seguenti monografie:

1° dal Socio GRAF: Emilia REGIS, *Studio intorno alla vita di Carlo Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite;*

2° dai Soci CARLE e FERRERO: Maria BEGEY, *Per un'opera inedita di Pietro Giannone;*

3° dal Socio CIPOLLA: Domenico VALLA, *Il Collegio Puteano.*

Il Presidente designa a riferire intorno alla memoria della signorina Regis i Soci Graf e Renier; intorno a quella della signorina Begey i Soci Ferrero e Carle; intorno a quella del signor Valla i Soci Cipolla e Ferrero.

Costituitasi quindi la Classe in seduta privata, procede alla elezione di quattro Soci nazionali non residenti e di due stranieri. Riescono eletti, salvo l'approvazione sovrana:

a Soci nazionali non residenti:

Comm. Giovanni Battista Gandino, professore di letteratura latina nella R. Università di Bologna;

S. E. il conte Costantino Nigra, ambasciatore di S. M. il Re d'Italia a Vienna;

Comm. Vittorio Scialoja, professore di Diritto romano nella R. Università di Roma;

Cav. Pio Rajna, professore di lingue e letterature neolatine nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze;

a Soci stranieri:

Michele Giulio Alfredo Bréal, membro dell' " Académie des inscriptions et belles-lettres „ dell'Istituto di Francia e

Guglielmo Wundt, professore nell'Università di Leipzig.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Aprile 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. BERNARDINO PEYRON

VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Direttore della Classe, Berruti, Naccari, Segre, Peano, Foà, Parona, Morera e Jadanza, che funge da Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Camerano, Guidi, Mattirolo.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente, 22 marzo 1903.

Il Socio Peano presenta il 4° volume del suo *Formulaire Mathématique*, Turin, Bocca frères-Ch. Clausen, 1903. Questo volume contiene circa 10.000 formole, ognuna delle quali esprime una proposizione completa, spesso accompagnata dalla sua dimostrazione e dalla sua storia. Il campo di queste proposizioni si estende dalla Matematica elementare all'Analisi infinitesimale, e alla Geometria differenziale.

Il Socio Morera presenta una sua nota che ha per titolo: *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.*

Il Socio Parona, anche a nome del Socio Camerano, legge la relazione sulla memoria del Dr. Carlo Airaghi, intitolata: *Echinidi della scaglia cretacea veneta.* La relazione è approvata

all'unanimità, e la Classe, pure a voti unanimi, accoglie la memoria del Dr. Carlo Airaghi per la stampa nel volume delle *Memorie*.

Il Socio Foà, anche a nome del Socio Camerano, legge la relazione sulla memoria dei Dottori Alfonso Bovero e Umberto Calamida, avente per titolo: *Canali venosi emissari temporali squamosi e petrosquamosi*. La relazione è approvata all'unanimità e la suddetta memoria è accolta per la stampa nel volume delle *Memorie*.

Infine il Socio Naccari presenta a nome del Socio Fileti una nota del Dr. Colonna, intitolata: *Composizione chimica di una cenere del monte Pelée (Martinica)*. Questa nota sarà inserita negli *Atti*.

LETTURE

Composizione chimica di una cenere del Monte Pelée (Martinica).

Nota di ETTORE COLONNA.

A richiesta del compianto Prof. Cossa, direttore di questa R. Scuola, S. E. il Ministro della Marina faceva pervenire a questo laboràtorio, nel luglio del 1902, una cenere vulcanica del Monte Pelée, raccolta a Saint-Pierre, dal Comandante della R. Nave *Calabria*, il 5 giugno.

Il prelodato professore avrebbe eseguite lui stesso delle ricerche analitiche sulla medesima, se la repentina morte non glielo avesse impedito.

Qualche tempo fa, io mi assunsi l'incarico di procedere all'analisi chimica della suddetta cenere.

Essa presenta un colore grigiastro; scaldata in un tubo d'assaggio non dà indizio sensibile di alterazione; colora la fiamma in giallo e fonde in parte al cannello.

Sul carbone, con una goccia di un sale di cobalto, non dà colorazione.

Sulla lamina di platino, con carbonato di sodio e nitrato di potassio, non dà massa colorata.

Col sale di fosforo e col borace dà una perla gialla a caldo ed incolora a freddo, alla fiamma ossidante; verdognola alla fiamma riducente.

Alla calamita si separano dei frammenti di magnetite.

La cenere è affatto insolubile nell'acqua calda; si scioglie in parte negli acidi minerali, mentre si separa della silice e si svolge una piccola quantità di acido solfidrico.

È assolutamente esclusa la presenza di acido fluoridrico.

Nella parte solubile nell'acido cloridrico risulta la presenza

di poca silice; di ferro ed alluminio, in gran parte; di poco calcio e tracce di magnesio, di sodio e di potassio.

Nella parte insolubile notansi molta silice, contenente tracce di acido titanico; tracce di acido fosforico; ferro ed abbondante quantità di alluminio, con tracce di acido titanico; tracce piccolissime di manganese; calcio, con tracce di bario e stronzio; magnesio, sodio, poco potassio, tracce piccolissime di litio.

Vi sono anche nella cenere delle piccole quantità di acido solforico e cloridrico.

Della presenza di tracce di bario, stronzio e litio mi sono assicurato con lo spettroscopio.

***

Ho eseguito le determinazioni sulla cenere porfirizzata, senza preoccuparmi di dosare separatamente i componenti solubili ed insolubili negli acidi minerali.

Solo per determinare la quantità di ferro al massimo ed al minimo col metodo del Marguéritte ho operato in soluzioni solforiche, riservandomi, poi, di determinare la quantità totale di ferro contenuto nella cenere e di dedurvi la quantità allo stato ferrico già nota.

Salvo che per la determinazione del sodio e del potassio, ho disaggregato coi carbonati alcalini: la disaggregazione si compie con una certa difficoltà, che, del resto, si riesce a superare con l'aggiunta di maggior quantità di miscela e con prolungata fusione alla lampada a soffietto.

Nel dosamento della silice ho tenuta presente la memoria di M. W. Hillebrand (1), la quale conclude che la silice non può essere resa completamente insolubile per mezzo di una sola o più evaporazioni seguite da una sola filtrazione; ma che sono necessarie due o più evaporazioni alternate con filtrazioni.

Non seguendo il criterio suddetto, mi è accaduto di ritrovare in seguito una discreta quantità di silice (che non si era resa insolubile), specialmente quando ho dovuto operare sopra

(1) " Journ. Amer. Chem. Soc. „, gennaio 1902, p. 362, e " Mon. scient. „, febbraio 1903, p. 128.

una quantità di sostanza maggiore di quella ordinaria, per dosare, cioè, i componenti esistenti in piccola quantità.

Ho dosato l'acido titanico contenuto nella silice, volatilizzando questa con fluoruro d'ammonio.

Nel precipitato ottenuto con l'acetato di sodio, ho determinato complessivamente l'acido titanico, l'acido fosforico, il ferro e l'alluminio.

Ho poi dosato l'acido titanico disaggregando un nuovo ed identico precipitato, essiccato, con bisolfato di potassio, sciogliendo in acqua, riducendo il ferro con acido solfidrico e facendo bollire in presenza di CO_2: l'acido titanico si è separato sotto forma di idrato, che ho poi calcinato e pesato.

Ho sciolto un nuovo precipitato nell'acido nitrico: ho divisa la soluzione in due parti: in una ho dosato l'acido fosforico, trasformandolo in pirofosfato di magnesio; nell'altra, dopo avere scacciato l'acido nitrico con l'acido solforico, ho dosato il ferro totale col metodo del Marguéritte.

L'allumina l'ho determinata per differenza.

Il calcio ed il magnesio li ho trasformati rispettivamente in ossido (dalla calcinazione dell'ossalato ad alta temperatura) ed in pirofosfato (dal fosfato ammonico magnesiaco).

Gli alcali li ho determinati complessivamente sotto forma di cloruri, in seguito a disaggregazione con tre parti di carbonato e due di cloruro di bario (che si è compiuta facilissimamente) e successiva separazione delle basi. Ho precipitato poi il potassio con cloruro di platino, e dalla differenza ho calcolato la quantità di cloruro e quindi di ossido di sodio.

Ho dosato lo zolfo contenuto sotto forma di solfuro e di solfato complessivamente, mediante una disaggregazione, ripresa con HCl più acqua di bromo e precipitazione con $BaCl_2$ all'ebollizione.

In un secondo saggio (2 gr. di sostanza), ho decomposto il solfuro con HCl, ho separato la parte insolubile, nella quale, lavata e disaggregata come dianzi, ho determinato l'acido solforico: dalla differenza ho calcolato lo zolfo contenuto sotto forma di solfuro.

Ho dosato le piccole quantità di cloro precipitandole con nitrato d'argento, dopo aver disaggregato 2 gr. di sostanza coi carbonati alcalini e trattato con acido nitrico anzichè con acido cloridrico, ecc.

L'analisi mi ha dato i risultati seguenti:

SiO_2	59,60
TiO_2	0,55
Al_2O_3	17,40
Fe_2O_3	3,54
FeO	4,50
MnO	tracce piccolissime
CaO	6,70
BaO	tracce
SrO	id.
MgO	2,25
Na_2O	3,35
K_2O	0,54
Li_2O	tracce piccolissime
Cl	0,10
S (sotto forma di solfuro)	0,31
SO_3	0,48
P_2O_5	0,11
Perdita per calcinazione	0,50
	100,23

Fo notare che la cenere diminuisce di peso per calcinazione; ma con una calcinazione prolungata il peso riaumenta in parte, in seguito all'ossidazione dei composti ferrosi.

***

Non mi consta che in Italia sieno state eseguite analisi di ceneri vulcaniche della Martinica.

In Francia (1) fu eseguita un' analisi da M. Pisani sopra la cenere caduta nella notte del 2-3 maggio, raccolta da L. Lacroix.

Quel chimico ottenne una perdita per calcinazione molto elevata, dovuta, secondo il Lacroix, in gran parte all'acqua igroscopica ed in parte a sostanze organiche che non si poterono separare.

---

(1) " Compt. Rendus ", 2 giugno 1902, n. 22, pag. 1328. L. Lacroix, *Sur les cendres des éruptions de la Montagne Pelée.*

	M. Pisani	L. Schmelck		W. E. Hillebrand	E. Colonna
		Polvere del Coya	Cenere di St-Pierre		
SiO_2	59,40	57,75	55,40	55,08	59,90
TiO_2	0,30	0,70	1,00	0,80	0,55
Al_2O_3	18,51	17,70	15,55	18,00	17,40
Fe_2O_3	0,77	2,84 (*)	5,55	(**) 2,46	3,54
FeO	4,59	2,73	3,89	4,57	4,50
MnO	—	tracce	—	0,21	tracce piccolissime
CaO	6,87	8,11	8,26	7,74	6,70
BaO	—	—	—	tracce	tracce
SrO	—	—	—	—	tracce
MgO	2,45	3,51	3,51	3,34	2,25
Na_2O	3,77	5,03	5,28	3,45	3,35
K_2O	0,86	0,94	0,53	0,65	0,54
Li_2O	—	—	—	piccole quantità	tracce piccolissime
Cl	—	tracce	tracce	piccole quantità	0,10
S	—	piccole quantità	piccole quantità	(in Fe_7S_8?) 0,91	0,31
SO_3	—	piccole quantità	0,35	0,24	0,48
P_2O_5	—	tracce	tracce	0,17	0,11
Perdita per calcinazione	3,12	1,00	1,30	1,39	0,50
	100,64	100,31	100,62	99,67	100,23

(*) Con piccole quantità di manganese. (**) Soltanto approssimativamente; per la presenza della pirrotina.

L. Schmelck (1) analizzò in Cristiania una polvere del Monte Pelée raccolta a bordo del vapore inglese *Coya*, a 200-250 miglia marine dalla Martinica, nell'8 maggio 1902. Più tardi analizzò un campione di cenere vulcanica raccolta nell'isola dal viaggiatore polare Carsten Borchgrevink.

Anche W. F. Hillebrand (2) eseguì un' analisi di cenere vulcanica del monte Pelée.

Non conosco i varî metodi seguiti dagli analisti nelle rispettive determinazioni.

Nella tabella a pag. precedente riporto i risultati ottenuti da loro e da me.

I risultati ottenuti dai varî analisti non concordano fra di loro; e ciò si comprende facilmente, quando si pensi che le determinazioni furono eseguite su campioni che non hanno sempre la stessa composizione, essendo stati raccolti in epoche e in località differenti.

Torino - Laboratorio di chimica docimastica
della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri.

---

(1) " Chem. Zeit. „ di Cöthen, n° 4, 14 gennaio 1903, pag. 34. L. Schmelck, *Untersuchung von vulkanischem Staub aus Martinique.*

(2) Lavoro citato di L. Schmelck.

Relazione sulla memoria: *Echinidi della scaglia cretacea veneta*, del Dr. Carlo Airaghi.

La cosidetta *scaglia* veneta in gran parte appartiene al sistema della Creta superiore ed in parte all'Eocene, ed è imperfettamente conosciuta nei suoi caratteri paleontologici, perchè i fossili vi sono rari ed in generale mal conservati: ne viene che molte sono le incertezze relative alla determinazione cronologica ed alla distinzione dei sottopiani in essa rappresentati. Gli echinidi sono i fossili più frequenti e meglio conservati di questo terreno ed opportunamente il Dr. Airaghi, già noto per le sue ricerche sulle echinofaune terziarie, si propose la revisione degli echinidi della scaglia veneta adunati in diverse collezioni pubbliche e private, prendendo come base dello studio la raccolta

Catullo del Museo di Padova, che conserva preziosi tipi di specie, i quali, essendo stati in origine inesattamente illustrati, furono erroneamente interpretati dagli autori che, dopo Catullo, si occuparono dell'argomento. L'Airaghi precisa i caratteri di queste forme in minute descrizioni col controllo di fotografie e discute il loro significato in rapporto all'età degli strati che le comprendono, e che ritiene senoniana; colle sue ricerche egli arricchisce inoltre notevolmente l'echinofauna della scaglia cretacea, portando così un importante contributo alla migliore conoscenza di una formazione geologica caratteristica e largamente sviluppata nelle Prealpi venete e nell'Appennino centrale.

La Commissione, giudicando favorevolmente il lavoro del Dr. Airaghi, propone alla R. Accademia di accoglierlo per la stampa nei volumi delle Memorie.

L. Camerano,
C. F. Parona, *relatore.*

Relazione sulla memoria dei dottori Alfonso Bovero e Umberto Calamida, intitolata: *Canali venosi emissari temporali squamosi e petrosquamosi.* Ricerche morfologiche.

È noto per recenti ricerche come la partecipazione della vena giugulare esterna al deflusso del sangue venoso endocraniano per mezzo di un ramo che, attraversando la porzione di rivestimento della capsula labirintica, la riunisce alla porzione ventrale del *sinus transversus* si stabilisca, nella ontogenesi dei Mammiferi, in un periodo successivo a quello in cui tale ufficio compete invece alla vena giugulare interna: astrazion fatta dai periodi affatto primitivi, lo sviluppo di quest'ultima precede cioè quello della giugulare esterna.

Ora mentre nell'Uomo e nei Primati superiori a completo sviluppo il còmpito di esportare il sangue refluo compete quasi esclusivamente alla giugulare interna, quanto più discendiamo nella serie dei varî ordini di Mammiferi, tanto più vediamo cre-

scere, salvo eccezioni secondarie, l'importanza della giugulare esterna per tale ufficio e diminuire quello dell'interna.

Anche nell'Uomo possono abnormemente comparire nell'ambito dell'osso temporale dei canali venosi, i quali rappresenterebbero appunto un' evoluzione ulteriore del sistema venoso, ricordando in certo qual modo la via o le vie tenute dal sangue venoso endecraniano nei varî Mammiferi a completo sviluppo, e che si sono stabilite in periodi relativamente più tardivi che non quella alla quale nell'Uomo è adibita tale funzione. Per la considerazione che le conoscenze su questo argomento sono relativamente scarse ed anche non concordanti, fondate quasi generalmente su una non esatta e non completa conoscenza dell'evoluzione del sistema venoso dei Mammiferi, quale solo gli studî ultimi hanno dimostrato, i D^ri B. o C. hanno istituito una serie di ricerche allo scopo di stabilire il significato da attribuirsi ai detti canali anormalmente occorrenti nell'Uomo, di verificare tutte le modalità possibili e le ubicazioni differenti con le quali possono comparire, dimostrandone ad un tempo il valore morfologico con la comparazione delle disposizioni proprie dei Mammiferi inferiori all'Uomo.

Gli AA. hanno cercato di rispondere ai varî quesiti propostisi collo studio di un grande numero di temporali umani (2472) o di tutti gli altri ordini di Mammiferi, lasciando le dette vie venose delle traccie evidenti del loro passaggio attraverso la squama temporale od attraverso le suture della squama con le ossa vicine, sotto forma di canali più o meno ampî e più o meno numerosi a seconda dell'importanza assunta dalla giugulare esterna al deflusso del sangue venoso endocraniano.

Gli AA. riportano minutamente i reperti delle loro osservazioni, comparando volta a volta fra loro quelli ottenuti nei differenti generi e nelle varie famiglie dei singoli ordini, corredando la loro descrizione con le considerazioni morfologiche che loro paiono più opportune.

Essi dimostrano complessivamente come la via principale di deflusso del sangue endocraniano vada gradatamente spostandosi dalla v. giugulare interna alla esterna nella serie stessa dei Primati: la diminuzione di importanza della prima va di pari passo parallelamente alla maggiore ampiezza ed alla maggior frequenza ed anche al maggior numero dei canali venosi attraver-

santi l'osso temporale; questi nell'Uomo, occorrendo solo eventualmente, rappresentano solo delle vie ausiliarie, mentre negli Arctopiteci rappresentano già delle vie quasi equipollenti alla giugulare interna.

Ciò si esagera anche di più negli altri ordini di Mammiferi inferiori ai Primati, in guisa che accanto ad un canale principale (canale temporo-parietale) a traverso cui passa l'origine della giugulare esterna, si manifestano altre vie puramente ausiliarie ed attraversanti pure l'osso temporale.

In altre parole, ammessa la successione cronologica dei vari periodi di sviluppo del sistema venoso della cavità cranica, alla quale abbiamo sopra accennato, nell'Uomo e nei Primati superiori si mantengono, come in altro modo nei Monotremi, delle condizioni che appartengono ad un periodo più primitivo dello sviluppo, mentre nei Primati inferiori e nella massima parte degli altri Mammiferi acquistano carattere permanente di fissità delle disposizioni che rappresentano nella storia dello sviluppo un periodo più evoluto.

I canali destinati a dar ricetto alle vene, attraversanti l'osso temporale, siano esse rudimentali ed anche abnormi come nei Primati superiori, oppure a completo sviluppo, come ad es. nei Ruminanti, sono possibili di una schematizzazione abbastanza facile in quanto le varietà della loro ubicazione esterna si possono nella serie di tutti i Mammiferi ricondurre, come fanno gli AA. di questo lavoro, ad alcuni tipi fondamentali (forami emissari sottozigomatici mediali, e f. e. sottozigomatici laterali — f. emissari soprazigomatici posteriori ed anteriori — f. emissari prezigomatici superiori ed inferiori — forami postsquamosi, subsquamosi) a seconda dei rapporti che dette aperture contraggono con il processo zigomatico.

E nell'Uomo è dimostrato come, sia in ciascuno dei tipi fondamentali considerato in sè e per sè, sia nelle varie suddivisioni in sottotipi, le oscillazioni di frequenza e di posizione riproducono esattamente le uguali condizioni di ubicazione e di frequenza che si hanno negli altri Mammiferi: ciò si verifica in modo caratteristico per tutti i forami occorrenti nell'Uomo, per i più frequenti (sottozigomatici), come per i più rari (prezigomatici, postsquamosi): per tutti poi vi hanno delle modificazioni occorrenti nella serie dei vari ordini, fatta qualche eccezione, in modo quasi perfettamente scalare.

Gli AA. dimostrano anche come le dette aperture possano andare soggette a variazioni non solo da famiglia a famiglia, ma anche da genere a genere, da razza a razza, in modo veramente strano e caratteristico (Cinghiale).

Molti dati riferiti dagli AA. sono semplicemente confermativi: altri invece sono affatto nuovi e nella descrizione e nella interpretazione morfologica; ciò vale specialmente per tutti i forami emissari posti superiormente alla base del processo zigomatico nell'Uomo e negli altri Primati (Semnopithenes, Mycetes, Cercocebus). All'occorrenza di forami emissari nei Pinnipedi, ecc.

Oltre alle considerazioni morfologiche sparse in tutto il lavoro e più strettamente connesse all'argomento in studio, gli AA. si fermano anche a dimostrare l'importanza pratica eventuale dei canali emissari temporali abnormi nella specie nostra: similmente descrivono alcuni rarissimi casi di anomala origine dell'arteria temporale profonda posteriore dall'arteria meningea media, disposizione questa già nota nell'Uomo (Gruber, 1852) e da essi riscontrata pure in alcune Scimmie, ricercandone un'interpretazione morfologica.

Il lavoro è corredato da una doppia tavola con 34 figure.

I Relatori sono d'avviso che il presente lavoro sia degno di essere pubblicato nelle Memorie della nostra Accademia delle Scienze.

L. Camerano,
Pio Foà, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Aprile 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peyron, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Pezzi, Carle, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Allievo, Chironi e Renier Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 29 marzo 1903.

Il Socio Carle fa omaggio dei seguenti scritti di Giuseppe Mazzarella, sui quali pronuncia parole di elogio: 1° *Origine delle ordalie nel diritto Siamese* (Roma, 1900); 2° *Sulla condizione del marito nella famiglia primitiva* (Roma, 1900); 3° *L'esogamia presso i popoli semitici* (Roma, 1900); 4° *Le istituzioni giuridiche di una tribù dell'America settentrionale* (Roma, 1902); 5° *Studi di etnologia giuridica*, vol. I, fasc. I (Catania, 1903).

Il Socio Chironi offre all'Accademia un volume di Alessandro Garelli, *Le imposte nello Stato moderno*, vol. I: *La imposizione personale secondo il diritto finanziario positivo* (Milano, Hoepli, 1900), di cui segnala l'importanza.

Il Socio Pezzi presenta con encomio un opuscolo di Attilio Levi, *Apofonia consonantica* (Torino, Clausen, 1903).

Il Socio Boselli, che rappresentò l'Accademia nel Congresso internazionale di scienze storiche, tenutosi in Roma, riferisce

intorno ai lavori della sezione di storia del diritto e delle istituzioni economiche e sociali, a cui prese parte. Il Presidente lo ringrazia della rappresentanza e delle informazioni.

Il Socio Allievo, incaricato col Socio Carle, di esaminare lo scritto di Stefano Grande, *Il pensiero pedagogico di L. A. Muratori,* legge la relazione che compare negli *Atti.* Approvasi unanimamente la relazione e quindi con votazione segreta, pure unanime, l' inserzione della monografia nelle *Memorie* accademiche.

È pure approvata, a grandissima maggioranza, la stampa nelle *Memorie* del lavoro di Maria Begey, *Per un'opera inedita di Pietro Giannone,* su cui riferisce verbalmente il Socio Ferrero, incaricato di darne parere col Socio Carle.

Dello *Studio intorno alla vita di Carlo Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite,* di Emilia Regis, si occupano, per delegazione del Presidente, i Soci Graf e Renier. Il Socio Graf legge la sua relazione, che è approvata e si pubblica negli *Atti.* Con votazione segreta unanime è deliberata l'inserzione dello studio della signorina Regis nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Renier presenta per gli *Atti* una serie di considerazioni di Emilio Bertana, intitolata: *Di una nuova estetica.* Esse riguardano il recente libro di Benedetto Croce.

LETTURE

Di una nuova estetica.

Nota di EMILIO BERTANA.

L'estetica di B. Croce (1) è già stata ormai più e più volte esposta e riassunta dai molti che in giornali o in riviste parlarono del volume in cui si contiene; ed esporla qui nuovamente non gioverebbe.

Inoltre essa fu tanto stringata e condensata dall'Autore, che farne più ristretto compendio, a scopo di divulgazione, è cosa del tutto superflua.

Un trattatello teorico di cencinquanta non grandi pagine non dovrebbe davvero spaventare nessuno; perciò non è il caso di soccorrere con altri sunti ed estratti alla pigrizia dei lettori italiani; e neppure è il caso d'aggiungere altre lodi alle molte che il dotto, baldo e ingegnoso libro ha riscosse; più importerebbe invece — ciò che non si è fatto abbastanza — discuterlo, e a fondo.

Impresa questa da non pigliarsi a gabbo; soprattutto perchè involgerebbe la necessità di rifarsi dal sistema filosofico in cui cotesta nuova estetica rientra, e che in essa si riflette. Come il Croce avverte, " la filosofia è unità, e quando si tratta di estetica o di logica o di etica, si tratta sempre di tutta la filosofia, pur lumeggiandosi più vivamente e minutamente (per convenienza didascalica) un lato determinato di quell'unità inscindibile „ (p. VIII). Io mi varrò peraltro del mio speciale criterio di convenienza, e lascerò in disparte le molte questioni non propriamente estetiche che s'annidano, coperte o scoperte, nel libro del Croce, così da sembrare (se non si ricordi quella certa *inscindibile unità*, propria della filosofia, da lui allegata a sua scusa) superfetazione ed ingombri.

(1) BENEDETTO CROCE, *Estetica come scienza dell'espressione e linguistica generale*, Milano-Palermo, Sandron, 1902.

Nonostante le parecchie digressioni (sia pure apparenti) e le frequenti incursioni in territorî extra-estetici, la trattazione riuscì al Croce brevissima. Egli la semplificò fino all'estremo limite, escludendone ogni ampio svolgimento dimostrativo analitico, ed escludendone molte di quelle materie che i più finora avevano considerate pertinenti all'estetica, mentr'egli invece le considera estranee ad essa. Ridotti a pochi i " problemi propriamente estetici „ sui quali " sentì il dovere di travagliarsi „, parvegli di poter dire verso la fine (p. 143) che se il suo trattato sembrasse " assai scarno „ in confronto di tant'altri più ponderosi e farraginosi trattati congeneri, ciò sarebbe errore prodotto dalle apparenze. L'ampiezza d'un trattato non si misura dalla corpulenza del volume; e quel del Croce non riuscì corpulento appunto perchè ne furono escluse le solite zeppe psicologiche (l'arte infatti — importa avvertirlo subito — è, per il nostro Autore, pura *funzione teoretica* dello spirito, e non ha nulla da spartire colla sensazione, col sentimento), le solite zeppe storiche, ecc., e i soliti inutili discorsi intorno a " concetti pseudoestetici „.

Tali sono " i concetti del *tragico, comico, sublime, patetico, commovente, triste, ridicolo, malinconico, tragicomico, umoristico, maestoso, dignitoso, imponente, decoroso, grazioso, attraente, stuzzicante, civettuolo, idillico, elegiaco, allegro, violento, ingenuo, crudele, turpe, disgustoso, nauseante;* e chi più ne ha, più ne metta „, dei quali il Croce non volle far cenno se non per " giustificarne il risoluto discacciamento „ (p. 89) (1). Ma qui si potrà domandare:

---

(1) Noto che però d'alcuno di " cotesti concetti „ il Croce ha voluto anche espressamente occuparsi. Così, p. es. (pp. 91-92), egli ci ha data una definizione del *comico*; quella che " fra le tante escogitate, sembra a *lui* la più plausibile, la meno incompleta „. Come nascerebbe il comico, secondo il Croce? " Perchè si abbia il comico è necessario che l'uomo si metta in disposizione di contemplatore che attende e prevede una data percezione. Nell'ascoltare un racconto che ci descrive il proposito magnifico ed eroico di una determinata persona, noi dobbiamo con la fantasia anticipar l'avvento di un'azione magnifica ed eroica e prepararci ad accoglierla, tendendo le nostre forze psichiche. Ma, di un tratto, in luogo dell'azione magnifica ed eroica, che il tono e le premesse del racconto ci annunziavano, con una voltata improvvisa, l'azione che sopravviene, è invece piccola, stolta, meschina, impari all'attesa. Noi ci siamo ingannati, e il riconoscimento del-

in qual canto mai troveranno rifugio adesso cotesti poveri *concetti* scacciati dall'estetica, dove stavano a pigione? Il Croce fu inesorabile come un usciere che intima lo sfratto a degli inquilini morosi; bisognerà, se non muoiono, che qualche anima pietosa o li provveda d'un nuovo alloggio o li faccia rientrare (e forse sarà il meno peggio) nel vecchio.

La brigata non è poi tanto numerosa come il suo persecutore l'ha fatta parere a furia di sdoppiamenti, ma un certo numero di quei concetti esiste da tempo immemorabile, e nessuno ha colpa se esiste. Li han prodotti le cose; ci sono al mondo perchè nella natura e nell'arte c'è qualche cosa che li ha fatti nascere; sono indispensabili a distinguere dei *generi*, o a caratterizzare certe impressioni ed espressioni estetiche; non appartengono a un'arte singola, ma a tutte in comune; che male c'è dunque se la *scienza dell'arte* ne tien conto e li studia? Sarebbe male se li studiasse per trarne delle regole da imporre agli artisti, ma l'estetica ormai (sia detto a suo onore) non accampa più di tali pretese.

Ho detto *generi;* ma che sono essi poi se non " vuote fan-

---

l'inganno non può non essere accompagnato da un attimo di dispiacere. Ma quell'attimo di dispiacere è presto soverchiato dal momento seguente, in cui possiamo far gettito dell'attenzione preparata, liberarci della provvista di forza psichica accumulata ed ormai superflua, sentirci leggieri e sani: che è il piacere del comico, col suo equivalente fisiologico, il riso „ — Non è difficile accorgersi che " la meno incompleta „ definizione e spiegazione del comico offertaci dal Croce riguarda un caso, che sarà, magari, frequentissimo, ma che è particolare. Sonvi altri casi, certo non infrequenti — in cui si ride senz'esserci prima disposti ad ascoltare o a vedere qualche cosa di magnifico e d'eroico; e se fosse vero che a produrre il comico quella certa aspettazione fosse necessaria, certi personaggi di commedia e di romanzo, o certe persone reali, non ci farebbero ridere che una volta, la prima che ci si presentano; perchè, dopo averli conosciuti, l'aspettazione supposta sarebbe impossibile. Da Don Abbondio, p. es., chi s'aspetta mai qualche cosa di magnifico e d'eroico? Nemmeno la prima volta ch'egli entra in scena; l'atteggiamento, l'aspetto, il passo, lo sguardo, ecc., tutto in lui annunziano già prima ch'egli parli ed agisca un personaggio non eroico; e tuttavia noi ridiamo. Gli è — e valga l'osservazione non pel solo concetto estetico (o pseudo-estetico) di cui discorriamo, ma per tutti gli altri — che v'ha comico di diversi gradi, di diverse specie, di diversa origine; e il meglio che resti da fare è ancor lo studio di cotesti diversi gradi, specie ed origini, piuttosto che la ricerca di un problematico principio comune.

tasime „? (p. 41). Vuote fantasime, senza dubbio, se, per il gusto di metterli in fuga, ce li figuriamo costituiti da schemi, da formole, da precetti; oppure ce li figuriamo così rigidamente delimitati e chiusi, che l'uno non possa mai in nulla partecipare dell'altro; non però vuote fantasime, se ce li figuriamo formati da gruppi d'opere in cui variamente si ripete un medesimo conato d'arte. Certo sarebbe assurdo parlar di generi per prescrivere come debbano trattarsi, e non per vedere come furono trattati; ma per buona sorte la *precettistica* oggi non è più in grado di far paura.

Come non è più in grado di farne la *rettorica* o la dottrina dell'*ornato*, contro la quale il Croce dichiara di scendere in campo perchè "noi non possiamo dimenticar senz'altro gli errori del passato, nè le verità possiamo tenere in vita se non facendole battagliare contro gli errori „ (p. 76). Sono assai lontani i tempi in cui il Patrizio (1) formulava un principio d'arte conveniente all'essenza del più puro secentismo, ponendo nell'ornato il maggior pregio di ogni discorso, sostenendo che " per avventura l'ornamento, o tutto o la più eccellente parte di lui, istà ne' traslati e nelle figure „. Que' bei tempi sono — dicevo — assai lontani, nè accennano a tornare, che io m'avveda.

Del resto — conveniamone — la povera rettorica, che adesso tutt'al più insegna o dovrebbe insegnare a distinguere i modi diversi dell'elocuzione, i proprii dai figurati, e questi nella molteplice loro varietà allargata o ristretta, secondo la sottigliezza o l'arbitrio dei grammatici (2), non ha mai fatto più male di

---

(1) V. il V dialogo *Della Rettorica di Messer* Francesco Patrizio ecc., intitolato *Il Sansovino o vero degli ornamenti oratori*. Mi valgo della raccolta *Degli autori del ben parlare*, Venezia, 1646, T. IV, p. 678.

(2) È inutile richiamare le distinzioni, divisioni e suddivisioni pedantescamente minute, così frequenti ne' vecchi trattatisti, quali, p. es., Giulio Camillo Delminio (*La Topica*, in *Autori del ben parlare* cit., II, 337 sgg.), Bernardino Daniello (*Trattato delle parole proprie e trasportate e delle figure del parlare*, ivi, ivi, 387 sgg.), ed altri che andarono anche più oltre nel moltiplicare le distinzioni. Ricorderò piuttosto Jacopo Mazzoni (*Dei Tropi*, in *Autori del ben parlare* cit., II, 79 sgg.); il quale dopo aver definito il tropo " una mutazione nella parola dalla propria significazione „, fatta " per comune consentimento dei retori, in tredici modi „ (veramente i retori ne distinsero di solito quattordici), aggiunge: " Ma io credo che questa opi-

quanto ne ha fatto e ne fa quell'altra perniciosa rettorica, che non conosce e non cura i posticci *ornamenti* accattati nell'arsenale della *topica*, e intanto adultera in tanta prosuccia *disadorna*, che oggi si scrive o si declama, la sincerità del pensiero e del sentimento.

Il Croce ha ragione da vendere quando sostiene che, a rigore, in estetica è impossibile distinguere il *proprio* dal *traslato*, poichè l'espressione estetica non ammette che *parole proprie*, e che dove il *traslato* non ha valore di *proprio*, esso è viziosa superfluità che guasta; ma ciò concesso — poichè *metafore*, *sineddoche*, *metonimie*, ecc. esistono e, fuor d'ogni disegno di usarle ad *ornare il discorso*, possono render qualche servigio a chi parla o a chi scrive, come mezzi opportuni d'espressione (il Croce stesso dichiara d'aver talvolta voluto deliberatamente giovarsene) (1) — che male ci sarà ad imparare a conoscerle?

Non attardiamoci su queste o su altre simili questioni *laterali* e secondarie; veniamo a ciò che più importa di rilevare e di discutere.

Il Croce ha " evitato studiosamente ", fin oltre la metà del suo lavoro, " di usar la parola *bello* " (p. 81); e in tutto il lavoro non l'usò mai che in unico senso. Che cosa è per lui il *bello*? È " l'espressione riuscita, o meglio, l'espressione *senz'altro* "; mentre il " brutto è l'espressione sbagliata " (*ivi*). Infatti la sua estetica (*scienza del bello*) fu concepita " come scienza dell'espressione ", soltanto.

Egli ha voluto così *semplificarla*, e di tutte le semplificazioni da lui tentate questa, ch'è certamente la più ardita, è, in un certo senso, anche la più legittima. Troppe volte invero *il bello d'arte* (e chiamiamolo pure anche noi *bello d'espressione* o *espressione*) è stato confuso col *bello di natura* o *bello fisico* (2), e dalla

---

nione calpestata da tutta la scuola dei retori dica molte cose superflue in questo proposito. Perciocchè i tropi non sono, a mio giudizio, più che quattro, i quali tutti nascono da quattro luoghi topici ", secondo le idee di causa ed effetto, tutto e parte, comparabilità ed opposizione.

(1) " Allorchè si è detto *parola*, si è voluto usar da noi una *sineddoche* e intendere genericamente *espressione* " (p. 26).

(2) La confusione presso molti scrittori d'estetica continua ancora. Vedasi p. es. il saggio su *Le sentiment du beau* (in C. R. Herckenrath, *Pro-*

confusione sono nati deplorevolissimi errori. Ciò che in natura a nessuno par bello può essere bello in arte; e non c'è nessun bisogno che, per esser bella, l'arte ritragga esclusivamente, come dicevasi un tempo, *la bella natura;* ma anche là dove ritrae *la bella natura*, l'arte non si confonde con essa. Dinnanzi al ritratto di una bella donna da noi conosciuta, noi diremo con un senso di soddisfazione estetica profondo: è lei, par viva! — però non è certo la bellezza della donna che farà la bellezza del ritratto, e nemmeno la perfetta rassomiglianza; chè, in tal caso, le più semplici fotografie *non ritoccate* sarebbero opere d'arte per eccellenza.

La bellezza di natura, per diventare bellezza d'arte, ha bisogno d'essere sentita, interpretata (diciamo pure *espressa*); armonia di colori e di linee, e proporzione di parti, ecc., possono, in natura, non dirci nulla, non interessarci, non destare in noi nessun senso di meraviglia e di piacere; ma ciò non porta direttamente a negare che quegli oggetti naturali, che noi chiamiamo belli perchè spesso la loro contemplazione genera in noi un diletto, abbiano una loro bellezza; ciò non porta a concludere che " il bello naturale è un semplice *stimolo* della *riproduzione estetica*, che presuppone l'avvenuta produzione " e che " senza le precedenti intuizioni estetiche della fantasia, la natura non può risvegliarne alcuna " (p. 99).

Se così fosse (se cioè il *bello fisico* — come il Croce sostiene — non avesse alcuna esistenza), perchè mai vi sarebbero in natura alcuni spettacoli che hanno in grado eminente cotesta virtù di stimolare la *riproduzione estetica*, ed altri che l'hanno in grado assai più scarso o non l'hanno nè punto nè poco? Perchè mai noi ci fermiamo a contemplare e un artista si mette volentieri a ritrarre, poniamo, un bel viso di donna (uno di que' visi che si sogliono chiamar belli) e non una faccia ròsa dal *lupus*? Perchè l'istesso effetto non è indifferentemente prodotto da un gruppo di peschi e di mandorli fioriti, e da una catasta di fascine; da un prato ove bruchino de' buoi, e da una concimaia dove s'imbrodino il grifo dei porci? Se poi fosse vero

---

blèmes d'esthétique et de morale, Paris, Alcan, 1898) condotto sull'idea di P.-J. Helwig (*Eine Theorie des Schönen*), che il bello nella natura e nell'arte si trova da noi in ciò che risponde a un tipo medio ideale.

che " la *riproduzione estetica* presuppone l'avvenuta *produzione* ", e cioè che la natura ha solo la bellezza da noi creata e da noi prestatale; che non essa, ma l'imagine d'essa, latente nel nostro spirito, è bella, come si spiegherebbero il nostro stupore e la nostra ammirazione dinnanzi a cose non mai vedute, e talvolta neppure mai imaginate, o imaginate assai diverse da quel che sono? Se poi la bellezza della natura fosse semplicemente un prodotto della nostra fantasia, lo spettacolo delle cose già prima imaginate non potrebbe oltrepassare o deludere la nostra aspettazione, come talvolta la oltrepassa o la delude.

Era giusto distinguere il bello d'arte dal bello di natura, era magari possibile trattar di quello senza occuparsi di questo (benchè in realtà l'uno trapassi talvolta nell'altro, e certe condizioni ed effetti dell'uno si ritrovino pure nell'altro); non era però lecito spingersi nel processo di *semplificazione* tant'oltre da negar la bellezza alla natura fisica e perfino a quelle che " si dicono *cose belle* ", cioè agli stessi " monumenti dell'arte " (p. 97). *Bello fisico* e *cose belle* sono pel Croce non sensi o " paradossi verbali ", poichè il bello è spiritualità immaterializzabile; e se cotesta estetica trascendentale incontrerà fortuna, l'abbracceranno per prime con gran fervore le cosidette donne brutte, alle quali sarà d'immenso conforto il ritener dimostrato scientificamente, cioè filosoficamente, che le cosidette donne belle non esistono.

Uno dei capisaldi della teoria del Croce è il principio della identità e simultaneità assolute dell'*intuizione* e dell'*espressione*, in modo che " l'attività intuitiva tanto intuisce quanto esprime ", e " l'una viene fuori con l'altra, nell'attimo stesso dell'altra, perchè non son due ma uno " (p. 11). Dunque non si può intuire senza esprimere, perchè l'intuizione è l'atto stesso creativo, formativo; tutto ciò che nella pienezza della sua luce balena alla fantasia, contemporaneamente si traduce in una espressione, cioè in un prodotto d'arte. Intuire, p. es., un quadro equivale così a farlo; anzi non si potrebbe intuirlo e non farlo.

Cotesta necessaria concomitanza dei due atti, intuitivo ed espressivo, che non sarebbero poi due, ma uno, e solo verrebbero ad essere arbitrariamente distinti nel comune uso verbale, è ben lungi dall'avere quel valore assiomatico che il Croce le attribuisce.

Al Faggi, che osservavagli che si può anche " intuire senza esprimere „ o " intuir bene, compiutamente, ed esprimere male, inadeguatamente „ (1), egli replicava (2) che quando ci sembra d'intuire senza esprimere, " ci aggiriamo in una illusione psicologica „; od altrimenti — come aveva già detto nell'*Estetica* (p. 11) — che ciò che a noi pare *intuizione* (*fatto spirituale*) è mero " fatto psichico, o naturale..... sensazione e naturalità „. Si può concedere che molte volte ciò avvenga; ma non si dovrebbe in nessun modo negare che tante e tante imagini che si formano vive, chiare, concrete nella nostra fantasia, che le vagheggia, possano rimanere inespresse, come infatti rimangono. Io ho, p. es. (e chi vorrebbe contestarmelo?), l'*intuizione* d'un luogo, d'una persona, a me famigliari, a me noti; cioè nel mio interno me li rappresento così vivamente,

Che se l'error durasse altro non chieggio.

Ebbene, sarò io in grado per questo di esprimere con qualunque mezzo d'*esteriorizzazione* (parole o colori, poniamo) quelle mie intuizioni? Sarò io per questo necessariamente poeta o pittore? Il Croce me ne assicura; e così fosse! — ma in realtà, anche in quei casi, in cui l'*intuizione* non si può dire che mi manchi, ahimè, io non sarò nè poeta nè pittore.

La teoria del Croce mi par fatta per creare molte beate illusioni.

Nell'*Estetica* (p. 12) egli scrisse: " Una Madonna di Raffaello — si crede — avrebbe potuto immaginarla chiunque; ma Raffaello è stato Raffaello per l'abilità meccanica dell'averla portata sulla tela. Niente di più falso „; Raffaello è stato Raffaello unicamente perchè egli solo ha avuto quella tale intuizione.

La *tecnica* qui non c'entra (e alla *tecnica* il Croce non attribuisce mai alcuna importanza, considerandola come un coefficiente *esteticamente trascurabile*); la preparazione e l'educazione artistica non c'entrano; s'anche Raffaello non fosse stato alla scuola del Perugino, la sua Madonna l'avrebbe fatta lo stesso, così, data l'intuizione di cui essa è l'espressione esteriorizzata; appunto come potremmo farla pur noi, se la intuissimo a quel

(1) " Rivista Filosofica „, 1902, fasc. IV.
(2) Ivi, 1902, fasc. V.

modo; o come almeno saremmo tutti in grado almeno di copiarla, se *intuissimo* il quadro da lui fatto.

Questo non lo dico io, ma l'afferma il Croce là dove, nella replica al Faggi, pone il seguente quesito: — " Con l'intuire un quadro siamo noi *perciò solo* capaci di portarlo sulla tela? „ — ed al quesito egli risponde con imperturbabile sicurezza: — " Se voi l'intuite davvero, se cioè la vostra fantasia rivive davvero ogni minimo tocco del pennello del pittore, siete potenzialmente in grado di portarlo sulla tela, siete ottimamente disposti a farne una copia „.

Quel cauto " potenzialmente „ vuol salvar varie cose, le quali sarebbero state assai compromesse da un risoluto *effettivamente* che, a rigor di logica, avrebbe dovuto sostituirlo; ma siccome della *potenzialità*, di cui sono troppo dubbî e non sperimentabili gli *effetti*, sarebbe vano discorrere, tiriamo via, accontentandoci d'osservare che a far una buona copia d'un quadro di Raffaello, tre o quattr'anni d'*Accademia* aiutano forse più di ogni possibile *intuizione*.

Ma, per tornare al primo esempio, che cosa ha voluto dire il Croce affermando che se noi non siamo in grado di produrre una Madonna di Raffaello, gli è solo perchè ci manca " quella tale intuizione „? Che noi non siamo tutti dei Raffaelli?... D'accordo; anzi è fin troppo chiaro, fin troppo semplice. Ora, chi non fa nè quadri nè poemi nè statue, ha o non ha intuizioni? L'intuizione è attività comune, o è attività speciale di coloro che il mondo chiama artisti? Fra le intuizioni di costoro e le intuizioni degli altri v'è solo differenza quantitativa o qualitativa? Lo domando perchè v'è un luogo (p. 73, l. 23) in cui il Croce sostituisce all'*intuizione* l'*ispirazione*, che da tanti anni si suole attribuire agli artisti, anzi soltanto ai grandi.

Ne' casi di cui abbiamo fin qui discorso, l'*espressione* concomitante all'*intuizione* s'*esteriorizzerebbe* in un *modello* o in una *copia;* ma non è punto necessario — secondo il Croce — che l'*esteriorizzazione* avvenga perchè il fatto estetico si compia. " Il fatto estetico si esaurisce tutto nell'elaborazione espressiva delle impressioni. Quando abbiamo conquistato la *parola interna*, concepito netta e viva una figura o una statua, trovato un motivo musicale, l'espressione è nata ed è completa. Non ha bisogno d'altro „ (pag. 53).

Nel caso della musica sono pronto a concederlo, perchè se — come dice altrove il Croce — " l'intuizione del Beethoven non fosse il suo pezzo musicale, e il pezzo musicale la sua intuizione „ (p. 13), non saprei davvero che cosa sarebbe. Tutt'al più il pezzo musicale avrà bisogno di chi lo canti o lo suoni meglio del maestro, ma il maestro *lo trova* di solito *esteriorizzandolo* per proprio uso come può, in qualche modo; anzi l'*intuizione* e l'*espressione* nella musica si identificano tanto che una concezione musicale *muta* non è pensabile se non come un esercizio algebrico, un calcolo di combinazioni acustiche.

Ad ogni modo, in altri casi, cioè in altre arti, l'*espressione,* secondo il Croce, potrebbe non esteriorizzarsi e tuttavia essere " completa „; e se ciò è, chi sa quanti bei quadri, mirabili statue e stupendi poemi vi furono al mondo, che non furono mai dipinti, scolpite e scritti; chi sa quanti grandi artisti passeggiano per le nostre vie in strettissimo incognito! Io credo piuttosto che vi sia sempre stato e vi sia una quantità d'intuizioni, ossia di concezioni estetiche, abortite per mancanza d'*espressione*, ch'è quanto dire di *formazione* o di concretezza. Con qual ragione si parli di un'*espressione interna* " completa „ e non esteriorizzata, davvero non so intenderlo. Se quell'espressione, che si suppone " completa „ è *interna*, e tale rimane, che ne sappiamo noi? Che cosa sappiamo delle concezioni artistiche che non ci si manifestano? Come possiamo *giudicare* del loro *grado d'espressione*?

Ma un'altra cosa più importa. Le parole del Croce che più su ho riferite tendono a ribadire la sua tesi fondamentale della assoluta interiorità del fatto estetico e della identità della intuizione coll'espressione (interna). Ora cotesta tesi — astraendo dalle esagerazioni e dai paradossi che ne possono germogliare — ha molto del vero, ma ha molto poco del nuovo. Che non si possa *intuire* senza *vedere*, che non si possa concepire, per es., nè una statua nè un quadro senza che entri in azione la facoltà nostra formatrice d'imagini, senza che la figura, da noi concepita, abbia un'*espressione*, è tanto vero che nessuno potrebbe dire e nessuno ha mai detto il contrario; però, si badi: cotesta espressione, cotesta *parola interna* — come il Croce la chiama — non è propria esclusivamente dell'attività intuitiva, ed appartiene anche all'attività intellettuale. Che cosa è infatti il *pensiero* se non un *tacito discorso*? Posso io pensare senza che il mio concetto si

concreti in una *parola interna*, prenda dei contorni e un atteggiamento, abbia una *espressione*?...

Per questa via non è possibile raggiungere la differenza necessaria tra arte e scienza; e per questa via il Croce non la cerca. Egli la pone invece nel contenuto diverso della *intuizione* (estetica), ch' è l' *individuato*, il *concreto*, e del *concetto*, ch' è l'*astratto: un uomo*, e *l'uomo* (cfr. p. 25); ma poichè poi è costretto a riconoscere che anche il concetto richiede la sua *espressione*, egli, che concepisce il fatto artistico solo come un *fatto d'espressione*, indifferenziabile, va diritto a concludere che " ogni opera di scienza è anche opera d'arte „ (pag. 27).

Eppure non è così; e lo sa benissimo il Croce stesso il quale più oltre avverte: " La forma logica o scientifica, in quanto tale, esclude la forma estetica. Chi si fa a pensare scientificamente ha cessato di contemplare esteticamente „ (pag. 39). Se questo è, che importa che un trattato abbia — poniamo — qualche felice pagina descrittiva e che uno scienziato possa possedere anche qualche attitudine d'artista? Il trattato — se è opera vera di scienza, e non amabile chiacchiera di *divulgatore* — resterà trattato, nè lo renderà mai opera d'arte " il pensiero „ che vi si volga " limpido, netto, ben contornato, senza parole superflue, senza parole mancanti, con ritmo e intonazione appropriata „ (pag. 28). Io vorrei mettere innanzi al Croce più d'un trattato di meccanica razionale o d'elettrotecnica o di patologia, in cui (a giudizio dei competenti ed anche degli incompetenti) il pensiero corre *limpido, netto, ben contornato, senza parole superflue* (quanto al *ritmo* ed all'*intonazione appropriata*, di cui sarebbe troppo difficile formarsi un'idea, non garantisco di niente); e poi dirgli: m'usi la cortesia di farmi un poco *gustare* cotesti libri anche come opere d'arte!

Non lo inviterei però tanto facilmente alla stessa prova mettendogli innanzi qualunque libro di filosofia, di politica, di storia e, in genere, di quelle che si chiamano scienze morali. So benissimo ch'egli non avrebbe fatica a convincermi che, tra i cultori di quelle scienze, qualche " gran pensatore „ merita anche il nome di " grande scrittore „, e può parlare, oltre che all'intelletto, anche alla fantasia e al sentimento; ma io allora dovrei domandargli: se proprio crede che " ogni opera di scienza „ — qualunque ne sia la materia — possa effettivamente *pren-*

dere aspetto (ch'è quanto dire aver l'efficacia e produrre gli effetti) dell'opera d'arte.

Basti quest'accenno, perchè — risoluto come sono a non entrare nè punto nè poco nella grossa questione dell'*indifferenza del contenuto* (ch'è un altro dei capisaldi dell'estetica del Croce) — voglio astenermi da ogni discorso che potrebbe trascinarmi in qualche modo a toccarla (1); ma un'altra cosa qui m'importa di avvertire.

V'è un momento in cui il concetto d'*espressione* (cioè il concetto in cui dovrebbe contenersi tutta la propria essenza del fatto estetico) s'adegua pel Croce (p. 28) al comune concetto letterario della *forma*, anzi della *elocuzione;* confina — come abbiamo veduto — con le idee di *chiarezza, proprietà, convenienza, efficacia*, ecc.; l'arte è ridotta allo *scriver bene,* cioè allo *esprimere* adeguatamente e perspicuamente non importa che cosa, qualunque *conoscenza*. Ora se questo non ha nulla che vedere con la *indifferenza del contenuto* ammessa dal Croce, contrasta però con la natura del fatto estetico, ch'è per lui pura *conoscenza intuitiva* col suo equivalente: l'*espressione*, o — com'egli anche la chiama — la " conoscenza *espressiva* „ (p. 14). Ciò postula la incertezza e la insufficienza di un'estetica *semplicemente* concepita come *scienza dell'espressione.*

Data l'equipollenza dei due termini inscindibili (intuizione ed espressione), ne consegue anche la loro simultaneità. L'intuizione pel Croce non è un antecedente dell'espressione; l'una e l'altra si producono " nell'attimo stesso „.

In un certo senso ciò è vero, anzi incontrastabile; ma il Croce c'insegna rettamente (p. 94 sg.) che non ogni espressione è estetica.

Delle *espressioni in senso naturalistico* è inutile discorrere; badiamo invece alle estetiche (che son poi quelle destinate ad esteriorizzarsi nelle opere d'arte) e vediamo s'esse si producano nel modo da lui indicato.

Qualche volta, sì; l'intuizione e l'espressione hanno talora una formazione affatto istantanea, una concomitanza assoluta; l'artista intuisce ed esprime, *vede* e *fa;* ma qualche altra volta

---

(1) Ne ho già toccato altrove, polemizzando, anni or sono, amichevolmente col Croce, e mi basta.

invece (anzi il più delle volte) l'artista *intuisce, sente*, e non riesce ad esprimere; ha qualche cosa che gli si agita dentro e che invano domanda d'essere espresso; sa ciò che vuol fare, sa dove vuol riuscire e non trova la via. Tenta e ritenta, muta e rimuta, è costretto ad accontentarsi d'espressioni anche per lui insoddisfacenti, *provvisorie*, messe lì quasi a sussidio della memoria, quasi a richiamo di un'*idea*, di un'*imagine* ribelle, che non si lascia imprigionare nell'espressione.

Ora che mai può essere l'intuizione di cui parla tanto il Croce se non fosse la *concezione* di cui si è sempre parlato? Se fosse altra cosa, e fosse tutt'uno con l'espressione, la formola che " l'attività intuitiva *tanto intuisce quanto esprime* „ sarebbe la più vuota cosa del mondo, un giro vizioso di parole. Invece l'espressione, nel senso suo più virtuale, è spessissimo, nell'arte, non l'immediata conseguenza della concezione (o intuizione, se così si vuol dire), ma il lento prodotto della elaborazione; di quella lunga elaborazione, di cui nei manoscritti dei grandi poeti o negli schizzi e cartoni de' grandi pittori restano le tracce, i documenti irrecusabili.

Sennonchè — qui si potrebbe dirmi — voi vi riferite alla *espressione esteriorizzata* invece che all'*interna;* mentre " l'*opera d'arte* (l'opera estetica) è sempre *interna* „, e " quella che si chiama *esterna* non è più opera d'arte „, come il Croce intrepidamente sostiene (p. 54).

Io prendo solo ciò che posso prendere, ciò che sta in fatto, ciò ch'è in qualche modo controllabile e tangibile; prendo il fenomeno; e cotesto fenomeno è d'altra parte il chiaro riflesso dei fatti estetici interni da cui dipende. Qual differenza infatti può passare (non di natura, ma di forma) tra l'*espressione interna* e la *esterna*? Nessuna; la seconda è lo specchio della prima, anche *quantitativamente*.

Che l'*espressione* il più delle volte si trovi provando e riprovando, lo sa benissimo il Croce, che ha descritto molto esattamente il processo della ricerca di essa, in un luogo che gioverà riferire: " L'individuo *A* cerca l'espressione di un'impressione che sente, ma che non ha ancora espressa. Eccolo a tentare varie parole e frasi, che gli diano l'espressione cercata, che dev'esserci, ma ch'egli non possiede. Prova la combinazione *m*, e la rigetta come impropria, inespressiva, manchevole, brutta:

prova la combinazione *n*, e col medesimo risultato. *Non vede punto o non ci vede chiaro.* L'espressione gli sfugge ancora. Dopo altre vane prove, nelle quali ora s'accosta ora si discosta dal segno cui tende, d'un tratto forma (par quasi che gli si formi da sè spontaneamente), l'espressione cercata, e *lux facta est.* Egli gode per un istante il piacere estetico o del bello „ (p. 119).

È di qui che il Croce prende le mosse ad affermare l'*identità* di *gusto* e *genio*, e il valore assoluto del giudizio estetico.

Intorno alla prima di coteste affermazioni non occorre spendere molte parole; per quanto discretamente la si voglia intendere e per quanto se ne voglia restringere il senso, essa non regge.

Il *gusto attivo* (produttore) proprio dell'artista e il *gusto passivo* (riproduttore) proprio del critico, non sono la stessa cosa, perchè sostanzialmente diverso è il loro prodotto. Il De Sanctis diceva, è vero, che l'opera del critico è *una creazione sopra un'altra creazione;* ma nessuna opera di critica è equivalente a un'opera d'arte.

Se *genio* è *attività,* e *gusto* è *passività* (come concede il Croce medesimo, p. 121), perchè vorremmo *identificarli*? Tanto sarebbe identificare, p. es., la voce vibrante al cilindro del fonografo che riceve le impronte delle vibrazioni.

Certo, è facile concedere che il *gusto,* sentendo, apprezzando, valutando la bellezza, partecipa in qualche modo della natura del *genio,* il quale la crea; e perciò, in certo senso si potrà pur dire che il critico è, o dovrebbe essere, artista; allo stesso modo che l'artista, in quanto opera coscientemente — cioè esperimenta, riflette, sceglie — è o dovrebbe essere critico; ma la differenza tra l'uno e l'altro rimane sempre *qualitativa.*

Or se — per dirla col Croce — il *genio* ci dà la *produzione* e il *gusto* la *riproduzione*, questo, rispetto a quello, rappresenta una *passività* sollecitata da uno *stimolo* del tutto esterno, non un'energia spontanea; esso si riduce ad una semplice *ricettività.*

Inoltre, l'*attività* vera e propria del gusto, in quanto è *gusto* (cioè funzione critica), non consiste nella *riproduzione*, ma nel *giudizio;* e la critica — anche la pura critica estetica — non crede mai d'avere con la semplice *riproduzione* esaurito il suo còmpito, nè crede che la *intuizione* le basti, se a ciò che l'intuizione (in senso estetico) le porge non aggiunge — palesemente o coper-

tamente, direttamente o indirettamente — ciò che le viene dalla riflessione, dall'associazione, dal confronto, dall'analisi. Il *genio* (arte) è *sintesi,* mentre il *gusto* (critica) è essenzialmente *analisi*, anche quando sembra che il suo processo sia affatto intuitivo; perciò l'*identità* dell'*attività* colla *passività*, della *sintesi* coll'*analisi* è un paradosso.

Meno paradossale, ma non più sicura, è l'affermazione dell'*assolutezza* del giudizio estetico. Il Croce non ne è il primo e forse nemmeno — aggiungo — il più convincente banditore; quantunque egli, che divide il suo tempo tra molteplici studi, e accoglie nel capace suo spirito tante pugnaci preoccupazioni così letterarie come scientifiche, avesse speciali ragioni di mettere ogni impegno nel difenderla vigorosamente e nel dimostrarla trionfalmente. Dimostrando infatti l'assolutezza del giudizio estetico, egli sarebbe riuscito ad accrescere l'importanza e — sto per dire — la dignità di quella specie di critica letteraria che a lui da molti anni sta tanto a cuore.

Ma la dimostrazione era possibile? Ne dubito assai; certo intanto il Croce non l'ha data, come del resto non l'ha mai data nessuno; e la storia dell'estetica è lì a dimostrarlo. L'impotenza della filosofia s'è in ciò tradotta nell'adagio volgare: *De gustibus non est disputandum*, oppure nelle contraddizioni in cui s'avvolse. P. es., il Kant (1), dopo aver concesso, nella *Critica del giudizio*, l'arbitrio completo del *gusto,* è poi ricorso ad una specie d'*imperativo estetico*, secondo il quale il *gusto* veniva a trasformarsi in una facoltà di giudicare del bello in maniera universale e necessaria. Quando, secondo il Kant, il giudizio estetico assume cotesta validità e riveste cotesto carattere d'universalità e necessità? Quando esso sia tale da poter pretendere (ma quale è il giudizio che non lo pretenda?...) d'essere accettato dai più, quand'esso riscuota il suffragio della maggioranza. Soluzione di fatto, e non di ragione; concessione a convenienze e ad esigenze meramente pratiche.

Il consenso di molti costituisce una probabilità di rettitudine, ma non una prova. Infatti, a certe epoche, la maggioranza, e magari la totalità, segue dei gusti, ammette dei giudizî che

---

(1) Cfr. Victor Basch, *Essai critique sur l'Esthétique de Kant*, Paris, Alcan, 1896, pp. 208 sgg., 385 e 387 sgg.

poi destano universale esecrazione ed orrore. Il consenso — ch'è ancora il più forte argomento (non filosofico, sì bene storico) in favore dell'assolutezza del giudizio estetico, contro il quale è facilissimo accumulare i sospetti — è soggetto a variare anch'esso; e chi non se ne fidasse, dovrebbe andare in cerca d'una dimostrazione dell'assolutezza del gusto, alla quale, sperando di raggiungerla speculativamente, non mi pare che s'arrivi.

Il Croce intanto ha creduto d'arrivarci; ed ecco come.

Dopo avere descritto, colle parole più su riferite, il processo mediante il quale " l'individuo *A* „ persegue e trova l'espressione estetica, cioè crea la bellezza, descrisse anche il processo mediante il quale " l'individuo *B* „ giunge a formulare su quella espressione un giudizio che escluda *ogni possibilità di divergenze*, un giudizio infallibile.

Che fa dunque " l'individuo *B* „? Questo: " Egli non potrà se non *mettersi nel punto di vista* di *A*, e rifare, con l'aiuto del segno fisico prodotto da *A*, il suo processo. Sa *A* ha visto chiaro, *B* (che s'è messo nel punto di vista di lui) vedrà anch'egli chiaro e sentirà quell'espressione come *bella*. Se *A* non ha visto chiaro, non vedrà chiaro neanch'egli, e la sentirà, *d'accordo con lui*, come più o meno brutta „ (p. 120).

È destino che, in filosofia, per ispiegarsi, bisogni continuamente avvolgersi nelle ambagi del parlar figurato e far uso continuo di metafore, d'allegorie, di paragoni; ma poichè a cotesta risorsa nessuno — nemmeno il Croce — rinunzia, me ne varrò anch'io per discutere in breve il caso interessante di *A* e di *B*.

Dunque *A* trovavasi, press'a poco, nella penosa condizione di chi, *vedendo confuso*, vuol *veder chiaro*. Piglia una lente, e non gli serve; ne piglia un'altra, e peggio che mai; finalmente ne trova una che fa meravigliosamente per lui: *lux facta est;* egli vede distinta, nitida l'imagine che prima stavagli innanzi incerta ed informe. Cotesta lente metaforica, che, dopo tanti stenti, l'ha servito a dovere, è l'*espressione; attraverso ad essa* egli ha avuto (o gli è parso; il che *per lui* torna poi lo stesso) la *pienezza della visione*, la visione beatifica della bellezza. Sta bene.

Poniamo che " l'individuo *A* „ sia io; venga pure adesso il signor *B* a controllare se ho *veduto chiaro,* e faccia il dover suo.

Egli dunque comincierà dal " mettersi nel punto di vista „ in cui io m'ero messo; ed osservando cotesto precetto datogli dal Croce (un ragionevolissimo precetto, che adombra un canone fondamentale della critica storica) sarà certo in grado d'adempier meglio, o meno peggio, il suo ufficio. Egli però *non rifà intero il mio processo;* egli piglia, senz'altro, " il segno fisico da me prodotto „, la *lente* che gentilmente gli presto, e guarda. Se io *ho visto chiaro*, anche *B vedrà chiaro*; il Croce almeno l'assicura. Ma, per combinazione (una combinazione tutt' altro che rara!), *B* non vede chiaro, anzi non vede nulla, e ne leva un grande scalpore. Ebbene, che farci?...

È impossibile che ci mettiamo d'accordo; nè io, se ci ho veduto (o mi è parso), posso dichiarare che mi sono sbagliato; nè *B*, se non ci vede, può ammettere di vederci; perciò tronco la disputa alzando le spalle, e gli rispondo: — Caro signore, posso prestarle bensì la mia lente, ma non i miei occhi. — Lo stesso contrasto può poi ripetersi tra *B* e un altro *B*, ecc.

Così è; a rigore, per *vedere* ciò che uno vede e come l'altro lo *vede*, occorre non solo il medesimo strumento ottico, ma il medesimo organo visivo; bisogna che i due siano uno.

Per togliere *ogni possibilità di divergenze*, bisognerebbe che chi giudica un artista fosse non solo un po' artista, ma *quell'artista*; e se, prescrivendogli di *mettersi nel punto di vista* dell'artista da giudicarsi, pretendiamo ch'egli si transustanzi in esso, rinunzi affatto alla propria personalità, sopprima tutte le proprie disposizioni soggettive, noi pretendiamo l' impossibile; e posto ch'egli avesse tanta facilità d'adattamento, cioè cotesta completa mancanza d'individualità, egli, per ciò stesso, non potrebbe essere nè artista nè critico. La frase adoperata dal Croce è ambigua; perchè *mettersi nel punto di vista di un altro* può voler dire anche mettersi nell'impossibilità di discernere s'egli abbia fatto male e di condannarlo. Quante birbonate andrebbero impunite, se i giudici *si mettessero* proprio *nel punto di vista* di chi le ha commesse!

Tornando al nostro caso, la disputa tra me che pretendo d'aver *veduto chiaro* e *B* che sostiene il contrario, poichè lui non ci vede, potrebbe durare all'infinito, esaurendosi tutta nel cozzo continuo di due affermazioni contrarie, delle quali nessuna, per sè stessa, può trionfare sull'altra. Perchè l'una finisca col

prevalere, occorrerà che dopo *B* venga *C*, e poi *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, ecc.; e che, fatto ciascuno il debito saggio della *lente*, gettino, l'uno dopo l'altro, sulla bilancia il peso del loro voto. Di due affermazioni opposte: *è bello, è brutto*, prevarrà quella che incontri più facile l'assenso e che riesca ad imporsi con l'autorità e la forza d'una tradizione, oppure quella che riesca a trovare nell'ingegno dei critici che la sostengono dei sufficienti rincalzi teorici, filologici, psicologici, storici, morali, logici, ecc., che le acquisteranno credito e le daranno apparenza di ragionevolezza.

Una cosa qui importa d'aggiungere. Alcune volte il *gusto* giudica indipendentemente, ingenuamente, sotto l'impressione schietta e viva della bellezza, ch'egli riconosce ed afferma senza altri aiuti; ma più spesso anche il giudizio estetico non è che il riflesso d'una speciale educazione artistica, di speciali assuefazioni e convenzioni, di certe disposizioni morali, di preconcetti dottrinali, che concorrono a determinarlo, e che non sono, tutti e sempre, eliminabili (1).

Inoltre, il cosidetto giudizio estetico, in quanto è puramente *estetico*, nel senso più genuino del vocabolo, e contiene solo, nella sua forma primigenia, la constatazione d'una sensazione o impressione o modificazione gradevole del soggetto (il *piacere* —

---

(1) Quanto difficilmente sieno eliminabili, potrei dimostrarlo con l'esempio del Croce stesso, che, standosene a cavaliere di quattro vasti territorî (filosofia, letteratura, sociologia e storia) guerreggia or nell'uno or nell'altro; e, come tratta d'estetica pura, così fa, all'occorrenza, e bravamente, della critica estetica. Ne ha dato testè qualche saggio anche nella sua rivista *La Critica*; ma leggendo ciò ch'egli vi ha scritto del Fogazzaro (a. I, fasc. 2°), m'è subito venuto in mente di domandarmi s'egli ne avrebbe discorso a quel modo senza la sua non dissimulata antipatia per le opinioni filosofiche, sociali e religiose del romanziere vicentino, e soprattutto per certa specie di " esaltazione religiosa „, di cui gli spiace il rifiorire, e ch'egli chiama senz'ambagi " roba da ospedale „ (*Estetica*, p. 67). Ebbene, io sono persuaso che se nel pensare e nel credere egli non si fosse trovato così lontano dal Fogazzaro, il suo giudizio sarebbe stato parecchio diverso, o almen tale da non urtare i nervi d'un mio buon amico, entusiasta del Fogazzaro per ragioni opposte a quelle che rendono lo stesso scrittore tanto poco simpatico al Croce. Abbiamo un bel fare e un bel dire, ma di preconcetti extra-estetici i nostri giudizî estetici sono sempre impregnati; e poichè il fatto — a nostra insaputa e contro la nostra voglia — accade, è onesto e *filosofico* il non ostinarci a negarlo.

anche pel Croce, che pur è così fiero avversario d'ogni *edonismo* — è poi sempre uno dei " quattro lati „ del fatto estetico — p. 95), non è nemmeno giudizio (1), e come tale non ha valore alcuno. — Questo mi dà piacere; io *sento* ch'è bello?... Ciò ch'io *sento* appartiene solo a me, è insindacabile, incomunicabile: quindi si suol dire che *il bello si sente e non si dimostra*. Ma, come ho avvertito più su, non si può sostenere che l'intelletto sia del tutto estraneo a quella che pare sensazione e impressione; nè, se originariamente vi è estraneo, esso rinunzia a trasformarla in *motivato giudizio;* seguendo, anche qui, fin dove è possibile, un processo di riduzione dal soggettivo all'oggettivo, dal sensibile all'intelligibile.

Finchè io ripeterò asseverantemente: *questo è bello*, e lo ripeterò con tutta la forza de' miei polmoni e tutta la sincerità della mia coscienza estetica, nessuno mi prenderà per giudice competente, per critico d'arte. Perchè cotesta qualità mi sia riconosciuta, bisogna che io m'ingegni non solo a far nascere in altri la stessa mia impressione, ma a far comprendere anche perchè essa nasce e deve nascere, analizzando e ragionando. Gli elementi concettuali che spesso si mischiano alle intuizioni dell'artista (quanto *pensiero* vi può essere infatti nell'arte!) *sono inseparabili dalle intuizioni* del critico.

Ma torniamo a noi.

Il Croce dunque sostiene che come *A* vede, così dovrà vedere anche *B;* e dà per " *impossibili* i casi che *A* abbia visto chiaro e *B* veda buio; o che *A* abbia visto buio e che *B* veda chiaro „ (p. 120). Sonvi, è vero — egli soggiunge — " dei fatti che paiono contradire „; sonvene anzi tanti e tanti ch'è superfluo venire agli esempi; ma che importa? " Ciò non vuol dir altro che una delle due parti ha torto „. È probabile; ma come dirimere la controversia, come sapere chi abbia ragione? Ecco il punto; un punto scabrosissimo che in teoria non ammette soluzione, e che in pratica ammette solo le modeste soluzioni del senso comune.

Intanto il Croce concede che possono sbagliarsi o l'artista o il critico, oppur magari tutt'e due; e questo non soltanto *par*

(1) Cfr. J.-P. Durand (De Gros), *Nouvelles recherches sur l'esthétique et la morale*, Paris, Alcan, 1900.

contradire, ma contradice, anzi cancella, distrugge l'*impossibilità* che *B* non veda chiaro quando ha veduto chiaro *A*.

Il fatto succede; sarebbe vano dissimularlo, negarlo; e tanto basterebbe. Ma al fatto il Croce contrappone le ragioni. Perchè dev'essere *impossibile* che *B* non veda chiaro dove ha veduto chiaro *A*, se costui proprio ha veduto chiaro? O in altre parole, perchè l'*espressione bella* trovata da *A* non può parere mai brutta a *B*? È semplicissimo: perchè " l'attività espressiva, appunto perchè attività, non è capriccio ma necessità spirituale ", e perchè cotesta attività " un medesimo problema estetico non può risolverlo se non in un sol modo, che sia buono " (p. 120).

Se questo in filosofia fosse dogma (e formulato così, ne ha tutta l'aria), mi si bruci per eretico: io non ci credo.

Chiamando indifferentemente *attività espressiva* tanto quella propria del critico quanto quella propria dell'artista, cioè dando per dimostrato (mentre di dimostrazione non v'è neppur l'ombra) che " l'attività giudicatrice, che critica e riconosce il bello, è la medesima attività che lo produce " (p. 121), non si taglia la testa al toro, di certo; non si pone in sodo la *necessaria* infallibilità della prima, alla quale — s'essa è poi tutt'una cosa con la seconda — si concederebbe per giunta un privilegio ingiusto.

Ma che importerebbe, s'anche l'attività spirituale che giudica fosse la medesima che produce? In certi casi è proprio l'artista stesso che giudica; e non l'opera altrui (nel che gli artisti non sono, a dir vero, molto di frequente felici), sì bene l'opera propria; e dopo aver risoluto un problema estetico in un modo, lo risolve poi in un altro. Delle due o più soluzioni, che possono essere *di fatto* e *di giudizio,* l'una non esclude assolutamente l'altra; e quella stessa che l'artista rigetta, finchè egli non l'abbia rigettata, ci appaga.

Cioè date due *espressioni,* non ne consegue che se una è bella l'altra deva essere necessariamente brutta; fuori d'un bello — ch'è sempre relativo — non sta sempre il brutto, come fuori del vero sta per necessità logica il falso.

Supponiamo che il *Furioso* fosse a noi pervenuto in quell'assetto ch'esso ebbe nella prima edizione del '16, oppure in quella ritoccata del '21. Secondo ogni probabilità noi adesso non supporremmo possibile una diversa *espressione* della mirabile *in-*

tuizione ariostesca; seguiteremmo a *veder chiaro*, cioè a giudicar bella l'opera che il poeta rimaneggiò poi così profondamente nella edizione del '32, in cui ci pare recata all'ultimo segno della perfezione espressiva. Eppure è noto che l'Ariosto non se ne accontentava ancora, e che, se fosse vissuto più oltre, avrebbe fatto del poema una quarta edizione differente dalle precedenti. Può darsi ch'egli l'avrebbe guasto, e può darsi che egli l'avrebbe migliorato: non ne sappiamo nulla; ma questo sappiamo: che l'*attività espressiva* d'un grandissimo artista si esercitò tre volte a *produrre* e tre volte a *giudicare* il poema che pure fin da principio parve una meraviglia.

Nei capolavori sembra *necessario* ciò che per noi è definitivo, ma per gli artisti era ancora *provvisorio*. Chi oggi non s'accontenta del *Mattino* e del *Mezzogiorno* quali furono pubblicati dal Parini? Ma chi vorrebbe sostenere che *necessariamente* così, e non altrimenti dovessero rimanere, nell'insieme e nelle parti, per esser belli? Se si getta lo sguardo sul ricco e importantissimo materiale adunato dal poeta per riformare e compiere l'opera rimasta imperfetta, è facile convincersi ch'essa era destinata a un vero e proprio rifacimento. Con vantaggio o con iscapito? Non lo sappiamo; sappiamo soltanto che la bellezza d'alcuni materiali adunati dal poeta per la ricostruzione dell'edificio, invogliò più d'un editore a metterli in opera; e sappiamo che il *problema* del *Giorno* dalla incostante e incontentabile *attività espressiva* dell'autore fu avviato a soluzioni diverse, delle quali a noi è impossibile indicare l'*unica buona*.

" L'attività espressiva, appunto perchè attività, non è capriccio ma necessità spirituale „ — dice il Croce; e sia che si prenda l'*espressione* nel senso più largo e vi si assommi tutta l'opera della creazione artistica (*contenuto* e *forma*, come usasi dire), o sia che si prenda nel senso più stretto e comune (*forma*, anzi *lingua*, *parola;* perchè la " scienza dell'espressione „ è anche una " linguistica generale „), la *necessità* assoluta a cui essa soggiacerebbe, non appare evidente *a guisa del ver primo che l'uom crede*. Non è evidente, dico, appunto perchè l'*espressione*, in qualunque senso la si prenda, non ha sempre la medesima scaturigine, e può essere *spontanea* o *riflessa*.

In certi casi tra le molte espressioni che si possono escogitare o che l'uso ci offre, una sola soddisfa, una sola rende

davvero l'imagine, l'idea che ci sta nello spirito, e non potremmo adoperarne un'altra; ma quante volte l' espressione non ci è suggerita da motivi affatto estrinseci d'opportunità, di convenienza, di tradizione, ecc.? In altri casi la scelta si compie con piena indifferenza, parendoci che ciò che a noi preme d'esprimere possa essere sufficientemente ed egualmente espresso in più d'un modo. Il Parini, per dare un esempio, aveva scritto, nel primo testo del *Mattino*,

Tra una pagina e l'altra indice nastro;

poi mutò, e scrisse:

Tra l'uno e l'altro foglio indice nastro;

ebbene, l'*attività espressiva che non è capriccio, ma necessità spirituale*, qui s'esplica in due modi; quale è il *necessario*? Potremmo cavillare per sostenere la prima o la seconda lezione; ma tutte le ingegnose ragioni che riuscissimo a mettere in campo per quella o per questa, non dimostrerebbero mai esaurientemente l'assoluta necessità di quella da noi preferita.

Sottilizzando si può giungere a concludere che non vi sono espressioni equipollenti (come, sottilizzando, il Croce arriva perfino a concludere che non vi sono *parti del discorso:* nomi, verbi, ecc.; che non vi sono sillabe, che non v'è grammatica normativa; che il vocabolario " per quanto lo si faccia progressivo e dell'uso vivo, è sempre cimitero di cadaveri più o meno abilmente inbalsamati ", od anche una " raccolta d'astrazioni " — pp. 147-152); in realtà però non s'arriva sempre a scorgere la diversità delle *cose* sotto la diversità delle espressioni. Vi sono *cose* che noi tutti esprimiamo, ma diversamente, senza *necessità,* appunto perchè può aver luogo la scelta. Ora se *B* tante volte non s'appaga della espressione d'*A*, ciò non vuol dire che *A* non abbia usata l'espressione che *necessariamente* avrebbe dovuto, ma che *B*, nel caso di *A*, ne avrebbe preferita un'altra. Questione di gusti; poichè (e possiam dirlo con que' versi di Dante scritti senza intenzione d'adombrarvi una dottrina estetica dell'espressione):

Opera naturale è ch'uom favella,
Ma così o così, natura lascia
Poi fare a voi, secondo che v'abbella.

Io non ho fatto altro fin qui che trascrivere alcune delle postille e tradurre alcuni dei punti interrogativi di cui ho seminato (leggendolo mesi or sono) il libro del Croce, il quale m'è parso certo assai più ingegnoso e più ardito, ma non più convincente di tanti altri libri d'estetica che si sono fin qui scritti.

Rinunzio anche ad accennare gli altri dubbî e l'altre osservazioni che, leggendolo, mi sono sorti in mente, ma non tacerò una domanda che più volte — ripensandoci — mi sono fatta; e la domanda è questa: Semplificata l'estetica nel modo coraggioso che al Croce parve opportuno; rigettati sdegnosamente gli aiuti che altri cercarono nella psicologia e nella storia; ridotta tutta la somma del fatto estetico all'intuizione colla conseguente espressione; messi in disparte tutti i fatti che potrebbero supporsi concomitanti, antecedenti o susseguenti, qual maggior luce piove sull'oscuro problema della natura dell'arte e del bello?

Il bello è pel Croce unicamente — ormai lo sappiamo abbastanza — " l'espressione riuscita ". Ma quando *è riuscita*? Quando *piace*?... Se tutto dovesse ridursi a questo, e l'estetica nuova — scendendo " dalle *stelle* della metafisica ", ch'essa deride, e uscendo " dalle *stalle* del positivismo " (1), ch'essa dispregia — non fosse in grado di dirci altro, noi potremmo ringraziarla una volta per sempre, e dirle: — sapevamcelo!

---

(1) Sono espressioni del Croce.

Sunto della Memoria della Prof.ssa Maria Begey: *Per un'opera inedita di Pietro Giannone.*

Questa Memoria ha per oggetto l'esame di un' opera di Pietro Giannone (inedita nell'Archivio di Stato di Torino), opera che ha importanza grandissima in sè, e come documento necessario a spiegare il pensiero del suo autore, specialmente circa il punto più controverso della sua vita: l'abiura.

Movendo dal concetto che la sincerità di questa, come del resto tutta la vita dello storico napoletano, fu sinora oggetto dei più disparati giudizi, l'A. della Memoria cerca la soluzione delle questioni che intorno al Giannone si fanno, non tanto nelle lettere e nei documenti ufficiali che possono non essere l'espressione sincera dell'animo di lui, quanto nelle opere che nel carcere egli scrisse, ed in particolar modo in quella che, composta in prova della sua conversione e dedicata al Padre Prever, s'intitola: *Apologia dei Teologi scolastici*, ovvero *Avvertenza che dee aversi nel leggere i Padri antichi.* Che cosa rappresenta quest'opera nel pensiero del suo autore?

E anzitutto: quali le idee e i sentimenti del Giannone prima della sua abiura? L'A. segue passo passo lo svolgersi del pensiero del Giannone, dai suoi primi studi a Ischitella e a Napoli, fino agli ultimi ch'egli compieva in terra straniera; lo segue attraverso le opere sue, dalla *Storia civile* al *Triregno* — il frutto della piena maturità del suo ingegno, da cui attinge tutto il *credo* filosofico, politico e religioso del Giannone. Il racconto del suo arresto e della prigionia a Miolans compiono questa prima parte.

La seconda tratta dell'abiura, e ne studia il valore, vagliandone l'atto stesso, dal Giannone steso dinanzi all'Inquisitore e al Padre Prever, e poi cercando spassionatamente perchè essa fu fatta, e se fu sincera.

Considerati tutti i giudizi che varî scrittori esposero intorno a questo fatto, alla spiegazione del quale l'A. si è specialmente rivolta, trova che, mossi quasi sempre da due opposti

preconcetti, essi non hanno valore di fronte a ciò che è la verità.

Appoggiandosi alle parole stesse del Giannone, combatte ugualmente la creduta irreligiosità del Giannone, come pure la possibilità d'una sua conversione.

Seguendo il suo pensiero essa ha già antecedentemente notato come nel Giannone la ribellione alla Chiesa, anche in materia religiosa, movesse essenzialmente dal principio di opposizione politica, che forma il principale capo d'accusa della condanna della *Storia Civile*, poichè tale ribellione non ha radice in un dubbio suscitato dal razionalismo filosofico, bensì dal crollo che gli studî storici hanno dato alla legalità del potere temporale, sì che egli, nell'avversione sua per quanto da questo potere nacque, nega tutto ciò che dalla Chiesa fu fatto nel corso dei secoli. Ma accanto a questa opposizione, perdurava in lui, sia pur anco errata, una fede religiosa. Pietro Giannone credeva in Dio; tutte le sue opere lo attestano; era convinto di essere nella verità; sicchè l'abiura non è psicologicamente spiegabile, e l'A. la ritiene una debolezza, che i tempi, e più ancora la grande infelicità del povero storico perseguitato, gli fanno perdonare. A conferma delle asserzioni, l'A. porta una prova non ancora citata dagli studiosi del Giannone: ed è la continuità del pensiero del Giannone, che dopo aver seguito negli anni di libertà un cammino ascendente, acquistando sempre nuovo vigore dagli studî, s'allarga ora, nel carcere, a dimostrare ciò che precedentemente ha appreso.

Difatti i capitoli seguenti della Memoria (IV-VIII) ritrovano nelle opere ultime del Giannone le caratteristiche notate nelle prime. Nei *Discorsi sugli Annali di Tito Livio* rivive il concetto politico espresso nella *Storia Civile*; e nella *Apologia dei Teologi scolastici*, che l'A. esamina minutamente, sta raccolta tutta la materia che informava gli abborriti volumi del *Triregno*, come lo dimostra il parallelo delle due opere. La forma soltanto (più mite nell'opera dedicata al direttore di coscienza del Giannone) è subordinata ad un'altra idea qualunque; il pensiero non ha mutato in nulla. Lo confermano pure la *Storia della Chiesa sotto il pontificato di Gregorio Magno*, svolgimento di una parte incompiuta del *Triregno*, di cui il Giannone aveva a Vienna abbozzato l'indice, come molte pagine dell'*Ape ingegnosa*, l'ultima opera del

Giannone, scritta a Ceva, delle quali opere l'A. riassume ugualmente la materia.

La Memoria si chiude col breve racconto degli ultimi anni della dolorosa prigionia del Giannone e della sua morte nella cittadella di Torino.

Relazione intorno la Memoria presentata dal Dr. Stefano Grande col titolo: *Il Pensiero pedagogico di L. A. Muratori.*

Il lavoro esordisce con alcune osservazioni generali intese a ribattere l'accusa che gli stranieri fanno agli italiani di non avere prodotto nella storia della scienza e dell'arte educativa altro pedagogista che Vittorino da Feltre, ed avverte che Ludovico Antonio Muratori non ebbe sinora fra i molti suoi studiosi e critici chi raccogliesse ad organica unità le idee pedagogiche sparse qua e là ne' suoi numerosi volumi.

Così l'autore entra in argomento e divide il suo lavoro in tre parti corrispondenti al triplice aspetto dell'educazione contemplata nella sua essenza universale, nelle sue parti e specie, nella sua sintesi finale.

Nella parte prima egli va rintracciando il concetto pedagogico quale traspare dalle opere filosofiche del Muratori, e sopratutto si ferma sulla distinzione tra educazione ed istruzione e ad un tempo sulla necessità, che entrambe siano coltivate e procedano di pari passo nella scuola, nella famiglia, nel mondo. Studia il metodo educativo di lui e lo riattacca a quello dei grandi pensatori antichi e moderni, italiani e stranieri; passa quindi in rassegna i diversi mezzi educativi consigliati qua e là dal Muratori nelle svariate sue opere, dividendoli logicamente in due categorie: gli uni mirano alla formazione del carattere, quali i premî ed i castighi, la lode ed il biasimo, l'imitazione, l'emulazione, la conversazione coi dotti, ecc., gli altri sono dall'uomo adulto ricercati e messi in atto per raggiungere la sua finale destinazione, come la lettura, le pubbliche adunanze, i teatri, ecc.

Nella seconda parte il Grande considera l'educazione nello sviluppo delle sue parti secondo il pensiero del Muratori, ed anzi tutto muovendo dall'educazione fisica ne dimostra la somma importanza, e ponendo in chiaro la corrispondenza operativa fra l'anima ed il corpo ne arguisce che lo svolgimento dello spirito abbisogna del sussidio de' sensi fisici esterni. Igiene, ginnastica, coltura de' sensi fisici, sono i tre precipui mezzi, che a tal uopo egli prende in attento esame.

Passando alla educazione intellettuale, l'autore vi si ferma più a lungo, dimostrando anzitutto la relazione, che collega fra di loro le scienze tutte e le disamina ad una ad una sotto gli aspetti più attinenti alla pedagogia. E siccome il Muratori è sommo storico italiano, così la storia riguardata sotto l'aspetto pedagogico occupa giustamente nel lavoro del Grande parecchie pagine, dove il concetto storico muratoriano è ricondotto a quattro leggi supreme. E qui giova notare come il lavoro, di cui ci occupiamo, mostra una vera e spiccata originalità, essendochè nessuno prima dell'autore aveva fatto tesoro delle lettere pubblicate di recente nell'epistolario muratoriano del Marchese Matteo Càmpori, non prima conosciute, o difficili ad essere consultate.

Dalla storia passa ad esaminare lo studio delle lingue classiche, delle leggi, delle scienze fisiche, mediche, matematiche, che tutte mettono capo allo studio dell'uomo, ed alla filosofia, mostrando come secondo il concetto del Muratori il filosofo ed il pedagogista armonizzano insieme e si sorreggono.

Alla educazione intellettuale sussegue la estetica, la morale e la religiosa, e sotto questo riguardo l'autore mette in bella mostra la sincera religiosità e l'alta moralità del carattere del Muratori. All'educazione estetica egli consacra un articolo speciale, ponendo in chiaro come essa non sia, come alcuni opinano, una mera coltura di lusso, ma un bisogno della natura dell'uomo, e con accenni altrettanto nuovi, quanto inconfutabili, dimostra il profondo convincimento del Muratori su questo punto.

Viene infine la terza parte della Memoria, che riguarda l'educazione nella sua sintesi finale, che è rappresentata da due fattori principali, il collegio e la scelta dello stato. Seguono a mo' di appendice due ultimi Capitoli riguardanti l'educazione della donna e l'educazione del Principe.

Riguardo all'educazione della donna, osserva l'autore, due correnti si contendono il campo; l'una rappresenta il richiamo alla società antica, l'altra il grido della moderna. Il Muratori non trascorre nè all'uno nè all'altro estremo: il suo disegno di educazione femminile è il più semplice ed il più ragionevole che dir si possa. La donna non va snaturata: essa ha un campo, dove apparisce veramente grande, veramente insuperabile, la casa, che il Muratori appella la scuola della fanciulla, il santuario della sposa, il regno della madre; e la società moderna, osserva egli, che la spinge in un arringo, che non è il suo, non la pensa dirittamente.

Ma dove il Muratori si mostra davvero sotto un punto di vista del tutto nuovo, osserva l'autore della Memoria, è nel Capitolo ultimo, che ha per oggetto l'educazione del Principe. La storia annovera fra gli educatori di principi il Fénélon, il Bossuet, il Condillac, il Gerdil. Fra costoro va meritamente annoverato L. A. Muratori, che fu precettore del primogenito del Duca di Modena, Francesco I. In servizio del suo reale discepolo egli dettò un Trattato di filosofia morale, che vide la luce qualche secolo dopo la morte dell'autore. Quell'opuscolo contiene i pensieri pedagogici e filosofici svolti dall'autore nel suo insegnamento, ed il Grande ci si ferma sopra con singolare compiacenza ponendone in bella luce il grande valore scientifico.

Ludovico Antonio Muratori fu sin qui tenuto in conto di grande storico, di letterato insigne, di non mediocre filosofo. Il Dottor Grande merita lode di avere segnalato in lui il pensatore pedagogista, a cui spetta un posto cospicuo nella storia italiana della scienza educativa, raccogliendo e componendo in bell'ordine le idee pedagogiche sparse ne' suoi numerosi volumi. Per queste ragioni la Commissione propone all'approvazione dell'Accademia la Memoria da lui presentata.

Giuseppe Carle,
Giuseppe Allievo, *relatore.*

Relazione sopra uno scritto della Dott. Emilia Regis, intitolato: *Studio intorno alla vita di Carlo Botta.*

Lo studio di cui diamo breve notizia è condotto su tutto l'epistolario conosciuto di Carlo Botta, ma più specialmente su quella gran parte di esso, che posseduta un tempo dall'insigne e venerato collega nostro Giovanni Flechia, passò, dopo la morte di lui, tra le mani del nipote suo Dott. Giuseppe Flechia, dal quale è custodita inedita, ma promessa, per un giorno che vogliamo sperare non troppo lontano, alla stampa.

Sono ben 580 lettere, disugualmente distribuite nello spazio di quarant'anni compiuti, e che vanno dal 1796 al 1837, anno della morte dello storico. Vario è il loro carattere, come quello delle molte persone a cui sono dirette; e così, mentre alcune trattano di negozii, altre narrano casi, esprimono sentimenti, opinioni e giudizii.

Di esse la Dott. Regis si giovò più di proposito per due fini: chiarire alcuni punti della biografia del Botta e gettar luce sugli aspetti spesso mutevoli di lui, vissuto in tempi mutevolissimi; far conoscere le idee dello scrittore sulla letteratura contemporanea e su molti tra' più cospicui rappresentanti di essa. Di qui la divisione dello studio in due parti, delle quali la seconda molto più lunga della prima. Più lunga, e più curiosa e importante. Vi si trovano riferiti i biasimi che il Botta non si stancò di avventare contro la scuola romantica, e i giudizii ch'egli ebbe a recare di molti scrittori, diversissimi per indole e per valore, quali il Foscolo, il Monti, il Cesarotti, il Cesari, il Grassi, il Marchisio, il Nota, il Testa, e degli stranieri il Goethe, lo Chateaubriand, lo Scott, e Beniamino Constant, e Vittore Hugo e Alfonso di Lamartine. Curiosa, dicevamo, questa parte: perchè mostra sino a quale pressochè incredibile segno la critica letteraria possa essere viziata e resa assurda dal preconcetto e dall'avversione. Quasi sistematicamente il Botta deprime i migliori per esaltare i peggiori. Basti dire, ad esempio, che, non

contento di criticare acerbissimamente i " Promessi Sposi „, egli trascende sino ad anteporre loro la sciagurata " Monaca di Monza „ del Rosini, e pone il " Telemaco „ accanto all' " Iliade „.

Carlo Botta non fu nè un grande critico, nè un grande storico, e nemmeno un grande scrittore, sebbene Vincenzo Gioberti lo annoveri, con giusto plauso, tra i restauratori della lingua, e il Tommaseo gli confermi questa lode; ma errerebbe di molto chi credesse che gl'Italiani non abbiano con esso lui nessun debito; o questo solo d'avere aiutato a restaurare la lingua: e veramente, egli che un tempo empiè del suo nome l'Italia, e non solamente l'Italia, è ora un po' troppo dimenticato, e un po' troppo trascurata riman l'opera sua. A quella non giusta dimenticanza volle in parte riparare la Dott. Regis col diligente e assennato suo studio. Del quale i sottoscritti fanno questo giudizio, ch'esso meriti d'essere inserito nei volumi delle Memorie accademiche, e che però sia da proporne la lettura alla Classe.

R. Renier,
A. Graf, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Aprile 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Mosso, Spezia, Segre, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e Jadanza che funge da Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Camerano Segretario della Classe.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente, 5 aprile 1903.

Il Presidente presenta alla Classe le seguenti pubblicazioni:

1° *Mens sana in corpore sano*, Milano, 1903, omaggio del Socio Mosso;

2° *Sulla ionizzazione dell'aria prodotta da una punta elettrizzata*, Bologna, 1903, omaggio del Socio corrispondente Righi;

3° *Di alcune sorgenti nella Garfagnana e presso Gorizia*, Milano, 1903, omaggio del Socio corrispondente Torquato Taramelli;

4° *Notizie biografiche su Roberto Bunsen*, Torino, 1903, omaggio del Socio Icilio Guareschi.

Vengono accolte per l'inserzione negli *Atti* le seguenti note:

1° *Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alla loro trasformazione*, del Socio nazionale non residente Luigi Bianchi, presentata dal Socio Segre;

2° *Congetture intorno all'influenza di Gerolamo Sacheri sulla formazione della Geometria non Euclidea*, del Socio SEGRE;

3° *Sulla reazione dell' etere* α-*cianpropionico con aldeide benzoica*, del Dr. Lodovico BECCARI, presentata dal Socio GUARESCHI.

Viene in ultimo accolto per l'inserzione nei volumi accademici delle *Memorie*, ad unanimità di voti, lo scritto del Socio Mosso avente per titolo: *Fisiologia dell'Apnea studiata nell'uomo.*

LETTURE

Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni.

Nota del Socio non residente LUIGI BIANCHI.

1. — In una memoria: *Sulla deformazione delle quadriche*, pubblicata l'anno scorso nei " Rendiconti del Circolo matematico di Palermo „ (t. 16), il Dr P. Calapso ha posto sotto una nuova e notevole forma l'equazione a derivate parziali da cui dipende la ricerca delle superficie applicabili sulle quadriche. Egli si fonda per ciò sulla considerazione del *sistema coniugato permanente*, vale a dire di quel sistema coniugato che è comune ad una superficie S e ad una sua qualunque superficie applicabile. Tale sistema, sempre reale se la S è a punti ellittici, può essere reale od immaginario quando la S è a punti iperbolici; ed, in quest'ultimo caso, ci conviene distinguere le deformazioni di S in due specie, dicendo di *prima specie* quelle a sistema coniugato permanente reale, di seconda specie le altre.

Qui ci interessano particolarmente i teoremi del Dr Calapso relativi alla deformazione dei paraboloidi (*). Per il generale paraboloide ellittico il problema della deformazione si riduce ad integrare l'equazione a derivate parziali:

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \operatorname{sen} \omega ,$$

(*) Questi risultati, come l'A. stesso osserva, possono anche dedursi con acconcia trasformazione, ed opportunamente distinguendo il reale dall'immaginario, dalla memoria del sig. A. Thybaut: *Sur la déformation du paraboloïde* (" Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure „, s. III, t. XIV (1897)).

ed alla successiva integrazione di equazioni differenziali ordinarie. Analogamente, pel generale paraboloide iperbolico, le deformazioni di 1ª specie vengono a dipendere dall'equazione:

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \operatorname{senh} \omega,$$

e quelle di seconda specie dall'altra

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \cosh \omega.$$

Esaminando attentamente le circostanze che permettono questa trasformazione del problema dell'applicabilità, si scorge che esse sussistono più in generale per tutte quelle superficie *di traslazione* il cui $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ è dato dalla formola:

$$(1) \qquad ds^2 = (a_{11}u^2 + 2a_{12}u + a_{22})\,dv^2 \pm$$
$$\pm 2(a_{11}uv + a_{13}u + a_{12}v + a_{23})\,dudv + (a_{11}v^2 + 2a_{13}v + a_{33})\,dv^2,$$

dove le a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ sono costanti arbitrarie, che assoggettiamo soltanto alla condizione di avere il determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

diverso da zero, a fine di escludere il caso ovvio di superficie sviluppabili. In questa forma (1) del ds^2 rientrano in particolare i due paraboloidi reali

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$$

quando si ponga

$$x = \sqrt{p}\,u, \quad y = \sqrt{q}\,v, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 \pm v^2),$$

ed il paraboloide immaginario

$$x = \sqrt{p}\,u, \quad y = \sqrt{q}\,v, \quad z = \frac{i}{2}(u^2 \pm v^2).$$

Per tutte le superficie d'elemento lineare (1) il problema della deformazione si riduce ad equazioni di tipo (*a*), (*b*), (*c*) o di tipo analogo, come dimostrerò nella presente nota. Ma il mio scopo principale è quello di richiamare le ricerche analitiche sulle equazioni di questi tipi da me esposte in una memoria del 1888 (*), per applicarle all'attuale problema geometrico. Per tutte le equazioni di questi tipi si può infatti stabilire una *teoria di trasformazioni* affatto analoga a quella nota per l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \operatorname{sen} \omega \, ,$$

da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante. E come quest'ultima teoria trova la sua interpretazione geometrica nelle trasformazioni delle superficie applicabili sulla sfera (reale od immaginaria), così anche per le superficie d'elemento lineare (1), in particolare per quelle applicabili sui paraboloidi, si può stabilire un'analoga teoria di trasformazioni geometriche, che permette di dedurre da una tale superficie nota infinite nuove della medesima specie.

In questa nota preliminare debbo del resto limitarmi a stabilire il principio fondamentale per queste trasformazioni geometriche, il cui studio richiederà ricerche più accurate e profonde per portarne la teoria al punto che ha ora raggiunto quella delle superficie a curvatura costante.

2. (**) — Per l'elemento lineare (1), ponendo :

$$H = EG - F^2,$$

si ha:

$$(2) \quad H = A_{22}u^2 + A_{33}v^2 + 2A_{23}uv - 2A_{12}u - 2A_{13}v + A_{11} \, ,$$

dove, colle solite notazioni, indichiamo con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante A. Se calcoliamo i valori dei

---

(*) *Sulle forme differenziali quadratiche indefinite* (" Atti dei Lincei ", Serie IV, Vol. V, 1888), vedi particolarmente § I.

(**) Le notazioni usate in questo numero e nei seguenti sono quelle delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, a cui si riferiscono i richiami.

simboli $\left\{ {i\,k \atop l} \right\}$ di Christoffel per la forma quadratica (1), troviamo le formole seguenti (*):

$$(3)\quad \begin{cases} \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \pm \left\{ {22 \atop 1} \right\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log H}{\partial u}, \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \pm \left\{ {11 \atop 2} \right\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log H}{\partial v}, \\ \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0, \end{cases}$$

dove il doppio segno corrisponde al doppio segno nella (1).

Se si prendono ora le equazioni di Codazzi (*Lezioni*, p. 91 (IV)), si vede che si possono soddisfare ponendo:

$$(4)\qquad D = \frac{c}{\sqrt{H}}, \quad D'' = \pm \frac{c}{\sqrt{H}}, \quad D' = 0,$$

indicando con c una costante. Se vogliamo poi soddisfare anche l'equazione di Gauss (*Lezioni*, pag. 90):

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K,$$

dovremo determinare la costante c in guisa che ne risulti soddisfatta la seguente:

$$c^2(a_{11}uv + a_{13}u + a_{12}v + a_{23}) + \frac{H}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

il che dà per la costante c la determinazione:

$$(5)\qquad c^2 = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Secondo che $A > 0$, ovvero $A < 0$, risulterà c reale o puramente immaginaria e la curvatura

$$K = \pm \frac{c^2}{H^2} = \pm \frac{A}{H^2}$$

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 66.

sarà corrispondentemente positiva o negativa nel caso dei segni superiori, ed invece negativa o positiva per i segni inferiori.

Alle due forme quadratiche fondamentali, la prima delle quali è data dalla (1) e la seconda da

$$\frac{c}{\sqrt{H}}(du^2 \pm dv^2),$$

appartiene una superficie S di traslazione sulla quale il sistema (u, v) è quello delle curve coniugate di traslazione. La S è reale nel caso $A>0$, immaginaria quando $A<0$; ed in questo ultimo caso per le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra S possiamo prendere le due prime x, y reali, la terza z puramente immaginaria.

3. — Si consideri ora una qualunque superficie *reale* $\bar{S}$ di elemento lineare (1), e sia:

$$\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D'}\,du\,dv + \overline{D''}\,dv^2$$

la sua seconda forma quadratica fondamentale. Le linee (α, β) che formano il sistema coniugato comune alle due superficie S, $\bar{S}$ sono le linee integrali dell'equazione differenziale:

$$\begin{vmatrix} du\,, & \pm dv \\ \overline{D}du + \overline{D'}\,dv\,, & \overline{D'}\,du + \overline{D''}\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia:

$$\overline{D'}\,du^2 + (\overline{D''} \mp \overline{D})\,du\,dv \mp \overline{D'}\,dv^2 = 0. \tag{6}$$

Questo sistema (α, β) è dunque sempre reale nel caso dei segni superiori. E se valgono gli inferiori, poichè il discriminante della (6) è:

$$(\overline{D''}+\overline{D})^2 - 4\overline{D'}^2 = (\overline{D}-\overline{D''})^2 + 4(\overline{D}\,\overline{D''} - \overline{D'}^2) = (\overline{D}-\overline{D''})^2 - \frac{4A}{H^2}\,,$$

vediamo che il sistema coniugato permanente (α, β) può essere immaginario nel solo caso di $A>0$, cioè quando la curvatura dell'elemento lineare (1) è negativa.

Cominciando dal trattare il caso dei segni superiori, avremo:

$$(4^*) \qquad D = D'' = \frac{c}{\sqrt{H}},$$

e le linee (α, β) saranno reali. Siano:

$$u = u(\alpha, \beta), \qquad v = v(\alpha, \beta)$$

le formole di passaggio dalle coordinate u, v alle α, β; ed indichino $\overline{\left\{ {i\,k \atop l} \right\}}$ i simboli di Christoffel pel ds^2 in coordinate α, β. Siano poi:

$$\Delta d\alpha^2 + \Delta'' d\beta^2$$
$$\overline{\Delta} d\alpha^2 + \overline{\Delta''} d\beta^2$$

le due seconde forme fondamentali di S, $\overline{S}$ rispettivamente, riferite al sistema coniugato comune (α, β). Avendosi:

$$\Delta d\alpha^2 + \Delta'' d\beta^2 = \frac{c}{\sqrt{H}} (du^2 + dv^2),$$

si traggono in primo luogo le formole:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \frac{c}{\sqrt{H}} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 \right\} \\ \Delta'' &= \frac{c}{\sqrt{H}} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

Ora, ricorrendo alle formole fondamentali di Christoffel relative alla equivalenza di due forme differenziali quadratiche (*Lezioni*, pag. 42, formole (I)), ed avendo riguardo alle (3) ed alla (8), abbiamo in particolare le formole:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} &= \overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \overline{\left\{ {12 \atop 2} \right\}} \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} &= \overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \overline{\left\{ {12 \atop 2} \right\}} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \end{aligned} \right.$$

dalle quali, osservando la (8), deduciamo:

$$(9)\qquad \begin{cases} 2\overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}} = \dfrac{\partial}{\partial\beta}\log\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2\right] \\ 2\overline{\left\{ {12 \atop 2} \right\}} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\log\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Prendansi ora le due prime formole di Codazzi relative alla S, $\overline{S}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Delta}{\partial\beta} = \overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}}\Delta - \overline{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}\Delta'' \\ \dfrac{\partial\overline{\Delta}}{\partial\beta} = \overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}}\overline{\Delta} - \overline{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}\overline{\Delta''}\,; \end{cases}$$

e moltiplicando la prima per Δ, la seconda per $\overline{\Delta}$, e sottraendo, col ricordare che $\Delta\Delta'' = \overline{\Delta}\overline{\Delta''}$, se ne trarrà:

$$\frac{\partial(\overline{\Delta}^2 - \Delta^2)}{\partial\beta} = 2\overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}}(\overline{\Delta}^2 - \Delta^2),$$

cioè per la prima delle (9) (*):

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log(\overline{\Delta}^2 - \Delta^2) = \frac{\partial}{\partial\beta}\log\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\right]^2.$$

Di qui integrando abbiamo:

$$\overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \psi(\alpha)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\right],$$

dove $\psi(\alpha)$ è una funzione (non nulla) della sola α. Cangiando il parametro α, possiamo rendere $|\psi(\alpha)| = 1$, e così avremo:

$$\overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \epsilon\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2\right],$$

essendo ϵ l'unità positiva o negativa. Similmente, utilizzando le

(*) Naturalmente escludiamo il caso $\overline{\Delta}^2 = \Delta^2$, ove S, $\overline{S}$ coinciderebbero.

due seconde formole di Codazzi, otterremo una formola analoga per $\overline{\Delta''}$ ed avremo quindi:

$$(10)\qquad \begin{cases} \overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \epsilon\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] \\ \overline{\Delta''}^2 = \Delta''^2 + \epsilon'\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right], \end{cases}$$

con $|\epsilon| = |\epsilon'| = 1$.

Dalla equazione di Gauss

$$\overline{\Delta}\,\overline{\Delta''} = \Delta\Delta''$$

segue ora, per le (10) e per le (7):

$$(11)\qquad \epsilon\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right] + \epsilon'\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] + \epsilon\epsilon'\frac{H}{A} = 0.$$

Inversamente, soddisfatte le (8), (11), i valori di $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta''}$ tratti dalle (10), colla determinazione dei segni che risulta da $\overline{\Delta}\,\overline{\Delta''} = \Delta\Delta''$, soddisfano le equazioni di Codazzi e di Gauss. Ne risulta quindi individuata una superficie $\overline{S}$, applicabile sulla S, ed avente a comune con questa il sistema coniugato (α, β).

Ci resta ora da tener conto delle condizioni che debbono verificarsi affinchè la deformata $\overline{S}$ sia reale, per la qual cosa è necessario e sufficiente che risultino $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta''}$ reali.

4. — Per la indicata discussione dobbiamo separare i due casi:

$$(a)\qquad A > 0, \qquad\qquad A < 0. \qquad (b)$$

1° Caso: $A > 0$. In tal caso bisognerà evidentemente (essendo $H < 0$) che nella (11) abbiano ϵ, ϵ' segni contrarii; e, senza alterare la generalità, potremo supporre:

$$\epsilon = -1, \quad \epsilon' = +1,$$

bastando nel caso contrario scambiare α con β.

Così le equazioni fondamentali pel nostro problema d'applicabilità si scrivono:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}+\dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v}{\partial \beta}=0 \\[2ex] \left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right]-\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right]=\dfrac{H}{A}. \end{cases}$$

Adoperando l'analisi stessa usata dal Dr Calapso pel caso particolare dei paraboloidi, riduciamo il sistema (α) ad un sistema lineare ed omogeneo nel modo seguente. Poniamo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2=\lambda^2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2=\mu^2,$$

indi alla prima delle (α) potremo sostituire, denotando con ω un angolo ausiliario, le seguenti:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}=-\lambda \operatorname{sen}\omega,\quad \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}=\lambda\cos\omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \beta}=\mu\cos\omega,\quad \dfrac{\partial v}{\partial \beta}=\mu\operatorname{sen}\omega. \end{cases}$$

Dalle condizioni d'integrabilità:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \beta}(\lambda\operatorname{sen}\omega)+\dfrac{\partial}{\partial \alpha}(\mu\cos\omega)=0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \beta}(\lambda\cos\omega)-\dfrac{\partial}{\partial \alpha}(\mu\operatorname{sen}\omega)=0 \end{cases}$$

si trae:

$$(13)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}=\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\mu,\qquad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}=-\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\lambda.$$

Ora dalla seconda delle (α):

$$\mu^2-\lambda^2=\frac{H}{A},$$

derivando rapporto ad α, β e ponendo:

$$H_1=\frac{\partial H}{\partial u},\qquad H_2=\frac{\partial H}{\partial v},$$

coll'osservare le (12), (13), deduciamo i valori di $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\mu}{\partial\beta}$. Le formole così ottenute, riunite alle precedenti, dànno luogo al sistema lineare omogeneo seguente per le quattro funzioni incognite u, v, λ, μ di α, β:

$$
(\mathrm{I})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial\alpha} = -\lambda \operatorname{sen}\omega, \quad \frac{\partial v}{\partial\alpha} = \lambda\cos\omega, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{H_1}{2A}\operatorname{sen}\omega - \frac{H_2}{2A}\cos\omega - \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\mu, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\lambda \\
&\frac{\partial u}{\partial\beta} = \mu\cos\omega, \quad \frac{\partial v}{\partial\beta} = \mu\operatorname{sen}\omega, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\mu, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{H_1}{2A}\cos\omega + \frac{H_2}{2A}\operatorname{sen}\omega + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\lambda,
\end{aligned}
\right.
$$

dove ω è riguardata dapprima come funzione nota di α, β. Ora se formiamo le condizioni d'integrabilità del sistema (I), osservando che le derivate seconde di H

$$H_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}, \quad H_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}, \quad H_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}$$

hanno, per la (2), i valori costanti

$$H_{11} = 2A_{22}, \quad H_{12} = 2A_{23}, \quad H_{22} = 2A_{33},$$

troviamo che ω deve unicamente soddisfare la seguente equazione a derivate parziali del 2° ordine:

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \frac{A_{22} - A_{33}}{A}\operatorname{sen}\omega\cos\omega - \frac{A_{23}}{A}\cos 2\omega.$$

Inversamente, se ω è una soluzione di questa, il sistema (I) è illimitatamente integrabile, ed ammette l'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{A}{H} = \text{cost.}$$

Basta dunque scegliere i valori iniziali arbitrarii di u, v, λ, μ in guisa che si annulli la costante del secondo membro, e ne risulterà individuata una superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare (1) dalle formole:

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta''} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}}\lambda\mu,$$

che seguono dalle (10). Di qui vediamo che: *in tutte le deformazioni della nostra superficie* S *il sistema coniugato permanente* (α, β) *è isotermo-coniugato sulla superficie deformata* $\bar{S}$.

In particolare si osservi che pel paraboloide ellittico:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

posto:

$$x = \sqrt{p}\,u, \quad y = \sqrt{q}\,v, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

si ha:

$$ds^2 = (u^2 + p)du^2 + 2uv\,du\,dv + (v^2 + q)dv^2$$

e la (I*) diventa:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial^2\beta} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \operatorname{sen}\omega \cos\omega.$$

Se $p = q$ il paraboloide è di rotazione e la ricerca delle superficie applicabili si riduce, come del resto è ben noto, alla equazione $\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = 0$ (*Lezioni*, pag. 310-313).

2° *Caso:* $A < 0$. Qui, essendo per le (7) Δ, Δ'' puramente immaginarii, dobbiamo fare, a causa delle (10), $\epsilon = +1$, $\epsilon' = +1$, e ponendo $A = -a^2$, resta quindi la relazione:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{H}{a^2}.$$

Procedendo come sopra, troviamo il sistema completo seguente:

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial\alpha} = -\lambda \operatorname{sen}\omega, \ \frac{\partial v}{\partial\alpha} = \lambda\cos\omega, \ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = -\frac{H_1}{2a^2}\operatorname{sen}\omega + \frac{H_2}{2a^2}\cos\omega + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\mu, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\lambda \\ &\frac{\partial u}{\partial\beta} = \mu\cos\omega, \quad \frac{\partial v}{\partial\beta} = \mu\operatorname{sen}\omega, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\mu, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{H_1}{2a^2}\cos\omega + \frac{H_2}{2a^2}\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\mu, \end{aligned} \right.$$

colla condizione d'integrabilità data dall'equazione a derivate parziali per ω:

$$(\mathrm{II}^*) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \frac{A_{22} - A_{33}}{A} \operatorname{sen}\omega \cos\omega - \frac{A_{23}}{A} \cos 2\omega.$$

Questa si riduce evidentemente all'equazione stessa da cui dipende la ricerca delle superficie pseudosferiche.

In particolare per il paraboloide immaginario:

$$x = \sqrt{p}\,u, \quad y = \sqrt{q}\,v, \quad z = \frac{i}{2}(u^2 + v^2)$$

si ha:

$$ds^2 = (p - u^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (q - v^2)dv^2$$

e la (II*) diventa:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \operatorname{sen}\omega \cos\omega.$$

Osserviamo che se $p = q$ questa si integra completamente e se si fa, come è lecito, $p = q = 1$, il ds^2 ponendo $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\operatorname{sen}\theta$, prende la nota forma:

$$ds^2 = (1 - \rho^2)d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

delle superficie evolute di quelle di Weingarten per le quali:

$$r_2 - r_1 = \operatorname{sen}(r_2 + r_1),$$

(cfr. *Lezioni,* pag. 309).

5. — Esaurita così la trattazione del caso in cui si assumano nelle nostre formole i segni superiori, passiamo a trattare quello corrispondente ai segni inferiori, cioè alla ricerca delle superficie d'elemento lineare:

$$ds^2 = (a_{11}du^2 + 2a_{12}u + a_{22})du^2 - 2(a_{11}uv + a_{13}u + a_{12}v + a_{23})du\,dv + \\ + (a_{11}v^2 + 2a_{13}v + a_{33})dv^2.$$

Allora abbiamo:

$$D = \frac{c}{\sqrt{H}}, \quad D'' = -\frac{c}{\sqrt{H}},$$

ed essendo:

$$\Delta d\alpha^2 + \Delta'' d\beta^2 = \frac{c}{\sqrt{H}}(du^2 - dv^2),$$

ne deduciamo le formole:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= \frac{c}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] \\ \Delta'' &= \frac{c}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Procedendo come al n° 3, si trovano ora le formole:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\Delta}^2 &= \Delta^2 + \epsilon\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] \\ \overline{\Delta''}^2 &= \Delta''^2 + \epsilon'\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right], \end{aligned}\right. \tag{16}$$

e l'altra:

$$\epsilon\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right] + \epsilon'\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] + \epsilon\epsilon'\frac{H}{A} = 0. \tag{17}$$

Cominciamo dal trattare nel presente numero il caso di un sistema coniugato permanente (α, β) *reale*. Per avere riguardo alle condizioni di realità della deformazione, conviene osservare. che, a causa della (14), i due binomii:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2$$

hanno segno opposto. Possiamo evidentemente supporre che il primo sia positivo, negativo il secondo, e poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 &= \lambda^2 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 &= \mu^2, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

dopo di che le (16) diventano:

$$\overline{\Delta}^2 = \lambda^2\left[\frac{A}{H}\lambda^2 + \epsilon\right], \quad \overline{\Delta''}^2 = \mu^2\left[\frac{A}{H}\mu^2 - \epsilon'\right],$$

e la (17):

$$\epsilon'\lambda^2 - \epsilon\mu^2 + \epsilon\epsilon' \frac{H}{A} = 0, \tag{17*}$$

onde le precedenti si scrivono:

$$\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta''}^2 = \epsilon\epsilon' \frac{A}{H}\lambda^2\mu^2. \tag{16*}$$

L'ulteriore discussione porta nuovamente a distinguere due casi, a seconda del segno di A.

1° Caso: $A>0$. Allora, per le (16*), dovranno essere ϵ, ϵ' concordanti, e si potrà fare:

$$\epsilon = +1, \qquad \epsilon' = +1.$$

Dopo ciò la (17*) si scrive:

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{A}$$

e, con un processo analogo a quello del n° precedente, troviamo il sistema completo seguente:

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \lambda \cosh\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda \operatorname{senh}\theta, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = -\frac{H_1}{2A}\cosh\theta - \frac{H_2}{A}\operatorname{senh}\theta + \frac{\partial\theta}{\partial\beta}\mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial\beta}\lambda \\ &\frac{\partial u}{\partial\beta} = \mu\operatorname{senh}\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial\beta} = \mu\cosh\theta, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\mu, \\ &\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{H_1}{2A}\operatorname{senh}\theta + \frac{H_2}{2A}\cosh\theta + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\lambda, \end{aligned} \right.$$

colla condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} = \frac{A_{22}+A_{33}}{A}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + \frac{A_{23}}{A}\cosh 2\theta. \tag{III*}$$

Si osservi che nel caso del paraboloide iperbolico:

$$x = \sqrt{p}\,u, \quad y = \sqrt{q}\,v, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

coll'elemento lineare:

$$ds^2 = (u^2+p)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + (v^2+q)\,dv^2,$$

la (III*) diventa:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,$$

e prendendo per variabili indipendenti $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ assume la forma *b)* n° 1.

2° *Caso:* $A<0$. A causa delle (16*), (17*) bisogna prendere:

$$\epsilon=+1, \qquad \epsilon'=-1,$$

e, posto $A=-a^2$, si avrà:

$$\lambda^2+\mu^2=\frac{H}{a^2}.$$

In questo caso troviamo il sistema completo:

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\lambda\cosh\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial\alpha}=\lambda\operatorname{senh}\theta,\\ &\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}=\frac{H_1}{2a^2}\cosh\theta+\frac{H_2}{2a^2}\operatorname{senh}\theta-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}=\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\lambda\\ &\frac{\partial u}{\partial\beta}=\mu\operatorname{senh}\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial\beta}=\mu\cosh\theta, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}=\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\mu,\\ &\frac{\partial\mu}{\partial\beta}=\frac{H_1}{2a^2}\operatorname{senh}\theta+\frac{H_2}{2a^2}\cosh\theta-\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\lambda \end{aligned}\right.$$

colla condizione d'integrabilità per θ:

$$\text{(IV*)}\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}=\frac{A_{22}+A_{33}}{a^2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta+\frac{A_{23}}{a^2}\cosh 2\theta.$$

Notevole nelle equazioni (III*), (IV*) è il caso in cui:

$$A_{22}+A_{33}=\pm 2A_{23};$$

allora esse si riducono alla nota formola di Liouville e si integrano completamente.

6. — Veniamo da ultimo a trattare delle deformazioni di seconda specie, le quali possono presentarsi soltanto (n° 3) nel caso dei segni inferiori con $A>0$ (curvatura negativa).

Il sistema coniugato permanente (α,β) essendo allora imma-

ginario, mentre la deformazione è per ipotesi *reale*, potremo assumere i parametri α, β coniugati immaginarii e porre:

$$\alpha = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \beta = \alpha_1 - i\beta_1,$$

con che i parametri reali α_1, β_1 verranno ad essere quelli delle linee assintotiche sopra $\overline{S}$.

Posto:

$$\Omega = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2, \quad \Omega = \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2.$$

saranno Ω, Ω immaginarie coniugate e la (17) diventerà:

$$\epsilon'\Omega + \epsilon\overline{\Omega} + \epsilon\epsilon'\frac{H}{A} = 0, \tag{20}$$

indi le (16):

$$\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta''}^2 = -\epsilon\epsilon'\frac{A}{H}\,\Omega.\overline{\Omega}. \tag{21}$$

Ma si ha:

$$\overline{\Delta}d\alpha^2 + \overline{\Delta''}d\beta^2 = (\overline{\Delta} + \overline{\Delta''})d\alpha_1^2 + 2i(\overline{\Delta} - \overline{\Delta''})d\alpha_1 d\beta_1 - (\overline{\Delta} + \overline{\Delta''})d\beta_1^2,$$

e dovendo risultare:

$$\overline{\Delta} + \overline{\Delta''}, \qquad i(\overline{\Delta} - \overline{\Delta''})$$

reali, saranno $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta''}$ puramente immaginarii coniugati, indi $\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta''}^2$ reale negativa. Le (21), essendo Ω, $\overline{\Omega}$ coniugate ed $A > 0$, $H > 0$, dimostrano che ϵ, ϵ' debbono avere segno contrario, e possiamo fare:

$$\epsilon = -1, \qquad \epsilon' = +1;$$

così la (20) diventa:

$$\Omega + \overline{\Omega} = \frac{H}{A}. \tag{22}$$

D'altronde la

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}$$

ci dà:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta_1}\right)^2$$

e la (22):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)^2 = \frac{2H}{A},$$

onde si trae:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)^2 = \frac{H}{A} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta_1}\right)^2 = -\frac{H}{A}. \end{cases}$$

Ponendo ora:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = e^{\theta}\lambda + e^{-\theta}\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = e^{\theta}\lambda - e^{-\theta}\mu \\ \frac{\partial u}{\partial \beta_1} = e^{\theta}\mu - e^{-\theta}\lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta_1} = e^{\theta}\mu + e^{-\theta}\lambda, \end{cases}$$

la relazione fra λ, μ diventa:

$$\lambda\mu = \frac{H}{4A}.$$

Derivando questa e le precedenti rapporto ad α_1, β_1 e confrontando, ne deduciamo il sistema completo:

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = e^{\theta}\lambda + e^{-\theta}\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = e^{\theta}\lambda - e^{-\theta}\mu, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} = \frac{H_1 - H_2}{4A} e^{-\theta} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \frac{H_1 + H_2}{4A} e^{\theta} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\mu \\ \frac{\partial u}{\partial \beta_1} = e^{\theta}\mu - e^{-\theta}\lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta_1} = e^{\theta}\mu + e^{-\theta}\lambda, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \beta_1} = \frac{H_1 + H_2}{4A} e^{\theta} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta_1}\lambda, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} = -\frac{H_1 - H_2}{4A} e^{-\theta} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta_1}\mu, \end{cases}$$

colla condizione d'integrabilità:

$$(\mathrm{V}^*) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} = \frac{A_{22} + A_{33} + 2A_{23}}{4A} e^{2\theta} + \frac{A_{22} + A_{33} - 2A_{23}}{4A} e^{-2\theta}.$$

Nel caso del paraboloide iperbolico essa diventa:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\cosh 2\theta,$$

che ha appunto la forma *c*) n° 1.

Si osserverà anche qui, come al n° precedente, che se è soddisfatta la condizione:

$$A_{22} + A_{33} = \pm 2A_{23},$$

la (V*) si riduce alla forma di Liouville e si integra completamente.

7. — Passiamo ora alla seconda parte della ricerca, a stabilire i principii per una teoria delle trasformazioni delle superficie d'elemento lineare (1). Fisseremo l'attenzione sul caso particolare più interessante del paraboloide ellittico od iperbolico. Sostituendo al paraboloide ellittico un conveniente paraboloide simile $\left(\text{con } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1\right)$ potremo ridurre l'equazione (I*) n° 4, da cui dipende la ricerca delle sue deformazioni, alla forma:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega.$$

Conviene associare alla considerazione della (VI) quella dell'altra equazione:

$$\text{(VI*)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta,$$

la quale, secondo la (IV*) n° 5, appartiene come equazione dell'applicabilità, ad una classe di superficie d'elemento lineare (1), p. e. a quelle per le quali:

$$\text{(23)} \qquad ds^2 = (u^2 + 1)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + \left(v^2 - \frac{1}{2}\right) dv^2.$$

Ora fra le soluzioni ω, θ delle (VI), (VI*) può stabilirsi una semplice relazione contenuta nel sistema di formole:

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} = \cos\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta \\[2ex] \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \operatorname{sen}\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta + \cos\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta, \end{cases}$$

dove σ indica una costante arbitraria. Supposto infatti che θ sia una soluzione della (VI*), le (24) costituiscono per ω un sistema illimitatamente integrabile, e l'integrale generale ω, contenente

un'altra costante arbitraria oltre σ, è una soluzione della (VI). Inversamente se ω è una soluzione della (VI), l'integrale generale θ delle (24) soddisfa la (VI*).

A queste equazioni ai differenziali totali per ω (o per θ) si può dare la forma di un'equazione del tipo di Riccati per l'incognita $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ $\left(\text{o } \operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta\right)$; dopo di ciò, conosciutone un integrale particolare, se ne avrà il generale con quadrature.

Sussiste ancora per le equazioni (24) un *teorema di permutabilità* (*Lezioni*, pag. 435 e seg[i]), mediante il quale, se per una data soluzione θ della (VI*) sappiamo integrare completamente le (24), per qualunque valore della costante σ, l'applicazione successiva del metodo di trasformazione non richiederà più alcuna quadratura. È ora evidente come questi risultati analitici trovano un'interpretazione geometrica nel problema d'applicabilità che qui ci occupa. Nota p. e. una superficie applicabile sul paraboloide ellittico, conosceremo ω in funzione di α, β, e dalle (24), integrando, avremo θ, che ci determinerà così infinite superficie d'elemento lineare (23). Da ciascuna di queste, integrando le corrispondenti equazioni (24) in ω, dedurremo infinite superficie applicabili sul paraboloide e così di seguito.

8. — Veniamo in fine al paraboloide iperbolico, le cui deformazioni di prima specie dipendono, come si è visto, dall'equazione:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} = \operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,;$$

quelle di seconda specie dall'altra:

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = \cosh 2\omega.$$

Anche in questi due casi possiamo stabilire un sistema di formole di trasformazione come le (24), ma questa volta in modo che da una soluzione θ della (VII) si passa ad un'altra soluzione θ_1 della stessa (VII), e similmente da una soluzione ω della (VIII) ad un'altra tale soluzione ω_1.

Le formole corrispondenti, di costruzione e proprietà analoghe alle (24), possono assumersi date per la (VII) da:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1}{\cos\sigma} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1}{\cos\sigma}, \end{cases}$$

indicando σ una costante arbitraria; per la (VIII) invece da:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial\alpha} = 2a\operatorname{senh}(\omega_1 - \omega) \\[2ex] \dfrac{(\partial\omega_1 - \omega)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{a}\cosh(\omega_1 + \omega), \end{cases}$$

essendo qui a costante arbitraria.

L'interpretazione geometrica è chiaramente la seguente. Ogni deformazione del paraboloide iperbolico, sia la deformazione di prima ovvero di seconda specie, ne determina infinite altre della medesima specie, dipendenti da costanti arbitrarie.

Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidea.

Nota del Socio CORRADO SEGRE.

1. — L'opera del SACCHERI " *Euclides ab omni naevo vindicatus*, etc. ", pubblicata a Milano nel 1733, è ora universalmente apprezzata, dopo che E. BELTRAMI ebbe richiamata l'attenzione degli scienziati su di essa, facendone un'accurata analisi, e giustamente proclamando l'autore " *un precursore di* LEGENDRE *e di* LOBATSCHEWSKY " (*); e dopo che dell'opera stessa venne data una traduzione inglese da G. B. HALSTED (**), ed una tedesca da F. ENGEL e P. STÄCKEL in un volume di grandissima importanza (***). Tutti riconoscono ormai che con essa ha veramente principio la geometria non-euclidea: poichè in essa per la prima volta viene svolta una lunga serie di proposizioni, che hanno luogo, se si nega il postulato 5° d'Euclide. E sebbene le ultime pagine, che intendono dimostrare l'assurdità della *ipotesi dell'angolo acuto*, siano errate, pure le prime 70 pag^e^ (tolte poche frasi isolate), fino alla prop. 32 inclusa, costituiscono un insieme di logica e di acume geometrico che può dirsi *perfetto*. Agli elogi che già ne furon fatti da tanti scrittori non occorre qui aggiunger altro! (+).

(*) Rendic.^i^ R. Accad. Lincei (4) 5, 1889.

(**) The American Mathematical Monthly, 1894 e seg^i^.

(***) *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig 1895. — Nel seguito questo volume, arricchito dallo STÄCKEL con una gran copia di notizie storiche e critiche, alle quali dovremo attingere continuamente, sarà indicato per brevità con *P. Th.*

(+) In varie note della *P. Th.* è rilevato come il SACCHERI adoperi il *teorema dell'angolo esterno* di un triangolo (Euclide, lib. 1°, prop. 16), e quindi il postulato della retta infinita, anche quando tratta l'*ipotesi dell'angolo ottuso*. Ciò spiega come poi il SACCHERI giunga alla conclusione che questa ipotesi è assurda: allo stesso modo come, molto tempo dopo, LEGENDRE dimostrava, ammettendo il postulato della retta infinita, un fatto equiva-

Il sig. STÄCKEL nella *P. Th.* p. 38-39 osservava — e ricerche posteriori hanno vieppiù confermato — che il libro del SACCHERI è stato, subito dopo la sua pubblicazione, abbastanza diffuso. Lo si trovava in molte biblioteche, italiane e straniere; e si leggeva il suo titolo in varie altre opere del sec. 18° e della 1ª metà del 19°, sebbene con giudizî quasi sempre superficiali od ingiusti (i tempi erano tutt'altro che maturi per apprezzare le ricerche non-euclidee!). Malgrado quella diffusione, vi è oggidì, nelle pubblicazioni relative alla storia della geometria non-euclidea, una certa tendenza, che non mi pare pienamente giustificata, a negare ogni influenza di quel libro sulla costituzione definitiva della geometria non-euclidea. Così F. ENGEL nel suo lavoro su LOBATSCHEFSKIJ (*), meraviglioso per l'accuratezza e per le fatiche ad esso dedicate, a pag. 377 scrive:

" *Allerdings müssen wir gleich hinzufügen, dass* SACCHERI'*s und* LAMBERT'*s Arbeiten sehr bald in Vergessenheit geriethen und erst vor wenigen Jahren wieder entdeckt worden sind, sie scheinen daher auf keinen der spätern Entdecker der nichteuklidischen Geometrie Einfluss ausgeübt zu haben. Höchstens bei* GAUSS *ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass er das Buch von* SACCHERI *oder wenigstens die Abhandlung von* LAMBERT *gekannt hat, doch wissen wir darüber gar nichts* (**). TAURINUS *hatte zwar aus* CAMERER'*s Ausgabe der Euklidischen Elemente ersehen, dass* SACCHERI *und* LAMBERT *Untersuchungen über die Parallelentheorie angestellt hatten, aber diese Untersuchungen selbst kannte er jedenfalls zu der Zeit nicht, wo er seine* " *Geometriae prima Elementa* „ *schrieb; ähnlich*

---

lente alla detta conclusione, cioè che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti. Le accennate note della *P. Th.*, per es° a pag. 52 e 62, non vanno intese nel senso che i ragionamenti del dotto gesuita italiano pel caso della anzi detta ipotesi siano insufficienti o sbagliati! Essi ricorrono ad un postulato, *che non occorreva* per giungere a talune di quelle proposizioni, e che poi si rivela in contraddizione coll'ipotesi stessa. Ma ciò nondimeno son ragionamenti pienamente esatti!

(*) N. I. LOBATSCHEFSKIJ, *Zwei geometrische Abhandlungen*, Leipzig 1899.

(**) Su ciò si può ora dire qualcosa di più preciso: GAUSS ha *certamente* conosciuto l'esistenza delle ricerche di SACCHERI e di LAMBERT; poichè fra i libri da lui posseduti e annotati se n'è trovato uno (di LEHMANN, del 1829), nel quale si parla con lode speciale di quelle ricerche. V. STÄCKEL, *Franz Adolph Taurinus*, Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik, t. 9, 1899, p. 399: v. pag. 427.

wird es sich mit SCHWEIKART *verhalten haben.* LOBATSCHEFSKIJ *und* J. BOLYAI *endlich haben* SACCHERI *schwerlich jemals auch nur dem Namen nach gekannt, und von* LAMBERT'S *Parallelentheorie haben sie vermuthlich ebensowenig etwas erfahren* „.

Ora sulla parte principale di queste asserzioni mi pare si possano avere dei dubbi. Le congetture che si posson ragionevolmente fare condurrebbero a modificarle alquanto, attribuendo all'opera del SACCHERI una sensibile influenza, diretta od indiretta, sui posteriori scopritori della geometria non-euclidea. Esse portano ad augurare che, per decidere la questione, sian fatte delle ulteriori ricerche *locali*, nei manoscritti lasciati da quegli scienziati e fra i volumi che essi ebbero modo di consultare!

2. — Una congettura che non parrà avventata è questa: che coloro, i quali nel campo delle parallele tentarono vie assolutamente nuove, abbian cercato, prima di esporsi al giudizio del pubblico, di conoscere quanto di più importante s'era fatto per dimostrare il postulato V! A tal fine un mezzo che si presentava spontaneo consisteva nel consultare una storia delle matematiche. Orbene vi erano (come pure è detto nella *P. Th.*) due tali storie, ben note ed apprezzate, nelle quali l'opera Saccheriana era nominata tra gli scritti su EUCLIDE: la *Historia matheseos* di J. C. HEILBRONNER publicata a Leipzig nel 1742; e il 1° vol. della *Histoire des mathématiques* di J. E. MONTUCLA publicato a Parigi nel 1758, e ivi ristampato in edizione accresciuta nel 1799. In questa *Histoire* (*), parlando di coloro che si occuparono di dimostrare l'assioma 11° d'EUCLIDE, MONTUCLA nominava soltanto cinque autori (**), e poi citava l' opera del P. SACCHERI. Come ho ricordato, la *Histoire* era molto diffusa. Il MONTUCLA era molto stimato, in Francia e fuori (***). Per mezzo di questa Storia l'indicazione dell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* dev'esser passata sotto gli occhi di molti e molti! È egli probabile che, per esempio, LEGENDRE non abbia letto quelle

(*) 1ª ed. pag. 222; 2ª ed. pag. 209-210.

(**) TOLOMEO, PROCLO, NASSIREDDIN, CLAVIUS e WALLIS.

(***) Era stato nominato membro dell'Accademia di Berlino nel 1755, e poi dell'*Institut*, appena questo fu fondato. V. Biographie universelle, t. 30, Paris 1821, pag. 44-45.

pagine, e che, occupandosi, come fece così a lungo, dal 1794 fino alla morte (1833), di dimostrare il post. V, non abbia tentato di conoscere quei pochi Autori citati dal MONTUCLA? Converrebbe che *a Parigi* si facessero delle ricerche per stabilire se LEGENDRE conobbe l'opera del SACCHERI! (*).

3. — Un altro scritto, di cui si fa cenno nella *P. Th.*, e *che può aver contribuito moltissimo a far conoscere quello Saccheriano, o almeno a divulgarne alcuni risultati essenziali,* è la dissertazione di G. S. KLÜGEL " *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* „ (Gottinga, 1763) (**). In quest'opuscolo, che ha 30 pagine di testo, vengono analizzati poco meno che altrettanti lavori sulle parallele: ma l'analisi più lunga (di quasi 5 pag.^{e}) è quella dell'opera del SACCHERI!

Da prima enuncia brevemente il contenuto della prop. 1 e delle prop. 5, 6, 7 relative alla distinzione delle tre ipotesi dell'angolo retto, ottuso, acuto; e spiega come, colle prop.^{i} 11 e 12, si giunga a dedurre dalle prime due ipotesi la validità del post. V, e quindi che l'ipotesi dell'angolo ottuso distrugge sè stessa.

Riguardo alle numerose proposizioni seguenti, per l'ipotesi dell'angolo acuto, il KLÜGEL fa varie critiche, non tutte giuste (***). Ma — ciò che più importa! — egli rileva ancora chiaramente:

(*) Si sa che dai tentativi di LEGENDRE due teoremi risultarono dimostrati, i quali poi divennero notissimi, prendendo posto in molti trattati di geometria. Ma fu poi rilevato, per esempio nella Nota del BELTRAMI, e nella *P. Th.*, che essi erano già pienamente stabiliti nel libro del SACCHERI. Dopo ciò, non sembra giusto che quei due teoremi siano chiamati " *teoremi di* LEGENDRE „, come ancora si fa da taluni, ad es° da M. DEHN nell'importante scritto " *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* „, Math. Annalen 53, 1900.

(**) L'esemplare da me consultato appartiene alla Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma, e proviene dalla Biblioteca privata di M. CHASLES.

(***) Già in principio della sua analisi era detto così: " *Facile vero est ad iudicandum, fieri non posse, quin humani aliquid patiatur, qui in demonstrando theoremate, quod notioni communi aequiparandum est, tantis ambagibus utitur, ut demonstratio plus quam 100 paginas impleat* „. E qui, a proposito delle proposizioni relative all'ipotesi dell'angolo acuto: " *In his plura superflua reperiuntur, omnia vero longe absunt ab ea elegantia, quae in demonstrationibus geometricis recte requiritur, cuiusque exempla optima veteres dederunt Geometrae* „. Etc.

la prop. 23, la quale, nell'ipotesi dell'angolo acuto, stabilisce che tre casi posson presentare due rette complanari, cioè o ammettono una perpendicolare comune, o s'incontrano, oppure in un determinato verso si avvicinano sempre più; la prop. 25, da cui deriva che in questo 3° caso la distanza fra le due rette [*parallele!*] diventa minore di qualsiasi lunghezza assegnata; infine la prop. 28, che, al diminuir di quella distanza, l'angolo acuto che essa fa colla retta da cui è calata [*angolo di parallelismo!*] cresce continuamente tendendo a un angolo retto. —

Ognun vede che, se anche queste citazioni fatte dal Klügel sono lungi dal rappresentare tutta la copia di risultati del Saccheri, pure costituiscono già, da sè, una solida base per la geometria non euclidea! Un ingegno potente, che, a quei tempi, si fosse messo a lavorare intorno al *vecchio enigma* delle parallele, leggendo le proposizioni citate poteva ben trovare in esse (se pur non ricorreva alla fonte prima, al libro di Saccheri) un forte ajuto per costruire la nuova dottrina! —

Molti anni dopo (1808) il Klügel ebbe occasione di ritornare su quest'argomento nell'articolo relativo alle *parallele* del suo *Mathematisches Wörterbuch* (*). Ivi è di nuovo citata la sua dissertazione, e ad essa si rimanda (pag. 739) per l'estratto relativo al libro del Saccheri (**).

4. — La dissertazione di Klügel si trova pure citata e lodata nella *Theorie der Parallellinien* che J. H. Lambert scrisse

---

(*) 3er Theil, pag. 727; publicato a Leipzig.

(**) In quell'artº, a pag. 730-731, vi è un cenno contro la possibilità delle parallele non-euclidee (le quali, secondo Klügel, dovrebbero riescire in pari tempo secanti e non-secanti!), che prova come il Klügel non avesse ben capito quell'importante concetto del Saccheri.

Ivi è pure citato (p. 739) un opuscolo del 1787 di " Franceschini „, e questo stesso nome si ritrova nella *P. Th.* pag. 214 e 300. Si deve leggere invece " Franceschinis „.

Un altro matematico italiano, G. M. Pagnini — che in una " *Theoria rectarum parallelarum* etc. (auctore J. M. P. C. P.) „ publicata a Parma nel 1783, e poi in una supplementare " *Epistola ad... H. C. Saladinum* „ (Parma 1794), ha dato parecchie pseudodimostrazioni del post. V, — parla nella *Epistola* (pag. 6 e 7) dell'opera del Saccheri, enuncia la distinzione che questi fa delle tre ipotesi e come distrugga quella dell'angolo ottuso, maravigliando poi che impieghi 80 pagᵉ a rigettare l'ipotesi dell'angolo acuto!

(pare) nel 1766, ma non publicò mai, probabilmente perchè egli stesso non ne era soddisfatto (*). Oggidì è usanza di metterla insieme coll'opera del SACCHERI, quasi che fosse indipendente da questa: allo stesso modo, pare, come si mettono insieme LOBATSCHEFSKIJ e BOLYAI! Così si suol dire che " SACCHERI e LAMBERT avevan riconosciuto la possibilità di 3 ipotesi „ (**). A me sembra che ciò non sia giusto: poichè LAMBERT aveva appreso dal *Conatuum* di KLÜGEL i teoremi del SACCHERI più sopra ricordati! Anzi: è probabile — come già avvertì, fra altri, M. SIMON — che il matematico svizzero abbia anche preso conoscenza diretta dell'opera del dotto italiano (***). Ora nelle prime due parti del lavoro di LAMBERT non vi è nulla di essenziale; importante sarebbe solo la 3ª, e questa procede in modo molto affine al libro di SACCHERI. Vi è la stessa distinzione delle tre ipotesi, e la trattazione di queste procede molto analogamente a quella di SACCHERI. Alcuni ragionamenti sono simili; in qualche questione LAMBERT ottiene qualcosa di più; ma varie proposizioni importanti che si trovano in quello mancano in questo. Chiunque si provi ad esporre, nell'ordine storico, la geometria non-euclidea, dopo che avrà esposto i principali teoremi del SACCHERI troverà in LAMBERT poco da aggiungere! (+).

(*) LAMBERT morì nel 1777. Quel suo lavoro fu poi stampato nel 1786 nel *Magazin für die reine und angewandte Mathematik* di J. BERNOULLI e C. F. HINDENBURG; e riprodotto da STÄCKEL ed ENGEL nella *P. Th.*

(**) V. ad es° S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3er Abschnitt, Leipzig 1893, pag. x.

(***) MAX SIMON, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher* (Abhandlungen zur Geschichte der Math., t. 11, 1901), pag. 36: " *Aber* LAMBERT *wurde durch* KLÜGEL *wieder an die Parallelentheorie erinnert, bei* KLÜGEL *ist* SACCHERI *besprochen; das Werk* SACCHERI'*s war schon durch seine Stellung im Orden ein verbreitetes; es ist eigentlich stets erwähnt worden,...* LAMBERT *lebte in Chur in engstem Zusammenhang mit der gelehrten Welt Churs, wo er den eigentlichen Grund zu seiner wissenschaftlichen Bedeutung gelegt hat; es wäre sehr unwahrscheinlich, dass in dieser speziell von jesuitischer Gelehrsamkeit durchtränkten Atmosphäre den* SACCHERI *nicht kennen gelernt hätte* „.

Lo STÄCKEL nella *P. Th.* p. 143 aveva espresso l'opposto parere, senza giustificarlo.

(+) Con ciò non intendo scemare il merito di LAMBERT, per quanto riguarda le intuizioni geniali rilevate dallo STÄCKEL nella *P. Th.* pag. 145. Piuttosto mi permetto di aggiungere che forse qualcuno dei raffronti fatti

5. — Sebbene il Klügel poco abbia prodotto di originale, pure ai suoi tempi passava per uno dei maggiori matematici viventi (*). Dal 1760 al 1765 aveva studiato all' Università di Gottinga; e l'influenza di A. G. Kaestner (1719—1800) lo aveva spinto a dedicarsi agli studî matematici; e sotto la guida del Kaestner stesso aveva composto la sua dissertazione. Poi era divenuto professore nelle Università di Helmstedt e Halle, membro delle Accademie di Pietroburgo, Berlino, Gottinga e Francoforte.

Tanto la dissertazione quanto il vocabolario matematico dovettero diffondersi molto, specialmente in Germania, e venir consultati da coloro che si occupavano della teoria delle parallele: la quale a quei tempi, e poi per tutta la 1ª metà del secolo 19°, era, per così dire, all'ordine del giorno in tutto il mondo scientifico (**).

A Gottinga in particolare il ricordo del *Conatuum* di Klügel sarà durato a lungo. Il Kaestner insegnò ivi fino alla morte, ed era insegnante efficacissimo. Egli s'era sempre interessato in modo speciale alla teoria delle parallele; anzi era stato lui, coi suoi scritti e colle sue lezioni, a risvegliare in Germania l'interesse per quell'argomento (***); ed aveva raccolto nella sua

---

a p. 144 della *P. Th.* fra Saccheri e Lambert è favorevole a questo ultimo più del necessario. Così non mi pare esatto che la trattazione di Lambert dell'ipotesi dell'angolo ottuso sia " almeno in parte indipendente dal *teorema dell'angolo esterno* „. Mi sembra invece che, già al principio di quella trattazione, cioè nel § 53 che è fondamentale per tutto il seguito, si ammetta tacitamente quel teorema!

Nel § 57 di Lambert occorre una rettifica. Egli dovrebbe dimostrare che sono incompatibili le due disuguaglianze $AB > EF$, $GH > EF$; e invece pone subito, insieme con queste, la ipotesi non giustificata $AB > GH$ (colla quale si potrebbe procedere più semplicemente che là non sia fatto: poichè da quelle tre disuguaglianze ne seguono rispettivamente altre tre fra gli angoli in B, F, H, le quali risultan subito incompatibili), senz' avvertire che il suo ragionamento si applica anche nell'ipotesi contraria.

(*) Allgemeine Deutsche Biographie, Bd. 16, Leipzig 1882, pag. 253.

(**) *P. Th.*, pag. 147 e 211.

(***) *P. Th.*, pag. 139 " ... *und zwar war es* A. G. Kaestner, *der die Wichtigkeit der Untersuchungen über die fünfte Forderung erkannte, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen Gegenstand lenkte und damit eine Bewegung einleitete, die erst in diesem Jahrhunderte ihren Abschluss gefunden hat.* „

biblioteca quasi tutto ciò che intorno ad esso era stato publicato fin verso il 1770 (*). Inoltre vi era a Gottinga, dal 1789 al 1804, un altro ottimo conoscitore delle ricerche sulla teoria delle parallele: K. F. Seyffer (1762—1822), professore di astronomia e direttore dell' osservatorio astronomico (**). Se, verso la fine del secolo 18°, un giovane intelligente che studiasse in quell'Università veniva a parlare di quella teoria col Kaestner o col Seyffer, niun dubbio che costoro gli avrebbero subito indicato il lavoro di Klügel, come pure quello, da poco comparso, di Lambert! (***). E se pure nè l' un professore nè l'altro non indicava anche allo studente il libro del Saccheri, la dissertazione di Klügel poteva servire per dare quell'indicazione: ed il giovane poteva poi consultare quel libro nella biblioteca universitaria!

6. — Queste considerazioni si possono applicare anzitutto a Gauss ed a Wolfango Bolyai, i quali studiarono appunto nell'Università di Gottinga, il 1° dal 1795 al 1798, l'altro dal 1796 al 1799. È notissimo che essi strinsero colà una profonda amicizia; e che entrambi in quegli anni si occuparono delle parallele (+). I sig.i Stäckel ed Engel (nel lavoro ora citato in nota) rilevano appunto la spinta che a W. Bolyai può esser stata data per occuparsi di ciò, più che dal vecchio Kaestner, dal giovane professore Seyffer, con cui Bolyai aveva relazioni amichevoli. La stessa cosa vale per Gauss. Gli studî astronomici e geodetici di questo dovevan metterlo in speciale relazione col Seyffer. E del resto, secondo narra Giovanni Bolyai (++),

(*) *P. Th.*, pag. 140.

(**) *P. Th.*, pag. 214-215.

(***) È forse superfluo avvertire che nella biblioteca di Gottinga si trovava sia la dissertaz. di Klügel, sia (man mano che usciva) il *Magazin* in cui comparve la *Theorie* di Lambert (il Simon, loc. cit., chiama quel *Magazin* " *das angesehenste deutsche wissenschaftliche Journal der Zeit* „). — Quanto all'opera del Saccheri, già in *P. Th.*, pag. 38, è detto che essa si trovava in quella biblioteca fin dal 1770.

(+) V. per es. Stäckel-Engel: *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie*, Math. Ann. 49 (1897), pag. 149.

(++) Stäckel, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*. Math. und naturw. Berichte aus Ungarn 17 (1901); v. a pag. 10.

suo padre e GAUSS si conobbero appunto in casa di SEYFFER, e poco dopo presero a parlare insieme dell'assioma 11°. — Quindi è naturale il supporre che in quegli anni i due valorosi studenti abbian conosciuto le cose del SACCHERI, in tutto od in parte! (*).

Quanto a W. BOLYAI in particolare, si potrebbe dedurre che egli ha veramente preso cognizione di quanto s'era fatto prima di lui intorno alle parallele — o almeno di ciò che egli aveva, per così dire, a portata di mano — dal modo come scriveva nel 1820 al figlio, per dissuaderlo dall'occuparsi di quell'argomento. " *Versuche die Parallelen auch Du nicht... Ich kenne alle Wege bis ans Ende; ich habe keine Idee angetroffen, die ich nicht schon bearbeitet hätte... Ich lieferte weit Besseres, als bis dahin geleistet wurde...* „; ed altre frasi analoghe (**). — D'al-

---

(*) Per quel che riguarda GAUSS non si vede, in ciò che di lui fu pubblicato finora, nulla che contraddica a questa supposizione. Così l'accenno al triangolo di area massima, contenuto nella lettera di GAUSS a W. BOLYAI 16 dicembre 1799 (Math. Ann. 49, pag. 157, oppure *P. Th.*, pag. 219), può essere un frutto delle meditazioni sulle parallele di SACCHERI (che permettono di concludere l'esistenza di triangoli coi 3 vertici all'infinito) e sulle aree triangolari di LAMBERT.

Il fatto che GAUSS, in quella lettera e in altre posteriori relative alla geometria non-euclidea, non nomini mai nè SACCHERI, nè LAMBERT non prova nulla contro la suddetta supposizione: poichè quei nomi non si trovano nemmeno nelle lettere di GAUSS finora publicate, posteriori al 1829, e quindi appartenenti a un'epoca in cui GAUSS conosceva certamente (n. 1) l'esistenza dei lavori di quei due scienziati!

Si confrontino poi — come già è stato fatto, ad esempio dal sig. STÄCKEL a pag. 409 dell'articolo citato su TAURINUS. — le seguenti parole che (nella *Theorie der Parallellinien* § 80; *P. Th.*, pag. 200) LAMBERT scriveva, dopo d'aver dedotto dall'ipotesi non-euclidea l'esistenza di una *misura assoluta per le lunghezze:* " *Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch abdringt, die dritte Hypothese möchte doch wahr seyn!* „ — si confrontino, dico, con queste altre che GAUSS scriveva a TAURINUS l'8 novembre 1824, dopo d'aver rilevato egli pure che l'ipotesi non euclidea conduce all'esistenza di una lunghezza assoluta (*P. Th.*, pag. 250): " *Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäussert, dass die Euclidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maass a priori haben würden.* „ Non si direbbe che su GAUSS agisse inconsciamente un lontano ricordo delle parole di LAMBERT?

(**) STÄCKEL, *Die Entdeckung* u. s. w., pag. 3, 4. — Nella stessa lettera (pag. 3) W. BOLYAI nominava la teoria delle parallele come un " *Flecken der*

tronde si sa che WOLFANGO istruì egli stesso il figlio nella matematica, e richiamò la sua attenzione sulle lacune esistenti nella teoria delle parallele. " *Einst äusserte er, derjenige, der einen Beweis für das elfte Axiom fände, verdiente einen Diamanten, so gross als der Erdball. Ein anderes Mal: dem dieses einst gelingen wird, setzt, Sterbliche, ihm ein ewiges Denkmal* ". Così accadde — scriveva, molto tempo dopo, il figlio — che questi, " *durch die ganz eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt* ", dal 1817 in poi fece della teoria delle parallele la sua *occupazione prediletta* (*). Da ciò, e particolarmente dalle frasi citate, si può arguire che WOLFANGO non si sarà limitato col figlio a poche parole su quella teoria! Nulla esclude invece che gli abbia comunicato alcune delle cose che egli stesso può aver serbato in mente dalla lettura di SACCHERI, o di KLÜGEL, o di LAMBERT! (**).

7. — Anche su LOBATSCHEFSKIJ è probabile che abbia influito l'opera di SACCHERI, sia pure indirettamente! LOBATSCHEFSKIJ all'università di Kasan ebbe prima (fin verso il 1812) a maestro, poi (fino al 1820) a collega il tedesco J. M. C. BARTELS (***). Anche questo scienziato aveva studiato all'università di Gottinga (intorno al 1790), acquistando sotto la guida del KAESTNER profonde cognizioni matematiche. Era compaesano ed amico di GAUSS, che aveva ajutato nei primi studî matematici (+), e col quale

---

Geometrie ": frase che ricorda il titolo del libro di SACCHERI, come rileva L. SCHLESINGER nella Festrede: *Johann Bolyai*, Jahresbericht d. Deutschen Mathemat.-Vereinig. 12, 1903: v. pag. 166.

Nel *Tentamen* di W. BOLYAI, dove si parla dell'assioma XI, non è citato alcuno degli scrittori che se ne occuparono.

(*) *Die Entdeckung* u. s. w., pag. 2.

(**) Invece il sig. SCHLESINGER nel discorso dianzi citato, parlando dei primi tentativi di J. BOLYAI (come già STÄCKEL in *Die Entdeckung* u. s. v., pag. 2-3), dice (pag. 173) che questi " *schlägt dabei einen ähnlichen Weg ein wie* 1733 SACCHERI *und* 1766 LAMBERT, *deren Arbeiten ihm übrigens unbekannt geblieben waren* ". L'ipotesi che io pongo è di una conoscenza *indiretta*, passando pel padre.

(***) Cfr., qui e nel seguito, la biografia di LOBATSCHEFSKIJ nel libro citato dell'ENGEL, pag. 349 e seg^i (nella quale è pur tenuto conto di alcune recenti importanti notizie dovute ad A. WASSILIEF).

(+) SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN: *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig 1856, pag. 13.

poi aveva trascorso due anni (1805—1807) in Braunschweig nella massima intimità, prima di recarsi ad insegnare a Kasan. Tenendo sempre presente il fatto già menzionato che la teoria delle parallele era all'ordine del giorno, è supponibile che BARTELS abbia ignorato l'esistenza della dissertazione di KLÜGEL, per non dire dei lavori di SACCHERI e di LAMBERT? Ora BARTELS, insegnante valorosissimo, esercitò la massima influenza su LOBATSCHEFSKIJ, il quale ne ebbe sempre la massima stima. LOBATSCHEFSKIJ fin dagli anni 1815—1817, se non prima, si occupò delle parallele, secondo l'indirizzo delle ricerche di LEGENDRE. È possibile che non abbia mai parlato di quella teoria con BARTELS, e che questi non gli abbia indicato, per lo meno, la dissertazione di KLÜGEL? Un uomo serio e prudente quale era LOBATSCHEFSKIJ può aver publicato una geometria che osa negare il post. V, senza prima aver fatto quanto era in lui per conoscere i principali tentativi di dimostrazione di quel postulato? Ora, se anche BARTELS non avesse potuto ajutarlo in ciò, non mancavano altri mezzi! A quei tempi erano pienamente apprezzate in Russia, e all'Università di Kasan in particolare, la produzione scientifica tedesca e quella francese. La *Histoire* di MONTUCLA, la dissertazione ed il *Wörterbuch* di KLÜGEL (*), ecc. ecc., non saran mai andati fra le mani di LOBATSCHEFSKIJ, conducendolo alla conoscenza, diretta od indiretta, del SACCHERI? — A *Kasan* si dovrebbero fare delle ricerche per risolvere la questione! (**).

(*) Come già s'è ricordato, KLÜGEL apparteneva all'Accademia di Pietroburgo.

(**) L'affinità tra alcune cose di LOBATSCHEFSKIJ e le analoghe di SACCHERI è notevole. Per es° nel § 102 dei *Neue Anfangsgründe* u. s. w. (ediz. di ENGEL, pag. 174) LOBATSCHEFSKIJ, per dimostrare che si può dare ad arbitrio l'*angolo di parallelismo*, fa un ragionamento affine a quello che aveva fatto SACCHERI (prop. 27) per lo stesso scopo, con una figura che ricorda pure le fig^e 9 e 10 di SACCHERI (prop. 11 e 12). Del resto il ragionamento di LOBATSCHEFSKIJ e la relativa figura si trovavano già in TAURINUS, *Theorie der Parallellinien*, 1825 (*P. Th.*, pag. 264-265): come ENGEL ha rilevato. E questi ha pur notato che LOBATSCHEFSKIJ nel § 106 dei *Neue Anfangsgründe* (pag. 179, cfr. p. 333) adopera tacitamente, senza dimostrarle, le due prime proposizioni di SACCHERI.

8. — Infine, anche riguardo alle scoperte di SCHWEIKART e di TAURINUS sarebbero da fare ulteriori ricerche! Lo SCHWEIKART aveva seguito (*) dal 1796 al 1798 nell' Università di Marburg lezioni matematiche da J. K. F. HAUFF, autore di varî scritti sulle parallele; ed aveva a sua volta publicato nel 1807 un libro sullo stesso argomento (**). Se dall' esame di questi scritti, o da altre circostanze, si potesse dedurre che egli ha conosciuto la dissertazione di KLÜGEL e il lavoro di LAMBERT, rimarrebbero così spiegati i suoi risultati. Infatti questi — quali sono esposti nel foglio datato " Marburg, dicembre 1818 „ e inviato da SCHWEIKART a GAUSS per mezzo di GERLING (***), e nelle lettere al nipote TAURINUS del 1820 e 1824 (+) — derivano tutti, quasi immediatamente, dalle proposizioni di SACCHERI contenute nel *Conatuum* di KLÜGEL e dal teorema di LAMBERT sull'area del triangolo. Rimarrebbe sempre a SCHWEIKART il grande merito di aver saputo emanciparsi dal preconcetto euclideo, anzi che ostinarsi, come SACCHERI e LAMBERT, a ritenere assurda l'ipotesi non-euclidea!

Quanto a TAURINUS, egli dice nella prefazione agli *Elèmenta* del 1826 (++) che nella sua già citata *Theorie* del 1825 era venuto, *senza saperlo*, a concetti molto simili a quelli che poi [nell'edizione di CAMERER degli Elementi d'EUCLIDE, 1824 (+++)]

(*) *P. Th.*, pag. 243. V. anche, pel seguito, l'articolo di STÄCKEL su TAURINUS già citato.

(**) *Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie.* Non son riuscito a procurarmi questo libro. Si sa però (*P. Th.*, pag. 243) che esso non parla ancora di geometria non-euclidea; ma " attesta (art° di STÄCKEL su TAURINUS, pag. 403) un profondo studio della letteratura relativa alle parallele. „ Per esempio vi è riportata (*P. Th.*, pag. 141) l'opinione di KAESTNER su questo soggetto.

(***) GAUSS' Werke, 8er Band, Leipzig 1900, pag. 180.

(+) *P. Th.*, pag. 248 e 245.

(++) *P. Th.*, pag. 247-248. Qui è anche da notare la frase di TAURINUS relativa all'influenza esercitata su lui dal libro di SCHWEIKART. Dice di avervi imparato " *alle die Methoden zum Beweise der Parallelentheorie, die bis dahin bekannt geworden waren.* „ Quali?

(+++) Riguardo all'*Excursus ad Elementorum* I, 29 di quell'edizione, STÄCKEL (art. su TAURINUS, nota a pag. 414) dice che esso " *mit grossem Nachdruck und tiefem Verständnis auf die Untersuchungen von* SACCHERI *und* LAMBERT *hingewiesen hat.* „

aveva visto appartenere a SACCHERI e LAMBERT. Effettivamente le cose non-euclidee di quella *Theorie* (riportate nella *P. Th.*, pag. 262-266) si trovan già tutte, a un dipresso, in SACCHERI; come affini a SACCHERI e LAMBERT sono altre considerazioni contenute in una lettera del 1824 di TAURINUS a GAUSS (*). Non potrebb' essere che TAURINUS fosse stato condotto a queste cose dalle notizie contenute nel libro dello zio, e dalle comunicazioni avute direttamente da questo (**) (se pure, durante i suoi propri studi a Gottinga intorno al 1820, non ebbe a ricevere qualche altra influenza antieuclidea)?

Sulla reazione dell'etere α-cianpropionico con l'aldeide benzoica.

Nota del Dr. LODOVICO BECCARI.

L'etere cianacetico dà con le aldeidi grasse ed aromatiche in presenza di ammoniaca una serie di prodotti di condensazione molto interessanti, studiati dal prof. Guareschi (1): come prodotto principale si ottengono le *diciandiossipiridine*, e secondariamente le *cianacetamidi monoalchilsostituite*. Per consiglio del prof. Guareschi studiai il modo di comportarsi di un omologo dell'etere cianacetico, dell'etere cioè α-*cianpropionico* o *metilcianacetico* con l'aldeide benzoica in presenza di NH^3 acquosa concentrata, nell'intento di vedere se si ottenessero da esso prodotti di condensazione analoghi a quelli sopra ricordati. Operando nelle stesse condizioni tenute per l'etere cianacetico, l'etere α-cianpropionico reagisce abbastanza prontamente con la benzal-

(*) STÄCKEL su TAURINUS, pag. 404 e seg^{i}. Vi è dimostrato che, nella ipotesi dell'angolo ottuso, due rette complanari perpendicolari a una terza devon necessariamente incontrarsi: donde il rigetto di quell'ipotesi.

(**) Si noti che la considerazione (*P. Th.*, pag. 265, n. 6) che dà nella *Theorie* di TAURINUS il *parametro* non-euclideo coincide con quella di SCHWEIKART, indicata con *c*) nel foglio inviato a GAUSS!

(1) *Sulle diciandiossipiridine*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1899, Vol. XXXIV, e *Condensazione delle aldeidi con l'etere cianacetico*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1902, Vol. XXXVII.

deide, ma dà origine ad un composto del tutto differente per proprietà e composizione dalle diciandiossipiridine.

Le ricerche eseguite allo scopo di chiarire la natura della reazione e del prodotto ottenuto mi condussero anzi ad uno studio sulle reazioni delle idramidi con l'etere cianacetico (1), che già pubblicai e che si collega perciò alla presente nota.

Preparai l'etere α-cianpropionico col metodo descritto da Henry (2), partendo dall'etere cianacetico: preparai cioè da prima il derivato monosodico dell'etere cianacetico sciogliendo un atomo di sodio in 10 mol. di alcol etilico e versando l'alcolato sodico a goccia a goccia nell'etere cianacetico (1 mol.); appena avvenuta la reazione aggiunsi a piccole porzioni ioduro di metile in lieve eccesso (poco più di 1 mol.) e riscaldai la miscela su b. m. a ricadere per alcune ore (3 ore circa), fino a che la reazione alcalina fosse scomparsa. Scacciata allora per distillazione la maggior parte dell'alcol, trattai la massa residua con acqua che disciolse il ioduro di sodio e separò il prodotto come olio galleggiante; questo venne separato, la soluzione acquosa venne a più riprese estratta con etere etilico, la soluzione eterea evaporata ed il residuo oleoso fu riunito alla prima porzione di prodotto, seccato su cloruro di calcio fuso e rettificato con ripetute distillazioni. L'*etere α-cianpropionico* puro bolle a 198°; il rendimento della preparazione condotta con ogni cura fu in media del 70-75 %.

Come ho accennato, nello studiare la reazione fra l'etere α-cianpropionico e la benzaldeide in presenza di NH^3 acquosa usai lo stesso metodo e le stesse proporzioni tenute dal professore Guareschi per l'etere cianacetico; posi infatti a reagire una mol. di benzaldeide con due mol. di etere e poco più di due mol. di NH^3 in sol. acquosa concentrata, in vaso a tappo smerigliato e a piccole porzioni e cioè: gr. 5 di aldeide con gr. 13 di etere e cc. 13 di ammoniaca acquosa a 0,914. Agitando di continuo la miscela, dopo due ore circa cominciò a separarsi un

---

(1) *Sulle idramidi e sulle loro reazioni con l'etere cianacetico*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, 1902, Vol. XXXVII.

(2) L. Henry, *Sur l'acide cyano-acétique*, " Compt. rend. „, Vol. 104, pag. 1618 e seg., 1887. — P. Henry, " Bull. de l'Ac. roy. de Belgique „, 1889, pag. 680 e seg.

prodotto amorfo, viscoso, che mano mano andò aumentando, trasformandosi molto lentamente in una massa solida, friabile. Dopo 3 giorni, agitando vigorosamente ad intervalli, ottenni un prodotto bianco, cristallino, che venne raccolto e lavato con acqua bollente; il peso del prodotto greggio, secco all'aria fu di gr. 6.6. Lavato ancora con poco alcol a 90° a freddo e con etere etilico, per togliere le tracce di aldeide benzoica, venne cristallizzato dall'alcol a 90° bollente, da cui separasi in bei cristalli aghiformi, bianchi, leggeri; la sostanza, riscaldata con precauzione, dà già qualche segno di rammollimento sotto i 198°, alla quale temperatura fonde poi nettamente con decomposizione ed ingiallimento. Essa è insolubile in acqua, solubile alquanto in alcol, meno solubile in cloroformio, etere etilico e benzene.

Cristallizzando dall'alcol il prodotto di questa e di altre preparazioni eseguite negli stessi rapporti, potei sempre separare una seconda sostanza pochissimo solubile in alcol, in tenue quantità e costituita da piccoli aghetti bianchi, pesanti e aventi p. f. 210-212°. Le acque madri delle singole preparazioni poi, evaporate a b. m., lasciarono un discreto residuo cristallino, misto a sostanza oleosa, il quale venne spremuto tra carta da filtro e studiato a parte.

Le analisi del prodotto principale, avente p. f. 198°, diedero i seguenti risultati:

I. Gr. 0,1442 di sostanza diedero gr. 0,3912 CO^2 e gr. 0,0754 H^2O
II. Gr. 0,1334 „ „ „ 0,3616 CO^2 e gr. 0,0712 H^2O
III. Gr. 0,1109 „ „ cc. 13,8 N a 13°,5 e 748,3 mm.

	I	II	III
C %	73,99	73,93	—
H „	5,85	5,97	—
N „	—	—	14,46.

Da questi dati analitici si può ricavare la formola $C^{18}H^{17}N^3O$, per la quale si calcola:

C %	74,2
H „	5,84
N „	14,4.

Le proprietà principali del prodotto analizzato sono le seguenti: è insolubile in acqua anche bollente, solubile discretamente in alcol dal quale si ottiene ben cristallizzato, meno solubile nell'etere etilico, cloroformio e benzene. La sostanza ha carattere di composto neutro ed è insolubile sia negli acidi che negli alcali diluiti. Essa non è molto stabile e si decompone abbastanza facilmente; già l'ebollizione prolungata della sua soluzione alcolica determina svolgimento di ammoniaca; riscaldata con soluzione diluita di alcali caustici si scinde con sviluppo di ammoniaca e svolge odore spiccato di mandorle amare; tale scomposizione avviene pure per ebollizione con acidi minerali diluiti. Ho potuto anzi riconoscere che, bollita con acido cloridrico diluito, la sostanza si scinde prontamente dando aldeide benzoica, che si separa come olio alla superficie della soluzione, ed ammoniaca, che resta combinata con l'acido cloridrico. Eseguendo questa ricerca e dosando la quantità relativa dei prodotti di scissione, ho potuto ottenere dati, che chiariscono i rapporti di combinazione dell'etere α-cianpropionico e della benzaldeide nel formare il composto $C^{18}H^{17}N^{3}O$. Trattai gr. 1,2 di sostanza con gr. 30 di acido cloridrico diluito (D = 1,006) all'ebollizione; in pochi minuti la sostanza solida si disciolse con formazione di gocciole oleose galleggianti sulla soluzione. Non si ebbe svolgimento di CO^2. Dopo un'ora di ebollizione moderata, la soluzione raffreddata venne ripetutamente estratta con etere etilico; questo, separato ed evaporato in matraccino tarato lasciò un residuo oleoso quasi incoloro, con odore caratteristico di benzaldeide, che dopo pochi minuti si trasformò in una massa cristallina bianca; posi il matraccino ad essiccare sull'acido solforico fino a peso costante: il residuo completamente cristallizzato pesava gr. 0,908. Questo, oltre che in etere, si scioglieva con effervescenza nella soluzione di carbonato sodico, dalla quale con acido cloridrico diluito veniva precipitato in masse voluminose cristalline; cristallizzato dall' acqua bollente si presentava in pagliette cristalline, bianche, fondenti a 120° e sublimabili completamente. L'acido benzoico in tal modo identificato permetteva di calcolare la quantità di aldeide corrispondente dalla quale proveniva per rapida ossidazione all'aria e di stabilire quindi un rapporto fra la sostanza decomposta e la benzaldeide formatasi; questa infatti risulta di gr. 0,788, e, rife-

rita a gr. 1,2 di sostanza impiegata, corrisponde con sufficente approssimazione al rapporto di 2 mol. di benzaldeide per 1 mol. del composto $C^{18}H^{17}N^3O$, essendo in tal caso la quantità calcolata di benzaldeide gr. 0,874. — La soluzione acquosa cloridrica d'altro canto venne evaporata nel vuoto su calce, e nel residuo determinai la quantità di ammoniaca formatasi, distillando con latte di magnesia e dosando l'NH^3 come cloroplatinato:

Pt trovato gr. 0,8176, corrispondente a gr. 0,1432 NH^3.

L'azoto corrispondente all'NH^3 formatasi nella decomposizione della sostanza corrisponde perfettamente ai $^2/_3$ dell'azoto totale contenuto nel composto $C^{18}H^{17}N^3O$, infatti:

N totale	N dell'NH^3	
	trovato	calcolato per i $^2/_3$
14,4 %	9,8 %	9,6 %

Dal che appare evidente che due dei tre atomi di N della molecola sono facilmente scindibili e probabilmente vi sono contenuti come residui dell'ammoniaca, mentre il terzo, resistente all'azione dell'HCl diluito, corrisponde senza dubbio al gruppo CN del residuo dell'acido α-cianpropionico.

Da tali risultati si può anche dedurre che la reazione, che dà origine al composto $C^{18}H^{17}N^3O$, avviene non già nei rapporti impiegati nelle predette preparazioni, ma bensì tra due molecole di benzaldeide, una molecola di etere α-cianpropionico e due di NH^3. Eseguendo infatti la preparazione in questi ultimi rapporti ottenni l'identico prodotto. La reazione può quindi essere espressa assai completamente con la seguente equazione:

$$2C^6H^5 . CHO + CH^3 . CH(CN) . CO^2C^2H^5 + 2NH^3 =$$
$$= C^{18}H^{17}N^3O + C^2H^5 . OH + 2H^2O.$$

Come ho accennato, ottenni dalla stessa preparazione due altri prodotti, di cui farò breve cenno.

Cristallizzando il prodotto principale dall'alcol ho potuto sempre separare una seconda sostanza cristallina, bianca, assai poco solubile nell'alcol e meno ancora negli altri solventi, ma in quantità così scarsa, che non mi è stato possibile farne uno studio abbastanza approfondito. Riunendo le diverse porzioni

ottenute da parecchie preparazioni, e cristallizzandole dall'alcol bollente, ottenni il prodotto in polvere cristallina, sottile, microscopica, pesante, fondente a 210° con decomposizione. L'analisi elementare mi diede i seguenti risultati:

I. Gr. 0,1126 di sostanza diedero cc. 14,2 N a 8°,7 e 740 mm.
II. Gr. 0,1174 „ „ gr. 0,3176 CO^2 e gr. 0,0618 H^2O

	I	II
C %	—	73,8
H „	—	5,8
N „	14,7	—

La composizione di questa sostanza corrisponde quasi esattamente a quella del primo prodotto studiato; solo il C presenta una piccola deficienza, dovuta forse alla grande difficoltà di purificare abbastanza il materiale di analisi. Tale concordanza di composizione farebbe pensare ad un isomero del composto $C^{18}H^{17}N^3O$, ma, ripeto, il rendimento scarsissimo di tale prodotto secondario mi impedì di approfondire le ricerche in questo senso.

Evaporando le acque madri delle singole preparazioni ottenni infine una massa cristallina, mista ad olio più o meno colorato; spremuta fra carta bibula la sostanza si presenta in lamelle bianche solubilissime nell'acqua e nell'alcol, insolubili nell'etere etilico, che può servire a lavarla dalle tracce di olio mescolato: fonde greggia a circa 93-94°, ma ripetute cristallizzazioni dall'alcol diluito fanno salire mano mano il p. f., che infine diviene costante a 105-106°. Dalle proprietà generali e dall'analisi potei identificare in tale prodotto l'*amide α-cianpropionica* preparata già da Henry (1):

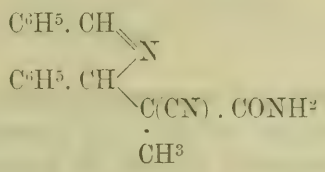
I. Gr. 0,1345 di sostanza diedero cc. 32,8 N a 10°,5 e 740 mm.
II. Gr. 0,1333 „ „ gr. 0,2376 CO^2 e gr. 0,0737 H^2O

	trovato		calcolato per $C^6H^6N^2O$
	I	II	
C %	—	48,61	48,9
H „	—	6,18	6,1
N „	28,4	—	28,5.

(1) P. Henry, l. c., pag. 680 e seg.

Un solo dato non trovai concordare con quelli di Henry, cioè il punto di fusione. Henry dà per l'*amide α-cianpropionica* il p. f. 85°; io l'ho trovato assai superiore e fisso a 105-106° solo dopo ripetute cristallizzazioni. Ho pure preparata l'amide dall'etere α-cianpropionico e dall'NH^3 acquosa direttamente, ed ottenni la sostanza con l'identico punto di fusione 105-106°; ad esso si perviene solo dopo diverse cristallizzazioni dell'alcol diluito, e forse in ciò sta la ragione della discrepanza coi dati di Henry.

I rapporti di combinazione della benzaldeide e dell'etere α-cianpropionico nel descritto composto $C^{18}H^{17}N^3O$, i caratteri di questo posti a confronto col modo di reagire dell'etere cianacetico con le idramidi, da me già studiato in una nota precedente, mi indussero ad ammettere come probabile la seguente costituzione per il prodotto in parola:



Ivi i due residui della benzaldeide sarebbero tra loro collegati dalle tre valenze dell'azoto terziario in un gruppo di costituzione simile alle idramidi, il quale sarebbe pure unito all'amide α-cianpropionica per sostituzione dell' H metinico di questa. Tale struttura, oltre a presentare stretta analogia con quella dei composti ottenuti dall'etere cianacetico e dalle idramidi, risponde bene alle proprietà della sostanza, e cioè al carattere di composto neutro, alla poca stabilità, alla facile scissione per opera degli acidi diluiti con formazione di aldeide benzoica ed ammoniaca; ed anzi l'ammoniaca, che in tal modo si forma, corrisponde appunto ai $^2/_3$ dell'azoto totale e con certezza proviene dall'atomo di azoto terziario e dal gruppo amidico del composto $C^{18}H^{17}N^3O$. A conferma di tale ipotesi ho tentato metodi differenti di preparazione dello stesso composto, i quali hanno corrisposto appieno. Anzitutto ho fatto reagire sull'aldeide

benzoica l'*amide α-cianpropionica* in luogo dell'etere corrispondente in presenza di NH^3 acquosa od alcolica; sì nell'un caso che nell'altro la reazione si compie con lo stesso risultato, ma avviene assai più prontamente in soluzione alcolica. Disciogliendo in pochi cm.^{3} di alcol concentrato 1 mol. di amide α-cianpropionica e 2 mol. di benzaldeide ed aggiungendo ammoniaca alcolica in lieve eccesso, dopo pochi minuti la miscela si converte in una massa bianca compatta e cristallina; raccolto e cristallizzato dall'alcol il prodotto fonde a 198° con decomposizione. L'analisi elementare ha fornito i seguenti risultati:

I. Gr. 0,2015 di sostanza diedero gr. 0,5480 CO^2 e gr. 0,1090 H^2O
II. Gr. 0,1500 „ „ cc. 19,1 N a 15° e 745 mm.

	trovato		calcolato per $C^{18}H^{17}N^3O$
	I	II	
C %	74,17	—	74,2
H „	6,05	—	5,8
N „	—	14,3	14,4

Infine a rendere più verosimile l'esistenza di un gruppo idramidico nel composto studiato e la probabile formazione intermedia di idrobenzamide durante la reazione, tentai di fare reagire l'amide α-cianpropionica sull'idrobenzamide stessa direttamente. Già a proposito delle ricerche sulle idramidi e l'etere cianacetico io aveva potuto verificare che anche l'etere α-cianpropionico reagiva direttamente con le idramidi in soluzione alcolica, dando però scarsissimo prodotto (1).

---

(1) Ritengo opportuno riferire qui gli scarsi risultati di tali prove. L'etere α-cianpropionico e l'idrobenzamide in soluzione alcolica reagiscono lentamente con leggera colorazione gialla del liquido e svolgimento di NH^3; pure molto lentamente si separa un prodotto in piccoli aghi bianchi; la quantità del prodotto è minima e pare cresca alquanto coll'aumentare della proporzione dell'etere impiegato. La sostanza separata è insolubile in acqua; cristallizza dall'alcol in cristalli sottili, fondenti a 195° con sviluppo di bollicine gasose. La scarsezza del prodotto non mi concesse di raggiungere forse il grado di purezza necessario, e l'analisi elementare diede valori che si scostano un po' (specie per il C) ma pur sono abbastanza prossimi a quelli che si calcolerebbero per la formola $C^{20}H^{20}N^2O^2$. Questo sarebbe il composto corrispondente a quello studiato $C^{19}H^{17}N^3O$, in cui al posto del-

La reazione tra l'amide α-cianpropionica e l'idrobenzamide avviene abbastanza facilmente: lasciai reagire una mol. di amide con una molecola di idrobenzamide a freddo in una quantità di alcol concentrato appena sufficiente a disciogliere l'idramide stessa; a poco a poco si andò separando un prodotto cristallino, bianco, che, raccolto e cristallizzato più volte dall'alcol, presentava il p. f. 198° e gli altri caratteri del composto $C^{18}H^{17}N^3O$. L'analisi dell'azoto confermò l'identità del prodotto:

Gr. 0,1568 di sostanza diedero cc. 20,4 N a 15° e 740 mm.

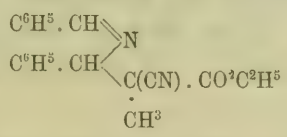
	trovato	calcolato per $C^{18}H^{17}N^3O$
N %	14,6	14,4.

Tali risultati rendono, a mio parere, molto probabile la formola di costituzione da me proposta per il composto ottenuto dalla reazione dell'etere α-cianpropionico con la benzaldeide in presenza di NH^3 acquosa concentrata.

Dal Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica
della R. Università - Torino - Novembre 1902.

---

l'amide starebbe l'etere α-cianpropionico, ed avrebbe perciò la struttura seguente:



Per tali rapporti ho voluto rammentare i seguenti risultati, quantunque imperfetti e soltanto approssimativi:

I. Gr. 0,1261 di sostanza diedero gr. 0,3418 CO^2 e gr. 0,0691 H^2O
II. „ 0,1297 „ „ cc. 9,8 N a 15° e 741 mm.
III. „ 0,1823 „ „ gr. 0,4943 CO^2 e gr. 0,0974 H^2O

	trovato I	trovato II	trovato III	calcolato per $C^{20}H^{20}N^2O^2$
C %	73,93	—	73.95	75,—
H „	6,13	—	5,97	6,25
N „	—	8,63	—	8,75.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 3 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, MORERA. — Scusa l'assenza il Socio PARONA;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: PEYRON, Vice Presidente dell'Accademia, FERRERO, Direttore della Classe, ROSSI, MANNO, BOSELLI, CIPOLLA, BRUSA, ALLIEVO, PIZZI e RENIER Segretario. — Il Socio BOLLATI DI SAINT-PIERRE scusa l'assenza.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente legge una lettera del Socio PARONA, che scusa l'assenza per un grave lutto domestico. Egli crede di interpretare il desiderio dell'Accademia facendogli pervenire le più vive condoglianze.

Quindi il Presidente dà conto di ciò che ha fatto sinora il Comitato costituitosi per porre un ricordo alla memoria del rimpianto Socio Alfonso COSSA, nella Scuola di Applicazione degli Ingegneri.

Il Socio Tesoriere JADANZA, invitato dal Presidente, procede all' esposizione finanziaria per il passato esercizio 1902 e presenta il bilancio preventivo dell'anno 1903.

L'Accademia approva tanto il conto consuntivo, quanto il bilancio preventivo. Approva pure i resoconti delle gestioni dell'eredità Bressa, Gautieri e Vallauri, scarica il Tesoriere d'ogni contabilità passata e gli dà carico per l'esercizio del corrente anno 1903.

Il Socio Naccari legge la relazione della prima Giunta per il premio internazionale Bressa (quadriennio 1899-1902). Essa indica le opere e le scoperte sulle quali la Giunta crede sia da richiamare specialmente l'attenzione dell'Accademia. Il Presidente dichiara aperta la discussione in proposito con facoltà di fare nuove proposte. Siccome nessuno chiede la parola, il campo delle proposte resta chiuso, ed il Presidente ringrazia la prima Giunta, specialmente il relatore Naccari, per l'opera prestata.

Si passa alla elezione di cinque membri per Classe, che costituiscono col Presidente, membro nato, la seconda Giunta pel premio Bressa. Le Classi votano divise, a schede secrete.

Della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali riescono eletti: Naccari, Foà, Camerano, Spezia, Guareschi.

Della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche ottengono l'elezione: Cipolla, Boselli, Manno, Carle, Ferrero.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEYRON, Vice Presidente dell'Accademia, FERRERO, Direttore della Classe, ROSSI, MANNO, BOSELLI, CIPOLLA, BRUSA, ALLIEVO, PIZZI e RENIER Segretario. — Il Socio BOLLATI DI SAINT-PIERRE, scusa l'assenza.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 19 aprile 1903.

1° Il Socio BOSELLI mette in rilievo con molti elogi i pregi del volume che presenta di Augusto Bosco, *La delinquenza in varî Stati d'Europa,* Roma, 1903. Si associa il Socio BRUSA che pone in evidenza altri lati delle risultanze di quell'opera e segnala le difficoltà felicemente in essa superate dall'autore.

2° Il Direttore della Classe FERRERO fa omaggio di un opuscolo di Ubaldo ANGELI, che contiene due conferenze, l'una su *Amedeo di Savoia duca di Aosta,* l'altra su *Vincenzo Gioberti,* Prato, 1903.

3° Il Socio CIPOLLA presenta a nome del Socio SAVIO una pubblicazione di lui su *La pretesa inimicizia del papa Niccolò III contro il re Carlo I d'Angiò,* Palermo, 1903.

4° Il Presidente fa omaggio d'un opuscolo inviato dal Socio corrispondente DE NADAILLAC, *Du Cap au Caire,* Paris, 1903.

Per la inserzione negli *Atti* sono presentate le seguenti note:

1° dal Socio Allievo: *Lo spirito e la materia nell'Universo. L'anima e il corpo nell'uomo;*

2° dal Socio Direttore della Classe, Ferrero: *Spada di bronzo scoperta in Moriana;*

3° dal Socio Brusa: Francesco Ruffini, *A proposito di alcuni recenti scritti di Ireneo Lameire.*

Il Socio Cipolla legge la sua relazione intorno alla breve monografia di Domenico Valla, *Vita di Carlo Antonio Dal Pozzo, arcivescovo di Pisa, fondatore del Collegio Puteano,* ch' egli fu incaricato di esaminare insieme col Direttore di Classe Ferrero. La relazione è approvata ed è parimenti approvata a voti unanimi l'inserzione dello scritto suddetto nelle *Memorie* accademiche.

Il Presidente rammenta ai Soci che con gli scritti approvati e con quelli già presentati, resta occupato lo spazio disponibile nel volume attuale delle *Memorie*. Quindi per ora è desiderabile non si presentino altre monografie di estranei.

LETTURE

Lo spirito e la materia nell'universo. L'anima ed il corpo nell'uomo.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

Nel mondo del pensiero primeggiano certe idee così ampie e comprensive, che rispecchiano esse sole l'immenso sistema della realtà universa e ad un tempo stanno come centri motori della sapienza comune egualmente che della speculazione scientifica. Tali sono le idee di spirito e di materia, di anima e di corpo; idee supreme e dominanti su tutte le altre, idee non già meramente fittizie, o superlativamente astratte, quale sarebbe l'idea dell'esistenza in generale, bensì sovranamente concrete e rappresentative di quanto realmente sussiste in natura. Esse ci raffigurano gli esseri dell'universo siccome anelli formanti una interminabil catena, la quale muove dallo spirito infinito divino e discende giù giù al più impercettibil atomo di materia.

A questa ordinata gerarchia degli esseri dell'universo fa bella corrispondenza il sistema armonico delle scienze, le quali muovendo da quelle supreme idee siccome dal loro centro di unità si diramano in classi distinte, ma pure armonicamente connesse, secondochè hanno per oggetto di studio il mondo trascendente della spiritualità, o il mondo corporeo della materialità, o le intime e vitali attinenze dell'uno coll'altro. Nel regno immenso dell'enciclopedia umana le scienze tutte quante stanno armonicamente composte a stupenda unità, ma pure ciascuna ha una impronta sua propria, che la distingue da ogni altra e si muove in una cerchia sua propria, determinata dalla natura del suo oggetto, ed in tutto il lungo corso del suo progressivo sviluppo si è sempre conservata conforme alla natura sua propria senza confondersi con verun'altra, perchè il suo oggetto non muta natura. L'ordine vuole che ogni cosa sia quello, che è; e per ciò stesso una scienza non è l'altra.

Oggidì il pensiero speculativo ha perduto di vista le due grandi idee di spirito e di materia, di anima e di corpo, su cui posa l'ordine dell'universo e l'armonia delle scienze. La confusione di quelle due supreme idee ha perturbato e sconvolto da cima a fondo tutto lo scibile. Da per tutto vi domina il disordine e lo scompiglio. Ogni scienza è spostata fuori della sua propria orbita sicchè più non si scorge il punto, dove comincia e dove finisce. Mentre le due supreme realtà dello spirito e della materia, distinte ed unite, formavano il grande argomento della meditazione scientifica, ora il pensiero si muove intorno la materia, siccome suo centro di gravità, e riguarda lo spirito quale una fioritura della materia e niente più. Le scienze della natura hanno usurpato il posto delle scienze dello spirito: la psicologia, la morale, la filosofia in genere non hanno più una esistenza loro propria e distinta, ma sono trasformate in altrettanti rami delle scienze naturali. Negli intimi processi delle funzioni fisiologiche si vanno rintracciando le ragioni, che spieghino le più alte idealità dello spirito. L'antropologia non è più la scienza, che contempla il soggetto umano nella universalità della sua immutabile e costitutiva essenza, la quale rimane identica ed una presso tutte le genti, attraverso tutti i secoli, bensì è diventata uno studio descrittivo delle razze umane sparse sulla faccia della terra, riguardate nei loro caratteri dominanti quali risultano dalla diversa struttura del cranio, dalla dimensione dell'angolo facciale e dalla configurazione esteriore. Similmente la psicologia non è più una scienza filosofica, che studia l'anima umana nella sua intima natura, nelle sue vitali attinenze coll'organismo corporeo, nel vario atteggiamento delle sue potenze, nella sua suprema destinazione: essa si è trasformata in una disciplina tutta sperimentale, che indaga i fenomeni della psiche umana coll'opera di macchine e strumenti antropometrici, ed ha il suo laboratorio come la fisiologia, l'anatomia, la chimica e qualsiasi altra scienza della natura.

Questa violenta invasione delle scienze naturali nel dominio delle scienze filosofiche ha talmente contraffatto l'indole propria di ciascuna, che torna pressochè impossibile il potersi orientare nel mondo della speculazione scientifica. Voi mi parlate di biologia e di fisiologia, come mi parlate di psicologia, di antropologia, di filosofia: ma in che si distinguono l'una dall'altra?

Qual è l'oggetto ed il còmpito di ciascuna? Quali questioni entrano nella cerchia della biologia e quali no? Nè a voi, nè a me più non riesce di saperlo. Poniamo ad esempio un problema di psicologia o di antropologia. Voi me lo portate nel campo della fisiologia o me lo rinchiudete nei cancelli del vostro laboratorio; e qui mettete in moto le correnti nervose, i processi fisiologici, le cellule cerebrali, il valore degli sperimenti sino al termine delle vostre indagini. Che se si tratta di problemi così elevati, che si ribellano ai vostri apparati meccanici, e sfuggono alla cerchia delle vostre osservazioni sensibili, quali sono quelli, che riguardano l'intima natura dello spirito umano, la sua libera attività morale, la sua suprema destinazione oltremondana, voi li rigettate senza più fuori dal dominio della scienza, siccome destituiti di ogni valore oggettivo e razionale.

I seguaci dell'idealismo assoluto avevano sacrificata la materia alla concezione dello spirito universale, che vive e si muove in tutte le cose. I novatori de' giorni nostri, balzando all'estremo opposto, hanno sepellito lo spirito sotto la mole della materia, e rinnegando in nome della modernità tutta la filosofia spiritualistica hanno ricostrutto sulle sue ruine una scienza nuova di tutto punto, che non ha più nulla di comune coll'antica. Ma il moderno, che non si addentella coll'antico, manca di fondamento: spunterebbe dal nulla e si risolverebbe nel nulla (1). I propugnatori del fisiologismo contemporaneo (con siffatto nome io appello tutte le nuove dottrine) muovono da un duplice preconcetto: essi s'immaginano di avere aperto alla scienza una nuova via, la vera e sicura via dell'esperienza sensibile, e di averla ad un tempo richiamata dalle vuote astruserie idealistiche allo studio della realtà, quale sussiste e vive nell'organismo corporeo umano in particolare, e negli organismi della natura in universale. Ma in ciò mostrano di non avvedersi, che la vera e costante filosofia da essi ripudiata, quella che il Leibnitz appellava *perennis quaedam philosophia*, non ha mai nè respinta, nè trascurata l'esperienza sensibile, siccome fonte di quelle cognizioni, che riguardano il mondo fisico e fisiologico, non ha mai nè rigettato, nè trascurato lo studio dell'organismo corporeo umano nelle sue vitali attinenze collo spirito, che lo informa.

(1) Vedi Appendice *A*.

La novità, che essi proclamano, risiede nell'avere esagerata la virtù dell'esperienza sensibile ed esclusa la ragione speculativa, la quale scorge e contempla quello, che vi ha di assoluto, di immutabile, di perenne nell'universo; risiede nell'avere esagerata la virtualità fisiologica della materia ed escluso quanto si stende oltre il mondo dei sensi corporei; risiede insomma in una mera negazione.

Giusto è riconoscere che i seguaci delle nuove dottrine hanno dato al processo sperimentale un più potente impulso, che si desiderava, ed allargando il campo dell'osservazione sensibile hanno saputo arricchire di importanti notizie la scienza dell'uomo e della natura vivente; ma essi non ci potranno mai dare che una scienza mutilata e troncata della sua parte più nobile e sostanziale, una scienza che si ferma alla parvenza delle cose, e non risale dalla meccanica della materia alla dinamica della vita. Colla loro antropometria non giungeranno mai a misurare le profondità dell'anima, a scandagliare gli immensi problemi, che si agitano nelle intimità dello spirito umano. Già i fatti stanno lì a provare, che le nuove dottrine male adempiono le grandi speranze, che hanno suscitato, e che il positivismo va ogni dì più eclissandosi. Francesco Bacone richiamando il pensiero sulla via dell'osservazione e dell'esperienza lasciava scritto che " occorre aggiungere piombo e pesi, non ali all'intelletto umano „ (1). Oggidì vale la sentenza opposta: necessita ridonare le sue ali al pensiero, affinchè dalle angustie dell'esorbitante empirismo risalga al cielo della scienza. Vera ed integra scienza è quella sola, che investiga entrambi i due mondi dello spirito e della materia mediante l'opera concorde della ragione speculativa e della esperienza sensibile (2).

Il significato dell'argomento ed i problemi.

L'argomento, che imprendiamo a discorrere, merita uno studio accurato e profondo pari alla sua somma importanza, giacchè tocca i più elevati e vitali interessi della scienza e della vita. La scienza nel suo sviluppo storico si trovò sempremai in lotta

(1) *Nuovo organo*, libro I, aforisma 104. Vedi pure l'aforisma 124.
(2) Vedi Appendice *B*.

coi due opposti sistemi dello spiritualismo smodato e del materialismo, che si contendono il campo. La vita morale presente è una lotta continua, che si agita in fondo della coscienza, tra lo spirito e la carne, e la vita religiosa futura importa che l'anima sopravviva al dissolvimento del corporeo organismo. La stessa nostra vita intellettiva, estetica e sociale non può procedere sicura nel suo progressivo sviluppo, se e mente e corpo non armonizzano insieme nell'acquisto delle cognizioni, nel culto dell'arte, nella convivenza umana.

Io ho preso le mosse dalla dualità di spirito e di materia, di anima e di corpo, ed intorno ad essa ho raccolto quanto realmente sussiste fuori di noi, quanto idealmente esiste dentro il nostro pensiero e si estende nel campo della scienza. Ora entrando nell'argomento ci si affaccia sin dalle prime una gravissima questione pregiudiziale, che ci attraversa la via. Voi partite da una dualità di principii entrambi supremi: ma la dualità presuppone anteriore a sè la unità, il due non si dà senza l'uno, che lo preceda. Dunque lo spirito e la materia, l'anima ed il corpo non sono due realtà entrambe assolutamente supreme, ma debb'esserci un principio superiore ed assolutamente unico, in cui si contengano ed abbiano la loro ragione; ed è da questo unico principio che occorre prendere le mosse. Dunque il punto di partenza sta non nella dualità ma nel monismo. Ecco la questione pregiudiziale. Lo scioglimento di tale questione ci porta ad altri problemi. Poichè io posso supporre che questo principio supremo non sia nè spirito, nè materia, ma un'entità superiore, assolutamente indeterminata, priva di ogni qualità, che la distingua, di ogni modo particolare di esistenza, quale sarebbe l'essere-nulla di Hegel; oppure che sia uno spirito, il quale sussista esso solo e non comporti l'esistenza della materia; ovvero anche sia materia universale, esistente per sè ed esclusiva dello spirito. Nel primo caso il monismo è indeterminato; nel secondo supposto è uno spiritualismo assoluto, nel terzo un materialismo. Il monismo della prima specie non regge; poichè un Assoluto, di cui nulla si conosce, di cui non si può dire che cosa sia, è un nulla; non esiste in realtà, perchè ogni realtà è determinata così e così; è una mera astrazione, che ci formiamo togliendo a ciascuna cosa le sue qualità distintive e ristringendoci alla nota comunissima dell'esistenza

universale; è una mera creazione del pensiero, epperò importa superiore a sè una mente che la produca.

I seguaci del monismo indeterminato potrebbero dimandare: forsechè ripugna l'esistenza di nature, che intermediino tra lo spirito e la materia, pur non essendo nè l'uno, nè l'altra? Giovanni Clerico non iscorge in ciò ripugnanza di sorta. È bensì vero, egli avverte, che tutti gli esseri da noi conosciuti sono o spirituali, o materiali; ma noi non abbiamo ragione di affermare che non esistono altre sostanze se non quelle, che conosciamo. Poichè la virtù creatrice di Dio si stende infinitamente al di là dei limiti del nostro intendere, epperò può creare sostanze, di cui non abbiamo la menoma idea (1). Il ragionamento di questo filosofo regge alla critica, ma non conforta punto il monismo, di cui parliamo, bensì lo infirma. Poichè egli stesso conviene, che noi non possiamo logicamente dimostrare, che Dio abbia effettivamente creati siffatti esseri a lui possibili ed a noi affatto ignoti, mentre la nostra questione attuale riguarda non il campo della possibilità, ma il mondo della realtà. Inoltre, stando alla proposta ipotesi, l'unità suprema, di cui discorriamo, non andrebbe più riposta nelle nature intermedie tra lo spirito e la materia, vuoi possibili, vuoi reali, bensì in Dio, dove avrebbero la loro ragione di essere.

Venendo alla seconda forma del monismo, che è lo spiritualismo assoluto ed esclusivo, occorre fare una distinzione. Il monismo spiritualistico è vero, quando si riferisca a Dio, falso se si applica agli esseri finiti, all' universo creato. Dio è spirito infinito, che basta a sè, indipendente dalla materia; e come tale è la vera unità suprema, il principio di ogni realtà finita, sia spirituale, sia materiale. Ma parlando degli esseri creati, non è punto vero che lo spirito sia esso solo tutta la realtà cosmica ed esista per sè solo disgiuntamente ed indipendentemente dalla materia. Nell'universo creato lo spirito sussiste in contatto colla materia; nell'uomo l'anima vive congiunta col corpo. È noto nella storia della filosofia l'idealismo di Giorgio Berkeley (1684-1753), il quale coll' intendimento di dare allo spiritualismo un incrollabile fondamento trascese all'estremo di

(1) Il passo del Clerico è citato dal Cudworth nel *Systema intellectuale*, tom. I, pag. 224, e si legge nella *Bibliothèque choisie*, tom. 2, art. 2, pp. 107-108.

negare la realtà sostanziale della materia considerando i corpi siccome idee fittizie del nostro spirito, e niente più. " La terra (egli scrive al § 6 della sua *Teoria dei principii della conoscenza umana*), e tutto ciò, che adorna il suo seno, in una parola tutti i corpi, il cui complessivo insieme compone questo magnifico universo, punto non esiste fuori dei nostri spiriti „. Ma egli non avvertiva, che al nostro spirito non verrebbe fatto di acquistare le idee dei corpi, se essi non producessero sui nostri sensi una conveniente impressione, e conseguentemente già non esistessero in realtà fuori di noi.

Il monismo materialistico pone la materia siccome l'unico e supremo principio originario di quanto esiste. Nella storia della filosofia esso apparve fin dai primi tempi della speculazione, e mutando forme ed indirizzo continuò il suo processo evolutivo fino a noi. Già l'antica scuola sankya indiana concepiva la materia siccome l'essere universale indeterminato, informe, che contiene in sè tutte le forme particolari dell'esistenza, sia corporee, sia spirituali, senza rivestirne alcuna. Questo concetto monistico della materia fu riprodotto presso i Greci da Talete, Anassimandro, Eraclito, che ricercarono il principio originario di tutte le cose in un elemento materiale. Nei primi secoli del Cristianesimo il concetto materialistico vuolsi professato da non pochi fra gli stessi Padri della Chiesa (1). Ai dì nostri il monismo materialistico, facendo suo pro dei grandi e svariati progressi, che da Galileo a noi fecero le scienze naturali nello studio dell'universo materiale, assunse una forma affatto nuova ed un esorbitante atteggiamento, sino ad invadere il dominio proprio delle scienze dello spirito. Prendendo le mosse dalla materia elementare, esso venne a specificarsi in due scuole. L'una considera il movimento come intrinseco alla materia e cerca di spiegare tutti i fenomeni della natura e dello spirito mediante il congegno di movimenti molecolari; è la scuola materialistica meccanica. L'altra riguarda la forza vitale come intrinseca alla materia e si argomenta di ritrovare in essa la ragione spiegativa di tutto, assegnando a ciascun fenomeno fisiologico o mentale il suo organo corrispondente: essa è la scuola vitalistica o dinamica. Ma il monismo materialistico, di qualunque specie esso sia, si trova

(1) Vedi il mio opuscolo *La vita oltremondana*, pag. 46.

di fronte a queste difficoltà, che mostrano la sua debolezza, perchè dovrebbe e non sa risolverle. Come mai ed in qual parte dell'organismo umano l'impressione materiale esterna si cangia in sensazione animale? Come e dove mai la sensazione animale si muta in immagine fantastica e questa in concetto od idea della mente? Come mai l'unità semplicissima del nostro io, che ci è attestata dalla coscienza, potrà risiedere nella moltiplicità degli organi formanti il nostro corpo, o in ciascun organo, che è pur sempre divisibile in parti? Del resto poi la distinzione medesima dei fenomeni vitali in fisiologici e psichici non è punto un argomento favorevole al monismo materialistico. Questo sistema ha varcati i limiti proprii della fisiologia e delle scienze naturali, ed in ciò sta la sua insussistenza: esso è un fisiologismo, non la scienza fisiologica, nè psicologica. Il fisico, il chimico, il fisiologo nei loro laboratorii, muniti di macchine e di acconci strumenti, investigano la natura e le ragioni dei fenomeni della materia vuoi inorganica, vuoi animata e vivente, e non pretendono punto di spiegare i fenomeni mentali proprii dello spirito, perchè trascendono la loro cerchia sperimentale. Siffatta pretesa è tutta propria del materialista, il quale confonde insieme due specie di scienze affatto distinte, la fisiologia e la psicologia.

Il concetto della materia ed il concetto dello spirito.

Questo rapido esame del monismo ci conduce a riconoscere nell'universo la dualità dello spirito e della materia, nell'uomo la dualità dell'anima e del corpo. Ma in qual rapporto stanno fra di loro queste due specie di sostanze cosmiche? Hanno esse fra di loro un vincolo di attuosa colleganza, oppure vivono e si svolgono in due mondi affatto estranei e separati? È chiaro, che torna impossibile scoprire il giusto rapporto tra l'una e l'altra, se dapprima non avremo fermato per bene il loro concetto e determinata la natura propria di ciascuna.

Che cosa è adunque lo spirito, che cosa è la materia? Ognuno riconosce la somma importanza di tale inchiesta, la quale a tutta prima potrebbe a taluno parere un'astruseria della scolastica del medio evo. Basti avvertire, che dal giusto concetto dello spirito e della materia dipende il vero e sicuro progresso

delle scienze filosofiche e naturali ed il componimento della lotta che si dibatte tra lo spiritualismo ed il materialismo. Però quanto è grave ed importante la proposta dimanda, altrettanto è ardua e difficile ad essere satisfatta. Poichè la storia della scienza ci presenta diversi e discordi concetti intorno la natura propria di queste due sostanze, perchè le riguardarono chi sotto un aspetto, chi sotto un altro.

Anzi tutto ci si presenta l'opinione di que' filosofi inglesi, i quali sentenziano che la natura propria dello spirito e della materia ci è affatto inconoscibile. Bacone afferma, che la ragione non può stabilire nulla di vero e di certo intorno la natura dell'anima umana, e che tutto quel po' che ne sappiamo, lo dobbiamo alla rivelazione divina. Locke sostiene essere lecito il dubitare, se la materia possegga la virtù del pensare, val quanto dire se materia e spirito siano tutt' uno. La scuola scozzese pronuncia, che della materia e dello spirito conosciamo soltanto i fenomeni e le manifestazioni esteriori, ma ne ignoriamo l'intima costitutiva natura (1), sicchè non ci è dato di rilevare se il nostro io pensante sia una sostanza spirituale, o materiale. Ma questa pretesa inconoscibilità assoluta della materia e dello spirito posa sull'erroneo principio, che si possono conoscere i fenomeni ed ignorare la sostanza a cui appartengono e che essi rivelano.

Che cosa è dunque la materia? Gli antichi sapienti, che filosofarono assai prima di Platone e di Aristotele, concepirono la materia siccome incorporea, ossia diversa dal corpo. Materia appellavano quella natura universale, che entra a comporre tutti i corpi, corpo invece una porzione di materia, che ha certe qualità speciali, come una figura, una grandezza, un peso, e va discorrendo, sicchè la materia non avendo qualità di sorta, non cade sotto i sensi, mentre il corpo è sensibile (2). Questo concetto ricomparve in Aristotele, il quale vi aggiunse quello di

---

(1) " La materia, del pari che lo spirito, non ci è conosciuta se non in virtù delle sue qualità ed attitudini: ciò, che costituisca l'essenza dell'una e dell'altro, lo ignoriamo assolutamente " (Dugald Stewart, *Filosofia dello spirito umano*, introduz., parte II).

(2) Vedi Mosemio presso Cudwort, *Systema intellectuale*, ecc., tomo 2, pag. 274 e seg.; Timeo di Locri, nel *De anima mundi*, § 22; S. Agostino, *Le Confessioni*, lib. 12, cap. 3 e 6.

forma siccome vincolo tra la materia ed il corpo, poichè egli concepiva la materia siccome una entità indeterminata, informe, passiva, inerte, ma capace di essere investita dalla forza o forma e quindi ricevere da essa il moto, la vita, le determinazioni particolari costitutive dei singoli corpi.

Questa distinzione tra la materia considerata nel suo aspetto universale, indeterminato, ed i corpi particolari, ha un fondo di verità. Poichè è bensì vero, che l'ossigeno ad esempio, il piombo, il fiore sono corpi specificamente diversi, ma sono tutti materia, posseggono tutti la nota comune ed universale della materialità. Però in che consiste questa materialità? Qual è il concetto che possiamo formarcene? Ecco quel che ci importa di sapere, e che rimane in perfetto buio. Io sono di avviso, che a determinare la natura propria della materia occorre distinguere ciò, che vi ha in essa di essenziale e necessario, da ciò che vi ha di estrinseco e di accidentale, e lasciare da banda quanto vi ha di incerto e disputabile su questo punto.

Ciò posto, la materia si presenta alla nostra osservazione sotto due grandi specie: evvi una materia inorganica, inanimata, bruta, ed una materia organica, animata, vivente. La prima è dominata dalla forza fisica motrice, in virtù della quale i corpi inorganici gravitano verso un centro, si attraggono e si respingono, si muovono da un luogo all'altro, si compongono e si scompongono nelle loro molecole; la seconda è governata dalla forza vitale, che produce le funzioni fisiologiche negli organismi viventi siano vegetali, siano animali. Diremo noi che l'essenza della materia risieda nella forza fisica motrice? Non abbiamo ragione di asserirlo, sia perchè si danno corpi inanimati, che non sono mossi, ma stanno in assoluto riposo, e sia perchè colla sola forza fisica motrice torna impossibile spiegare le funzioni fisiologiche della materia organica vivente. Ad ogni modo è pur sempre una questione controversa, se il moto sia intrinseco ed essenziale alla materia, oppure la forza motrice sia estrinseca e distinta dalla materia, quantunque da essa inseparabile, e questa controversia già per sè sola non ci consente di riporre l'essenza della materia nella forza motrice. Risiederà essa nella forza vitale? Se così fosse, tutta quanta la materia sarebbe vivente, organica, animata, e dovremmo perciò niegare l'esistenza del mondo inorganico ed inanimato, che pure è un dato incon-

trastabile dell'osservazione. Nessuno dirà mai, che un pezzo di granito, di marmo, di piombo sia un organismo, in cui circoli la vita. Ed anche qui può sorgere la questione discutibile in sensi diversi, se la forza vitale sia intrinseca ed essenziale alla materia, o no.

Affermando che l'essenza della materia non va riposta nella forza, non intendo di separare l'una dall'altra come se ciascuna potesse stare da sè, bensì voglio dire che l'una non è identica coll'altra. Distinzione non vuol dire separazione. L'occhio è inseparabile dalla luce, ma tuttavia non è la luce, è distinto da essa. In che adunque dimora l'essenza della materia presa in sè stessa, distintamente dalla forza? Noi non possiamo concepire la materia sia essa inorganica o dominata dalla forza motrice, sia organica o governata dalla forza vitale, senza considerarla come estesa nello spazio, e quindi divisibile, impenetrabile, per guisa che i punti, o gli atomi, che la compongono, occupano ciascuno un proprio luogo e sono posti l'uno fuori dell'altro. Senza estensione non si dà materia, dunque l'estensione è essenziale alla materia, giacchè l'essenza di una cosa è ciò, senza di cui essa non sarebbe quello, che è. Nè mi si dica che gli atomi sono inestesi, eppure sono materia. Poichè se fossero davvero inestesi, si ridurrebbero ad un punto matematico semplicissimo, e quindi ad una entità meramente astratta, che non ha punto da fare colla realtà della materia, la quale essendo essenzialmente estesa, non può di sicuro emergere da elementi inestesi, quali si suppongono gli atomi. Le forze della natura sono semplici ed inestese, ma per ciò appunto si distinguono dalla materia.

Dal basso e scuro mondo della materia innalziamoci al mondo dello spirito, dove l'aria è più spirabile, la luce più limpida e più pura. Qui veramente siamo, possiam dire, a casa nostra, poichè questo nostro corporeo organismo, che fa parte dell'universo materiale, è un abitacolo, dove alberga un'anima spirituale. Quindi è che deve tornare più facile al nostro io l'intendere sè stesso, che è spirito, che non l'intendere cosa, che non è lui, cioè la materia. Alcuni sostengono, che dello spirito abbiamo un concetto meramente negativo, sappiamo cioè che esso non è materia e niente più: opinione insussistente, poichè il concetto negativo presuppone sempre un certo qual concetto

positivo. Io non avrei ragione di affermare che lo spirito non è materia, se ignorassi affatto la sua natura, se non conoscessi di lui quel tanto, che occorre per distinguerlo dalla materia. Che esso non sia materia, sta bene: in che dunque risiede la sua natura?

A scansare ogni equivoco giova far distinzione tra spirito e anima razionale. Ogni anima dotata di ragione, quale appunto è l'anima umana, ha una natura spirituale, ma è vitalmente congiunta con un organismo corporeo, e per ciò appunto si appella anima, perchè esercita sopra di esso una virtù animatrice, per cui non è uno spirito puro. Ma noi abbiamo altresì il concetto di nature spirituali riguardate nella loro purezza, sciolte da ogni contatto colla materia, quale è Dio e gli spiriti angelici, che formano oggetto delle credenze religiose dei popoli. Il concetto della nostra anima razionale ci fornisce il punto di mossa da cui dobbiamo esordire per iscoprire la natura costitutiva dello spirito. Ognuno di noi porta con sè la storia della sua vita intima, e raccogliendo la sua attenzione sulle pagine di questo libro può rilevare il fondo spirituale della sua natura. Il mondo interiore della coscienza è un teatro, dove lo spirito nostro è attore e spettatore ad un tempo. Egli non ha che da interrogar sè medesimo e vedrà rispecchiato sè stesso nei fatti suoi. Dal come egli vive ed opera, si arguisce ciò, che esso è.

Rientriamo in noi stessi, chiamiamo a rassegna i fenomeni più salienti e più sostanziali, che si avvicendano nella sfera della nostra coscienza e formano il tessuto della nostra vita psichica, lasciando da banda quelli, che appartengono più propriamente alla nostra vita animale. Io penso, e pensando conosco: pensieri e conoscenze, ecco una prima e rilevantissima categoria di fatti interni. Senza pensare e conoscere non si vive la vita dello spirito. Immensa è la distanza, che corre tra i pensieri e le idee dell'idiota e quelli del genio; tuttavia non evvi anima umana, che non pensi e non conosca alcunchè nell'immenso mare dell'essere, e se non altro, non abbia l'idea di sè.

Non solo io penso e conosco, ma altresì liberamente voglio quello, che ho pensato e conosciuto e volendo opero. Ecco una seconda e singolarissima classe di fatti interni, che si appellano azioni o voleri liberi, e che si mostrano sotto svariatissime forme, quali sono l'integrità e la colpa, l'amore e l'odio, le spe-

ranze ed i disinganni, la pace ed il rimorso, insomma tutto quel flusso e riflusso di passioni morali, che formano il dramma della nostra povera vita. In queste due supreme categorie di fatti interni si esplica tutta quanta la vita del nostro spirito, e da ciò, che esso fa, si arguisce ciò, che è.

Esso pensa e conosce, dunque è fornito di intelligenza conoscitiva; esso vuole ed opera intelligentemente; dunque è dotato di libera attività volontaria: in questi due attributi risiede l'essenza costitutiva dello spirito umano e della nostr'anima razionale. In virtù dell'intelligenza egli ha la coscienza di sè, afferma sè medesimo e distingue il proprio io da tutto ciò che non è lui; in virtù dell'attività volontaria possiede il libero dominio di sè ed è arbitro del proprio operare. La coscienza di sè ed il dominio di sè fanno di lui un essere personale; onde possiamo altresì affermare, che la personalità costituisce l'essenza dello spirito.

Questo concetto dello spirito, che abbiamo attinto dall'esame della nostra anima razionale, abbraccia nella sua estensione qualsiasi specie di spirito, e quindi conviene altresì agli spiriti puri, quali sono Dio e le creature angeliche. Dovunque c'è la persona, cioè un soggetto dotato di intelligenza ed attività volontaria, là vi è lo spirito. La persona è una energia, un'attività, una forza, non cieca, ma intelligente e conscia di sè, non fatale e necessitata, ma libera e signora di sè. Di qui la dignità tutta propria dello spirito, e la sua eccellenza sulla materia. Lo spirito pensa e conosce il mondo della materia e lo ricostruisce mentalmente entro di sè, lo domina e lo trasforma informandolo giusta il suo ideale: la materia non conosce nè sè stessa, nè lo spirito, non domina sè medesima, ma è irrepugnabilmente dominata dalle forze, che la investono. Direi che la materia è un corpo opaco, il quale riflette la luce dello spirito, che la illumina. Quindi ancora lo spirito percorre tutta la distesa dei secoli e dei luoghi, mentre ogni corpo è circoscritto ad un punto del tempo e dello spazio. Parlando in particolare dello spirito umano, esso ha doveri da adempiere, diritti da esercitare, è conscio della sua finale destinazione, e gli ripugna essere adoperato come strumento ai voleri altrui, perchè ha un carattere sacro ed inviolabile, mentre le sostanze materiali non hanno nè doveri, nè diritti, ignorano il perchè esistano e sono ordinate a servire di strumento allo spirito.

Attinenze tra lo spirito e la materia.

Determinata la natura propria dello spirito e quella propria della materia, e riconosciuta la dualità dei termini, in cui si specifica la realtà universa, occorre ricercare in quale rapporto essi stiano l'un verso l'altro. Sono essi affatto isolati ed affatto estranei l'uno all'altro per guisa che ciascuno sussista e si muova in un'orbita solitaria senza punto comunicare fra di loro? Noi sappiamo che secondo Aristotele Dio e la materia sussistono isolati senza verun punto di contatto fra di loro. Dio è spirito infinito, che non pensa il diverso da sè, la materia, non ha altro oggetto del suo pensiero, che sè medesimo; è il pensiero del pensiero, è atto purissimo. Alla sua volta la materia esiste e vive per virtù sua propria e racchiude in sè il principio delle sue trasformazioni, de' suoi fenomeni. Nella storia della filosofia moderna Cartesio interpose anch'egli un abisso tra lo spirito e la materia: l'uno è fornito di attributi assolutamente opposti ed inconciliabili con quelli dell'altra: lo spirito è essenzialmente pensiero, la materia essenzialmente estensione.

A questo concetto di Cartesio si accostarono Spinoza e Leibnitz, i quali sostennero che le sostanze non hanno fra di loro nessuno scambio di attività e di vita. Se applicassimo questo principio alla pedagogia, saremmo per logica necessità condotti a negare quel vincolo di armonia, che deve collegare l'educazione fisica con la coltura mentale.

Diremo noi che spirito e materia, se non sono affatto isolati e solitarii, siano l'uno e l'altro in perpetuo antagonismo e dissidio di loro propria natura? Tale è la sentenza di Platone. Egli contrappone la materia allo spirito come il non ente all'ente, come le tenebre alla luce, il male al bene: e sebbene l'artefice divino si giovi della materia per improntare in essa i suoi eterni archetipi, pur tuttavia esso la trova ribelle e sorda a rispondere all'ideale della sua mente. Questo antagonismo tra la materia e lo spirito nell'universo si riproduce sotto forma speciale nell'uomo. Platone riguarda la vita psichica dell'io umano siccome una continua lotta tra l'anima, che aspira alla contemplazione della verità pura, al possesso del Bene sommo,

ed il corpo, che la aggrava e la trascina all'ingiù nel basso mondo della materia.

È sentenza universalmente ammessa, che lo spirito e la materia, malgrado la loro essenzial differenza, abbiano fra di loro un intimo vincolo di colleganza, per cui si corrispondono e si richiamano a vicenda. Già gli antichi Caldei, seguiti in ciò dai filosofi pitagorici e platonici, insegnavano che anche gli spiriti così detti puri, ossia differenti dalle anime umane, hanno un corpo loro proprio formato di una materia sottilissima, eterea, tenuissima ed impalpabile che non è il nostro corpo grossolano e pesante, ed aggiungevano che anche le anime umane nella vita futura rivestono un involucro etereo sottilissimo, che terrà luogo di questo corpulento organismo disfatto da morte.

Il filosofo pitagorico Jerocle opinava, che tutte quante le sostanze intelligenti, quali i genii, gli angeli, i demoni, sono animi ragionevoli congiunti con un corpo etereo invisibile (1). Questa antica sentenza intorno l'involucro corporeo degli spiriti puri venne seguita da non pochi scrittori cristiani primitivi e da alcuni scolastici, e pare a me che abbia potuto aver origine dalla somma difficoltà, che prova la mente nostra nel concepire uno spirito in tutta la sua assoluta purezza, giacchè anch'essa la nostra mente pensa ed intende congiunta con un organismo corporeo: di qui la sentenza di Aristotele, che l'anima nulla può pensare senza fantasmi.

Dallo spirito e dalla materia coesistenti nell'universo passiamo all'anima ed al corpo coesistenti nel nostro essere. Qui ci si rivela a caratteri evidenti ed in tutta la sua potenza l'intima colleganza tra le due nature. Noi siamo una vivente armonia di spirito e di materia. Fuori di noi Dio, spirito infinito, agita e muove, e governa la gran mole della materia da lui creata: in noi lo spirito avviva l'organismo corporeo e lo atteggia a norma de' suoi intendimenti e voleri. In sentenza dello Stahl l'anima crea il proprio corpo, lo muove, lo informa, lo governa. L'io umano armonizza nella sua unità personale la dualità delle due sostanze, fisica e mentale. Esso è consapevole che entrambe gli appartengono, che sono sue, e che la sua vita circola dall'una all'altra con perpetuo movimento; ma ben sa ad un tempo

(1) Vedi la mia opera *La vita oltremondana*, pagg. 20, 21, 45, 46, nota 3.

che ciascuna ha natura sua propria ed inconfondibile, sicchè l'una primeggia sull'altra come più nobile e più prestante senza che l'armonia personale venga menomamente offesa. Quindi egregiamente scrisse Sallustio in sull'inizio della sua *Catilinaria*: " Nostra omnis vis in animo et corpore sita: animi imperio, corporis servitio, magis utimur „; e nel numero secondo della *Giugurtina*, accennando al diverso operare delle due sostanze lasciò scritto: " Nam uti genus humanum compositum ex anima et corpore; ita res cunctae, studiaque omnia nostra, corporis alia, alia animi, naturam sequuntur „.

La materia ed il male.

Unde malum? È questo uno dei più gravi ed ardui problemi, che si agitino in metafisica. Suolsi distinguere differenti specie di mali. Evvi un male, che tocca gli esseri sensitivi ed animati, il dolore. Si dà un male, che offende le nature intelligenti, l'errore. Altra specie di male è quello, che deturpa le nature fornite di libera volontà, la colpa. Alcuni ammettono un male così detto metafisico, riposto nella limitazione inerente ad ogni cosa creata, essendochè ogni essere finito possiede gli attributi proprii della sua specie, manca di quelli, che appartengono ad esseri di specie diversa; ma la limitazione non può costituire un male propriamente inteso, perchè tolti questi limiti distintivi delle singole specie, si ruinerebbe in un male universale, tutti gli esseri finiti si confonderebbero in un immenso disordine. Il pessimismo antico e moderno reputa un male l'esistenza medesima ed in tutto l'immenso universo non iscorge altro che male.

Io non intendo di discorrere questo gravissimo argomento in tutta la sua ampiezza, ma mi ristringo a considerar il male nelle sue attinenze colla materia. Platone, rintracciando l'origine del male, la ripose nella materia prima universale. Essa non ha veruna formá particolare, che la rivesta, nessuna qualità, che la determini, nessuna attività od energia, per cui si manifesti e si muova, nessuna luce, che la illumini. Se il male sta nel difetto, nella privazione, nell'incoscienza, la materia ne mostra tutti i caratteri, essendo una entità priva di ogni forma, mancante di ogni qualità, inerte, passiva, cieca, tenebrosa, vuota di

realtà: non è nessun essere particolare, è un non ente. Questo concetto platonico del male apparisce più manifesto se dalla materia ascendiamo a Dio. Secondo il filosofo ateniese, Dio ha formato l'universo improntando nella materia già esistente le idee archetipe delle cose, presenti alla sua mente, sicchè egli non ha creato il mondo dal nulla, ma lo ha tratto dalla materia, a guisa di un artefice umano, che impronta nel marmo o nella tela il suo ideale. Però la materia oppose all'artefice supremo una resistenza insuperabile, per cui l'idea divina mai non può essere improntata in tutta la sua purezza; laonde anche sotto questo riguardo la materia è il principio del male.

Questa teoria platonica del male si riscontra altresì nella sua dottrina psicologica. Quello, che è la materia riguardo a Dio nell'universo, lo è il corpo riguardo all'anima nell'uomo. L'organismo corporeo è un'oscura prigione, dove l'anima geme sotto il peso della schiavitù: i sensi la acciecano e le contendono la visione della verità, le passioni la tiranneggiano, i fantasmi materiali le impediscono la contemplazione del bello, essa allora soltanto sarà libera e beata di sè, quando uscirà dall'involucro corpulento, che la avviluppa. Così il corpo è il principio del male per l'anima. Di qui la sentenza platonica, che la filosofia è la meditazione della morte.

Il Cristianesimo (sentenziano alcuni) impone a' suoi credenti di odiare la carne, abbominarla, detestarla siccome peccaminosa per sè stessa, il sommo dei mali, sicchè lo spirito debb'esserne il carnefice, martoriandola e sacrificandola in omaggio alla grazia santificatrice. Quest'accusa è affatto infondata. Il Cristianesimo non impone a nessuno il rigido ascetismo del convento, ma impone a tutti come dovere questo solo, che lo spirito tenga a freno e domini la parte animale dell'uomo. Il peccato non istà nella carne (1), bensì nello spirito, che abdica al suo impero e si abbassa sino al fango dell'animalità. Il corpo non ha nulla in sè di colpevole e di abbominabile, purchè sia tenuto a suo

---

(1) Augusto Sabatier nella sua *Questione dell'origine del peccato nel sistema teologico di San Paolo* scrive: " Il desiderio della carne diventa malvagio e colpevole solo allora che è venuta la legge, e che la volontà ha dato la sua espressa adesione all'istinto della carne, ossia che l'istinto è divenuto atto volontario, e però morale ".

posto. La materia non va esaltata sino ad essere spiritualizzata, nè lo spirito depresso sino ad essere materializzato. La carne va tenuta a freno, ma non distrutta. Anche la vita animale ha il suo proprio pregio, perchè fa parte essenziale della natura umana. Il Redentore dell'umanità ha sortito egli stesso membra umane, ed il Cristianesimo è tanto lontano dal negare alla materialità umana il suo pregio e dal detestarla come un male, che proclama il dogma del finale risorgimento dei corpi umani.

" Sì (scrive a questo proposito Tertulliano nel cap. VIII della sua opera *De resurrectione carnis*) la carne ha la sua dignità. Infatti non è forse mercè del suo ministero che l'anima gode de' beni della natura, delle ricchezze del mondo e dell'incanto degli elementi? Non è forse mediante la carne che essa è provveduta dell'apparecchio de' sensi della vista, dell'udito, dell'odorato, del gusto, del tatto? Col mezzo di essa è armata di una potenza divina, capace di tutto operare colla parola, ed anche col muto linguaggio del gesto e dello sguardo. Di certo la parola è uno degli organi della carne. La carne! Essa è il veicolo delle arti, il sostegno della scienza e del genio, la condizione dell'industria, della società, dell'attività tutta quanta. La vita dell' anima è la vita della carne a tal segno, che la morte è niente più, per l' anima, se non la sua separazione dalla carne. Quando l'anima è consacrata al servizio di Dio, è la carne, che la pone in grado di ricevere quest'onore. È la carne che è lavata, perchè l'anima sia purificata: è sulla carne, che si fanno le unzioni, perchè sia consacrata: la carne è improntata del sacro segno, perchè sia fortificata: la carne è coperta della imposizione delle mani, perchè sia dallo spirito illuminata: la carne si nutre del corpo e del sangue di Cristo, perchè s'ingrassi della divina sostanza „. Di qui l'illustre scrittore cristiano trae argomento per conchiudere che l'immortalità dell'anima importa con sè l'immortalità del corpo.

Platone ripose nella materia la fonte originaria del male, ma se noi poniamo ben mente alla natura propria di essa e la raffrontiamo con quella propria dello spirito, ci troviamo condotti ad una sentenza affatto opposta. Platone concepiva la materia siccome una entità destituita di forma, di qualità, di attività, epperò identica col non ente, e come tale la reputava

l'essenza del male; ma di tal modo la riduceva ad un concetto meramente astratto, immaginario, vuoto di realtà, e per conseguenza non racchiude in sè nessuna ragione nè di bene, nè di male. La materia essendo correlativa allo spirito, va anch'essa riguardata quale una realtà, come è una realtà anche lo spirito, e considerata sotto questo aspetto esclude dalla sua natura il principio del male. Infatti in che dimora l'essenza del male? Non certo nella limitazione, nella mancanza, nella privazione metafisica, poichè l'ordine vuole che gli esseri dell'universo si distinguano gli uni dagli altri sicchè ciascuno sia limitato nella propria specie e manchi dell'essenza propria delle altre nature. È forse un male, che un macigno non viva, che un fiore manchi delle qualità caratteristiche del cavallo? Dovremmo dunque affermare che il male sta nell'ordine? Che anzi la verità sta nella sentenza diametralmente opposta: il male preso nella sua vera essenza risiede nel disordine.

Ciò posto, paragoniamo questo concetto del male con quello della materia e troveremo che si escludono essenzialmente. Infatti il mondo della natura fisica materiale è governato da leggi ineluttabili e costanti, da cui non può deviare giammai: la natura fisica non è arbitra di sè e conscia del suo operare, ma in tutte le sue mutazioni, in tutti i suoi fenomeni, in tutti i suoi lavori è inconsciamente dominata da una ferrea necessità. Essa ignora il disordine, epperò rimane estranea al male. Ecco il perchè la natura circostante ci apparisce arcanamente bella nell'ordine meraviglioso de' suoi movimenti, e nonchè suscitare nell'animo di chi la contempla sentimenti malvagi ed ignobili, innalza il pensiero ad un mondo ideale soprasensibile. Vero è che il regno della natura animata e vivente ci presenta tal fiata i suoi mostri, ma sono eccezioni rarissime, che non isconvolgono l'ordine universale.

Dalla natura propria della materia passiamo a considerare la natura propria dello spirito, ed è qui che ci si fa manifesta la possibilità del male. Poichè come fornito di intelligenza si forma il concetto del bene e del male, dell'ordine e del disordine, dell'onesto e del disonesto, come dotato di libera volontà ed arbitro del suo operare può conformarsi alla legge del dovere o violarla. Se dunque gli è certo, che il vero male sta nel disordine ossia nel traviar dalla legge, esso ritrova la sua origine nella libertà propria dello spirito.

Quindi la storia delle religioni ci apprende, che tutti i popoli credettero all'esistenza di spiriti malefici e riferirono la rovina ed il pervertimento del genere umano all'opera nefanda di un demone antico. Lucifero è additato siccome il genio del male personificato. Platone stesso, mentre ripone il principio del male nella materia, insegna ad un tempo che le anime umane nella loro vita beata anteriore alla presente si ribellarono alla Divinità, che le puniva intrudendole come in un carcere nell'organismo corporeo.

Nell'universo esteriore il mondo della materia si muove e si svolge in armonico accordo collo spirito divino, che lo governa a tenore delle sue leggi cosmiche: non vi è ombra di disordine, non vi è traccia di male: ogni cosa è a suo posto. In noi lo spirito e la carne, l'anima ed il corpo sono in continua lotta e generano il male. L'anima tal fiata si innalza nell'estasi tanto sublime, che quasi si scioglie dal suo corporeo organismo per entrare nel regno degli spiriti; tal altra volta discende dalla sua spirituale altezza, si abbassa sino al fango dell'animalità e si rassegna fra i bruti. Questo antagonismo fra i due principii costitutivi dell'umano soggetto non è conforme all'ordine voluto dalla natura. L'uomo sorse composto ad armonia in tutto il suo essere: il disordine fu opera sua, voluta da lui: egli si corruppe, perchè volle, abusando della sua libertà. Però la libertà del volere spiega bensì la possibilità del male, ma non il male esso stesso effettivo e reale, giusta l'adagio: *a posse ad esse non valet illatio.* Il disordine, sebbene nasconda le sue origini nei penetrali dello spirito, rimane pur sempre un impenetrabil mistero.

La ragion d'essere della materia e lo spirito.

La materia è il perpetuo inconscio, che non giunge mai alla coscienza di sè, è l'assoluto non pensante, che nulla conosce, nulla può conoscere. Ora l'inconscio non ha la sua ragion d'essere in sè stesso, non rivela il perchè esso esista, ma presuppone anteriore e superiore a sè una coscienza effettiva e reale, come principio spiegativo della sua sussistenza. La materia non è un soggetto pensante e conoscente, ma è pur pensabile e conoscibile, perchè tutto quanto l'essere, di qualunque specie sia,

è intelligibile, non si dà entità di sorta, che non sia oggetto del pensiero. Dunque la materia importa un soggetto pensante da essa distinto, che lo conosca. Questa coscienza effettiva e reale, questo soggetto pensante e conoscente è lo spirito, il quale perciò contiene in sè la ragion d'essere e la finalità della materia. Poniamo, che tutta quanta la realtà cosmica fosse ridotta al mondo della materia, distruggiamo coll'immaginazione tutti quanti gli spiriti esistenti, l'universo si muterebbe in un cieco caos, dove non risplende raggio di luce intellettuale, e non porterebbe l'impronta del pensiero divino, che l'ha costrutto. Fénélon lasciò scritto nella sua *Réfutation du système du Père Malebranche* che la creazione di un mondo privo di esseri intelligenti, anzi la creazione di un solo atomo di polvere non sarebbe opera indegna della divinità: sentenza insussistente, perchè interpone un abisso tra Dio e le sue creature, ignare di lui tutte quante. Che se la materia gravita verso lo spirito come suo centro e termine finale, questo a sua volta rinviene in quella l'organo necessario del suo esplicamento, la condizione essenziale della sua manifestazione. Infatti la coscienza psicologica, propria dello spirito, è l'affermazione del proprio essere identico con sè medesimo, e quindi la sua distinzione da ciò, che non è lui, dal diverso da sè. L'io importa il non io, l'identico richiede il diverso, come suo correlativo. Ora il non io contrapposto all'io, il diverso opposto all'identico è la materia opposta allo spirito.

Nè solamente nel puro campo teoretico lo spirito importa la materia per affermare e conoscere sè stesso, ma altresì nell'ordine operativo essa gli torna necessaria per esercitare fuori di sè la sua attività. Qui lo spirito spiega tutta la dovizia della sua potenza, giacchè impronta nel mondo della materia quelle forme dell'esistenza, che sono tutte proprie della medesima, e che egli possiede in sè nella loro mera idealità, imitando così l'Artefice sovrano (1).

---

(1) Questa dualità cosmica dello spirito e della materia, armonizzante nell'unità dello spirito divino, venne avvertita da Democrito, secondochè interpreta il Can. Dottor Antonino Russo a pag. 120, 167, 186 della sua opera *Vita di Democrito e scienza paragonata ai moderni, con risposte ad un hegelianista o positivista*, pubblicata da Salvatore Distefano. In questo ampio volume pregevole per molti lati e ricco di erudizione filosofica l'autore

Questa finale corrispondenza tra la materia e lo spirito nell'universo mostrasi in forma più spiccata ed intima tra il corpo e l'anima nell'uomo. Queste due sostanze in lui riunite sono fatte l'una per l'altra. L'anima umana non sarebbe più tale, se non informasse un organismo materiale, ed il corpo da essa separato non apparterrebbe alla specie umana. Hanno la loro ragione teleologica l'uno nell'altra, sicchè si prestano vicendevoli servigi, e pur compiendo ciascuno diverso ufficio hanno comuni le sorti della loro esistenza. " Dio vuole che tra questi due associati siavi comunanza di vita, di fine, di destinazione, e che questa comunanza giunga sino ad un certo segno fino all'identità. Infatti l'anima ed il corpo non facendo che un medesimo essere, a cui si attribuiscono egualmente e le affezioni dell'anima ed i movimenti del corpo, i ragionamenti e le sensazioni, l'inerzia e l'attività, non ne consegue forse, che tutto questo composto abbia la medesima sorte ed uno scopo unico? Non è forse necessario che vi regni una specie di armonia e di simpatia tra tutto ciò, che concerne l'uomo, e che ne sia del suo fine e del suo destino quello, che ne è della sua nascita, della sua natura, della sua vita animale, delle sue azioni, delle sue passioni, cioè che tutto ciò sia comune a tutto l'uomo, e che il fine di lui sia proporzionale alla sua natura? Non vediamo forse che l'armonia risultante da tutte le operazioni dell'anima e da tutto il meccanismo del corpo non è che una sola e medesima armonia, che lo spirito non ha la sua parte, e la materia ancor meno? „ (1). Da questo intimo ed essenziale rapporto teleologico tra l'anima ed il corpo nell'umano soggetto Atenagora dirittamente arguisce la perenne coesistenza di queste due sostanze non solo nella vita presente, ma altresì nella futura, e quindi l'immortalità di tutto l'io umano.

---

lumeggia la grande figura del filosofo abderitano, difendendone le dottrine dalle ingiuste accuse e riscontrandole con quelle dei filosofi posteriori antichi e moderni.

(1) Atenagora, *De resurrectione mortuorum*, XV.

APPENDICE

A.

L'antropologia metafisica e lo spirito della modernità.

L'antropologia è scienza metafisica, filosofica, tradizionale, che ha esordito sin dalle più vetuste speculazioni greche, ed attraversando i secoli è giunta sino a noi. A' giorni nostri si grida e si ripete che l'antropologia metafisica deve scomparire al soffio della modernità per trasformarsi in tutt'altra da quella di prima, che lo spirito nuovo l'ha proscritta siccome rancida, vuota, stantìa, una scienza che ha fatto il suo tempo. Raccogliamo questo grido e dimandiamo: la verità, a cui tutti teniamo rivolto lo sguardo della mente, dipende forse dalla modernità, dalla novità? No certo: la verità è antica, eppur sempre nuova, è indestruttibile, non patisce le ingiurie del tempo, nè mai si dirà che essa ha fatto il suo tempo. Son più di venticinque secoli che si è scoperta la verità del teorema detto di Pitagora; quella verità rimane tuttora e nessun soffio di modernità varrà a distrurla. Una dottrina non diventa vera, perchè appartiene al tal secolo, al tal luogo, ma lo è di sua intrinseca natura. Non è adunque in nome della modernità, che voi potete rigettare l'antropologia metafisica, bensì vi corre l'obbligo di dimostrare che è falsa.

Voi abborrite dall'antropologia metafisica come il diavolo dall'acqua santa, la rigettate siccome un tessuto di aberrazioni e di fantasticherie. Eppure Platone ed Aristotele in Grecia, Bacone in Inghilterra, Cartesio e Malebranche in Francia, Leibnitz e Kant in Germania, Spinoza in Olanda, Vico, Rosmini e Gioberti in Italia, tutti questi immortali rappresentanti della metafisica, non erano mica pensatori dozzinali, pasciuti di vane chimere. Voi v'immaginate che questi giganti del pensiero abbiano a cadere distrutti al vostro soffio di modernità. Ancora prima che sorgessero i nostri novatori, la metafisica nel suo secolare cammino ha incontrato avversarii, che la combatterono, eppure non è ancora scomparsa dal mondo scientifico. Stando alla loro sentenza bisognerebbe dire che nel giro dello scibile è falso tutto e solo ciò, che è antico, vero tutto e solo ciò, che è moderno. E sia pure; ma in tal caso essi pronunciano la propria condanna, perchè insieme col tempo, che passa, anche la loro nuova dottrina diventa antiquata, epperciò falsa. *Hodie mihi, cras tibi;* oggi voi cantate le esequie alla metafisica perchè vecchia; dimani si canteranno le esequie alla vostra dottrina perchè invecchiata anch'essa.

Ancora una dimanda: Poniamo che tutta quanta la metafisica sia distrutta dalle fondamenta e dell'antico mondo scientifico, niente più rimanga in piè: voi vi mettete a soffiare su quella ruina per suscitare una nuova vita, ma da qual punto dell'universo può essere spirato il vostro soffio della modernità? Dal nulla; ma (e chi nol sa?) dal nulla esce nulla. È una legge

metafisica universale, che il moderno fiorisce dall'antico, il nuovo si radica sul vecchio, il progresso spunta da un germe preesistente, tutto si trasforma. Quindi il vero concetto della modernità importa non già che si faccia tavola rasa dell'antropologia metafisica per edificare sulle ruine, bensì che si secerna il vero dal falso in mezzo alle svariatissime teorie e sistemi metafisici e che agli elementi di verità sincerati per mezzo della critica si imprima una forma nuova rispondente alle esigenze de' nuovi tempi e dalle verità riconosciute si svolga il maggior numero possibile di verità. Inoltre anche lo spirito del tempo va sottoposto alla critica ed abbisogna di un criterio superiore per sincerare le parti sane ed incorrotte dalle parti malsane, guaste e morbose.

B.

Il positivismo e le idee di spirito e di materia.

Ricercando le attinenze, che intercedono tra le nuove dottrine positivistiche e le idee di spirito e di materia, viene spontanea la dimanda: il positivismo è una dottrina materialistica? No, rispondono i suoi seguaci: esso non è nè materialismo, nè spiritualismo, ma affatto estraneo all'uno ed all'altro. Poichè questi due sistemi presuppongono l'esistenza di due sostanze specificamente diverse, spirito e materia, mentre il positivismo ha appunto questo di proprio, che rigetta il mondo degli esseri forniti di sostanzial sussistenza e riduce l'universalità delle cose a meri fenomeni; epperò il problema, se vi esistano sostanze spirituali e materiali, non ha più ragione di essere. Poniamo che sia così; ma vi si potrà pur sempre dimandare: fate voi essenzial differenza tra i fenomeni psichici relativi allo spirito, ed i fenomeni fisiologici animali proprii della materia? Se sì, voi non potete sfuggire allo spiritualismo riguardato nella generale ampiezza del suo concetto; se no, non iscampate dal materialismo.

Io ho riconosciuto, che il positivismo procedendo per la via dell'esperienza sensibile e seguendola con retto discernimento ha saputo compiere importanti ricerche nella scienza dell'uomo e della natura vivente. Ora aggiungo, che tutte le verità sperimentali, a cui è pervenuto, l'antropologia spiritualistica le accoglie senza punto contraddire a sè medesima e venir meno ai proprii principii, giacchè anch'essa riconosce l'esperienza siccome una delle fonti necessarie dell'umano sapere. Ma intendiamoci intorno il concetto dello spiritualismo. Molti lo avversano e lo respingono, perchè se ne sono foggiati un concetto affatto erroneo. Essi intendono per spiritualismo una dottrina, che in tutto l'universo non vede e non apprezza altro che lo spirito, e rigetta il mondo della materia siccome privo di ogni ragione di essere, immeritevole di venir preso in seria considerazione, anzi siccome la ruina ed il naufragio di tutte le più nobili aspirazioni, di tutte le più alte idealità dello spirito. Per lo contrario lo spiritualismo veracemente inteso non risiede nel disconoscere la materia, ma nell'ammettere una sostanzial differenza tra essa e lo spirito, e ad un tempo un' intima colleganza fra l'una e l'altro, e così si denomina non già perchè escluda la materia, bensì perchè oltre le sostanze corporee ammette sostanze immateriali. Esso ac-

coglie come importanti alla perfetta conoscenza della natura umana le ricerche etnografiche, e ne fa suo pro; ma siccome in fondo a tutte le stirpi umane giace identica ed una l'essenza specifica dell'umanità, così al di sopra del mero studio descrittivo ed inquisitivo delle razze umane colloca l'antropologia filosofica siccome scienza, che ha per oggetto l'uomo contemplato nella sua astratta e costitutiva essenza. Negherete voi ogni pregio, ogni valore, ogni importanza allo studio dell'uomo astrattamente considerato, ossia della essenza umana nel suo aspetto generalissimo, quale esiste in tutti e singoli gli uomini, in tutte le genti sparse sulla faccia della terra? Tanto varrebbe disconoscere l'importanza scientifica della geometria, siccome quella, che fa astrazione dalle svariatissime qualità geologiche, fisiche, chimiche e fisiologiche, le quali caratterizzano i singoli corpi sussistenti nella natura, e tutta si raccoglie nel contemplare le forme geometriche astratte, che essi assumono dalla diversa loro positura nello spazio. Eppoi come mai vi verrà fatto di determinare per bene i caratteri delle stirpi umane rispetto ai loro sentimenti, all'intelligenza, alla potenza della volontà, alle tendenze istintive, all'immaginativa, alle credenze, se dalla scienza antropologica non avrete attinto un giusto e ben determinato concetto di tutte queste facoltà fondamentali, che costituiscono l'essenza specifica ed astratta dell'umanità?

Similmente la filosofia spiritualistica fa tesoro dei risultati a cui riesce la psicologia sperimentale ne' suoi laboratorii, quando essi siano governati da una seria osservazione, informata da uno schietto amore della verità, solidamente accertati, sicchè contribuiscano ad una più ampia e più profonda conoscenza dell'anima umana; ma non perciò si ferma a questa vita meramente esteriore de' sensi, bensì risale alla vita interiore dello spirito, poichè l'uomo interiore non è punto quello, che sta nascosto sotto l'epidermide.

Mi sia qui lecito di chiudere quest'appendice ricordando che già nel 1868 io aveva rilevata questa virtù comprensiva tutta propria dello spiritualismo. Nel Periodico da me diretto *Il Campo dei filosofi italiani* a pagina 8 del tomo IV io scriveva: " Noi siamo col teismo e collo spiritualismo, e conseguentemente colla filosofia tradizionale italiana formalmente innovata e progrediente, perchè la reputiamo feconda di tanta novità di vita e di tale dovizia di idee da rispondere a tutte le giuste aspirazioni del tempo, a tutte le ragionevoli esigenze della moderna civiltà o fraintese, o mal sodisfatte dall'Hegelianismo e dal positivismo „.

Spada di bronzo scoperta nella Moriana.

Nota del Socio ERMANNO FERRERO.

(Con una Tavola).

Il generale conte Paolo D'Oncieu de la Bàtie acquistò, nell'anno passato, per l'Armeria Reale affidata alla sua direzione una spada di bronzo scoperta nel 1901 a Thil (cantone di Saint-Michel) in Moriana (1), e gentilmente consentì che la facessi conoscere, riproducendo la fotografia da lui favoritami (2).

La spada, di buona conservazione e con bella patina, è lunga m. 0,70, di cui m. 0,60 per la lama a foglia di salice con costola nel mezzo arrotondata e terminante in punta, fiancheggiata da ciascuna parte da due fasci paralleli di cinque filetti ciascuno. La lama (la cui larghezza massima è di m. 0,05, e presenta in alto in ciascun filo un piccolo intaglio) entra col codolo nel manico fuso separatamente, e vi è fermata da due perni ribaditi. Il manico, diviso in tre parti da quattro coppie di filetti in rilievo, si allarga in alto in un'ovale concava, la cui superficie presenta ornamenti riprodotti nella tavola unita. I due corti rami dell'elsa s'incurvano leggermente verso la lama. Il peso dell'arma è di chil. 1,10.

Mentre io stava ricercando spade simili in libri ed in periodici, è uscita l'opera accuratissima del dott. Julius Naue sulle spade

(1) La scoperta della spada in questo piccolo comune, in un fondo acquistato dall'impresario Battista Mosca da Pralungo, locatario di cave di pietre, è attestata da una dichiarazione del *maire*.

(2) L'Armeria Reale possedeva già alcune spade di bronzo, ma di tipi diversi, fra cui una bellissima ad antenne, disgraziatamente d'ignota provenienza. Sono descritte dall'Angelucci, *Catalogo della Armeria Reale*, Torino, 1890, p. 19 e seg.) e rappresentate nelle incisioni in legno, che illustrano tale volume; due si hanno nella tavola 12ª (fototip.) della splendida pubblicazione ordinata dal compianto re Umberto I: *Armeria antica e moderna di S. M. il Re d'Italia in Torino.*

preromane di rame, di bronzo e di ferro (1). Il tipo, a cui appartiene la nostra, è dall'illustre archeologo bavarese designato col nome di Morges o del Rodano *(Möriger- oder Rhône-Typus)* dagli esemplari trovati in quella stazione lacustre del Lemano ed in altri luoghi della regione del Rodano. In questo tipo egli distingue ancora le spade, che segnano il passaggio da un altro tipo anteriore, e due classi per le forme più recenti (2). La nostra spetta alla prima rappresentata da esemplari dell'Italia settentrionale, della Svizzera, della Francia centrale ed orientale (3), della Germania meridionale, dello Schleswig-Holstein e della Svezia.

Teoria e pratica della Conquista nel Diritto antico.

A proposito di alcuni recenti scritti di Ireneo Lameire (4).

Nota di FRANCESCO RUFFINI.

Il signor Ireneo Lameire, professore di storia del diritto pubblico alla facoltà giuridica dell'Università di Lione, ci ha dato in due anni consecutivi due notevolissimi saggi di un'opera di vaste proporzioni, ch'egli ha intrapresa, intorno alla Teoria e alla pratica della Conquista nel diritto antico.

In un luogo della Introduzione (p. 13) l'autore dice che al suo libro non si accompagna nessuna bibliografia; perchè — fenomeno ben raro — non esiste affatto una qualunque letteratura dell'argomento. Ed ha pienamente ragione. Ma se questo

(1) *Die vorrömischen Schwerter aus Kupfer, Bronze und Eisen*, München, 1903; 4°, pp. VII-126, album di 45 tavole.

(2) Pag. 76 e segg., tav. XXI, XXII.

(3) La Savoia ne ha fornito un'altra, trovata nel lago di Bourget (tav. XII, n. 8).

(4) LAMEIRE, *Théorie et pratique de la Conquête dans l'ancien Droit* (Étude de droit international ancien). I. *Introduction*, pp. 84. Paris, Arthur Rousseau, éditeur, 1902. — II. *Les Occupations militaires en Italie pendant les guerres de Louis XIV*, pp. VIII-400, ibid., 1903.

basta di già a mostrare l'assoluta novità ed originalità di concezione del lavoro, non ne dice però ancora nè la difficoltà di esecuzione nè la importanza dei risultati, che sono l'una e l'altra davvero eccezionali.

Raramente altro libro ha offerto allo storico del diritto ed al pubblicista una copia maggiore di fatti, tutti giuridicamente rilevanti e altamente significanti e quindi pronti a generare un più intenso e fruttuoso lavorìo di idee. Ma v'è di più. Questo libro ha — indipendentemente dall'argomento particolare che v'è trattato — una portata generale assai più larga, come quello che segna un indirizzo del tutto nuovo, anzi, per usare una frase non immodesta dello stesso autore, un indirizzo per lo innanzi davvero insospettato degli studî di diritto internazionale. Ed è un indirizzo storico-positivo. Nè si potrebbe dire che non sia in esso un qualche grave insegnamento anche per i cultori di tutte le altre parti del diritto pubblico e della loro storia. Poichè — in tanto imperversare di pretesi rinnovamenti positivistici delle scienze morali e giuridiche a base di sociologia e di materialismo storico e a forza di illazioni arbitrarie e di analogie innaturali sopratutto dalle scienze biologiche — questo libro dimostra, come non si potrebbe meglio e cioè con l'esempio, quale unicamente possa e debba essere il vero ed il sano positivismo negli studî storico-giuridici.

Gli scrittori antichi di diritto internazionale — osserva il Lameire — intesi a gettare le basi della scienza, badano unicamente a mettere insieme un corpo di dottrine, composto per lo più di reminiscenze classiche e magari bibliche e di concetti filosofici, e appoggiato più sul diritto naturale, da essi appunto messo in voga, che non sul diritto positivo. Gli internazionalisti moderni guardano più al futuro che non al passato, curanti più di prevenire gli abusi del diritto di conquista nei tempi avvenire che non di studiarne gli effetti nei secoli trascorsi. Egli invece si propone di studiare nelle guerre dell'antico regime i rapporti di diritto internazionale generati dalla conquista, e di chiarire i modi con cui la sovranità si spostava, esaminando gli effetti giuridici complessi e complicatissimi, così di diritto pubblico come di diritto privato, che nella vita reale, nella pratica, hanno fatalmente tenuto dietro alle fortunose vicende dell'occupazione bellica; quando i confini dei due Stati belligeranti

sono in continuo movimento, fluttuando e spostandosi incessantemente a seconda del successo di una carica di corazzieri o di una incursione di foraggiatori o di una punta di pattuglia. L'autore quindi vuole lasciar parlare i fatti stessi; proponendosi — com'egli dice immaginosamente — di raccogliere la teoria giuridica, non sotto la penna dei pubblicisti, ma sotto quella degli intendenti, dei commissarii di guerra, dei generali, dei sindaci e dei segretarii comunali.

Ma, si domanderà, che cosa si può apprendere dai rapporti così precarii e transitorii che nascono da una condizion di cose tanto anormale come è lo stato di guerra? Qui, vorremmo dire, si tratta di patologia e non di fisiologia del corpo sociale, se quanto abbiam osservato più sopra contro le illazioni e le analogie non ci facesse un po' guardinghi anche circa le similitudini tratte da altre scienze. Ma lo stesso Lameire obbietta innanzi tutto che durante i secoli XVII e XVIII (entro cui è compresa la sua trattazione) gli anni di guerra furono quasi altrettanto numerosi quanto gli anni di pace. Si tratta quindi di una anormalità persistente e di una precarietà duratura. E si potrebbe ancora soggiungere, massime dallo storico del diritto, che è appunto a quella prova del fuoco che i principii giuridici dimostrano la loro tempra, che è dal cozzo delle due sovranità contrastantisi il medesimo territorio che si sprigiona la scintilla onde si illumina la intima struttura degli ordinamenti pubblici, che è in quei momenti di anarchia o di convulsione sociale che gli istituti del diritto privato spiegano la loro ultima resistenza.

Abbiamo accennato poco fa ad un limite di tempo della trattazione del Lameire. Essa ha di più anche un limite di spazio. Ristretti l'uno e l'altro per modo, che a prima giunta può sorprendere, ma che, a ragion veduta, non può non far ammirare il sicuro, corretto e penetrante criterio giuridico dell'autore. Dato che tutta la sua trattazione si impernia nel concetto di sovranità, ne discende per logica inesorabile che se ne debbano escludere tutti quei casi in cui il concetto medesimo appaia infetto di quella, che il Lameire designa in genere come precarietà. La quale può derivare da tre fonti principalmente, e cioè o dal vincolo feudale finchè esso conserva importanza politica, o dalla egemonia imperiale così persistente in tanti paesi come è troppo noto, o dalle pretensioni successorie a una medesima

sovranità di entrambi i belligeranti. Di qui i limiti di tempo e di spazio. Il primo esclude tutta la conquista medioevale, che non avrebbe per noi nessuna virtù educativa, e ci porta al principio del secolo sedicesimo. Il secondo taglia nettamente fuori così le guerre degli Stati tedeschi fra di loro e contro lo straniero, perchè viziate di precarietà imperiale, come pure le guerre dell'Inghilterra contro la Francia, e per quanto si attiene all'Italia, tutte le imprese di conquista da Carlo VIII a Luigi XII, a Francesco I, a Enrico II, a Luigi XIII; perchè tutte inquinate di precarietà successoria, oppure addirittura perchè dal punto di vista giuridico la guerra aveva il carattere di guerra civile. E di fatti la varia fortuna delle armi di Luigi XIII in Piemonte e quella delle truppe spagnuole belligeranti nel nostro paese in quel medesimo tempo, poteva, considerata giuridicamente, costituire un successo od un disastro per Madama reale o per il principe Tommaso, ma non faceva diventare nessun territorio immediatamente francese o spagnuolo. La possibilità di studiare il fenomeno in tutta la sua purezza si restringe pertanto a poche guerre e anzi a parti di poche guerre, data la loro lunga durata e il diverso carattere delle loro fasi successive; e per di più alle guerre fra poche potenze, fra quelle cioè che nel momento delle ostilità si considerano come investite di una sovranità assolutamente indipendente e distinta.

Per questo, come anche in considerazione della portata giuridica molto varia, che il trattato internazionale può avere ed ebbe di fatto nelle varie guerre di fronte alla occupazione bellica, e che qui sarebbe troppo lungo chiarire, e infine per altre ragioni di carattere puramente esteriore, lo studio del Lameire quanto all'Italia non comprende in una prima sezione che la guerra della lega di Augsburgo e la guerra della successione di Spagna per la sovranità francese in territorio piemontese; e in una seconda sezione la sola occupazione piemontese di territorio francese dopo la battaglia di Torino, per il fatto inverso.

Va per altro avvertito, che questa prima parte di trattazione speciale riguardante l'Italia è stata preceduta dal volume della Introduzione, di cui difficilmente si potrebbe desiderare cosa più succinta e insieme più succosa, e in cui l'autore, delineando il piano dell'opera, fa vedere chiaramente che le sue ri-

cerche hanno già toccato, oltre al nostro paese, anche le Fiandre e altre regioni; e dei risultati di esse egli si vale appunto per istituire dei proficui raffronti e per fare delle opportune illazioni quanto al nostro paese.

Quali i metodi seguiti dal nostro autore nell'attuazione del suo non meno singolare che vasto programma? I più semplici e naturalmente perciò i più sicuri, ma al tempo stesso anche i più faticosi. Poichè le storie militari, non potevano fornire che dei punti di appoggio, come del resto le generali e le locali, e stante la insufficienza delle pubblicazioni di atti ed ordinanze, nonchè la manchevolezza degli archivi centrali, era d'uopo ricorrere direttamente agli archivi di vario genere delle città e delle comunità occupate. Nè esisteva una guida sicura per entro ad essi; poichè, è pur necessario riconoscerlo di fronte alle vivaci critiche del Lameire, il lavoro del Bianchi sulle Carte degli Archivi piemontesi è assolutamente impari a tale ufficio.

Investigare tutto l'immenso materiale troppo spesso disordinatamente affastellato negli archivi di tutte le terre piemontesi occupate dalle armi di Francia, e di tutte le francesi occupate dalle nostre: ecco la immane fatica, di fronte a cui il forte professore di Lione non si è spaurito, ecco l'impresa ch'egli ha condotta vittoriosamente a termine!

Ma, dopo la ricerca, quali i metodi di elaborazione dell'enorme materiale raccolto? Ogni idea di ordinamento sintetico o, per dirla con frase giuridica, sistematico, è stata giustamente scartata dall'autore. Studiare separatamente gli effetti della conquista sulle giurisdizioni sovrane o inferiori, sulle giurisdizioni signorili, sugli Stati generali, sulle Comunità ecc., abbracciando con un solo colpo d'occhio a volta a volta tutto il paese occupato nelle guerre successive, si sarebbe potuto fare con profitto quando si fosse trattato di un paese veramente unitario e retto da una legislazione pienamente uniforme. Ma sarebbe stato supremamente antiscientifico, trattandosi dei paesi dell'antico regime, forniti di istituzioni e di privilegi giuridici svariatissimi. Come di fatti equiparare, ad esempio, la valle d'Aosta, in cui l'occupante si trova di fronte gli Stati, e il restante Piemonte, in cui egli prende senza più contatto con le Comunità? Diversità di condizioni giuridiche che induce una diversità grande di modi, con cui la sovranità si sposta. La sovranità, dice à ra-

gione il Lameire, non si sposta a Carmagnola, come a Vercelli, nè a Mondovì come a Susa. Lo studio dell'occupazione comune per comune diventava adunque una necessità; e l' autore non esitò un momento a mettersi per questa via. I concetti direttivi sono fissati nelle prime pagine del volume, le correlazioni sono segnate con opportune note, le parche e prudenti generalizzazioni stanno ad ogni inizio e ad ogni chiusura delle varie parti, con frequenti richiami fra di loro.

Ma detto ciò, è detto del pari come sia pressochè impossibile anche un riassunto sommario di tutti i dati che in folla erompono dalla esposizione. La vita amministrativa locale, i rapporti finanziarii, l'ordine delle giurisdizioni quando l'occupazione abbia tolto ai tribunali inferiori la possibilità di far capo alle giurisdizioni superiori di appello, le giurisdizioni e prerogative feudali incastrate nella organizzazione ordinaria e rispettate a differenza di questa dall'invasore, le immunità ecclesiastiche e i diritti maiestatici sulla Chiesa, la forma e la intitolazione degli atti notarili tra vivi e per causa di morte, la loro insinuazione, fino alla lingua delle ordinanze e dei proclami e ai bolli delle carte, tutto si muove in questo quadro e vi acquista un rilievo dei più significativi e dei più istruttivi.

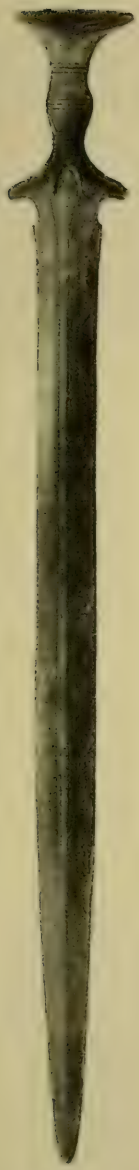
Le conclusioni dell'autore sono altrettanto misurate quanto, ci si passi il gioco di parole, smisurato è stato il lavoro di documentazione. Eccone alcune nella precisa formulazione del libro (pag. 116): " Le caractère juridique des occupations en Italie " se métamorphose complètement entre la guerre de la ligue " d'Augsbourg et celle de la succession d'Espagne: la première " a, dans cet ordre d'idées, un caractère beaucoup plus moderne, " la seconde un caractère beaucoup plus archaïque; et placer " les théories archaïques après les théories modernes n'a rien " d'un paradoxe: il s'agit ici simplement de la constatation " d'une double évolution en sens inverse ". E più sotto (p. 379 sg.): " L'occupation militaire dans l'Italie des XVII et XVIII siècles, " a, dans la plupart des cas, déplacé la souveraineté, qu'il s'a- " gisse du roi de France ou du duc de Savoie. Pour les années " de 1703 à 1713 notamment, de très curieuses frontières se " sont dessinées, qui ne sont marquées sur aucune carte. Mais " ce déplacement de souveraineté ne s'est manifesté dans tous " les ordres d'idées ni dans toutes les campagnes de cette époque.

" Au contraire, la souveraineté s'est souvent décomposée, se " déplaçant à certains égards, ne se déplaçant pas à d'autres: " il en est résulté de curieuses superpositions de souveraineté, " rentrant dans des types non encore classés. C'est ici le domaine " de la complexité ".

L'autore dice in un luogo del suo libro che la trattazione di un tema come il suo presuppone l'esatta conoscenza tanto della storia generale, quanto della storia locale in tutti i suoi più piccoli particolari, e altrove che per trattarlo bisogna essere del tutto al corrente della storia del diritto pubblico interno di ogni circoscrizione: questa duplice conoscenza egli ha dimostrato luminosamente di possedere per rispetto alla nostra regione, insieme a quella dei luoghi e dei costumi, della lingua attuale e dell'antica. Poche e non sostanziali davvero le rettificazioni che a tal riguardo gli si potrebbero suggerire (per es. a p. 83 un *autorevole* tradotto per *autoritaire*, e a p. 189 un misterioso *Vihieppo inferiore*, che non è altro che *Occhieppo* e un *Corila* invece di *Cossila*).

Ma sono inezie. Sta il fatto che — a parte anche il valore del libro come lavoro giuridico — questo dotto francese ha bene meritato dei nostri studî per il contributo validissimo portato alla storia del nostro paese. Gli studiosi delle nostre antiche istituzioni potranno ricavare dal suo libro più di un insegnamento. La storia militare del Piemonte nel tempo da lui studiato potrà trovarvi la soluzione di più di un punto oscuro. E da pochi altri libri la vita del popolo nostro in quei momenti di crisi politica balza fuori con una evidenza più immediata, più persuasiva e più commovente.

Atti R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. 38



Relazione intorno alla Memoria del Dr. Domenico Valla, intitolata: *Vita di Carlo Antonio Dal Pozzo, arcivescovo di Pisa, fondatore del Collegio Puteano.*

Il Collegio Puteano di cui narra le origini, ed alle cui successive vicende stringatamente accenna il dr. Domenico Valla, venne fondato a Pisa nel 1604 dall'arcivescovo Carlo Antonio Dal Pozzo.

L'arcivescovo Dal Pozzo era uomo fornito di rare qualità. Consigliere del Granduca di Toscana, ebbe parte non lieve nelle cose di governo. E il Granduca lo rimeritò dandogli modo di compiere quelle opere di beneficenza e di pubblica utilità, alle quali egli volentieri applicava l'animo e l'ingegno. La massima fra queste opere fu appunto la fondazione del Collegio, che da lui trasse il nome.

Il Dal Pozzo nacque a Biella nel 1547. Morì arcivescovo di Pisa nel 1607.

Le notizie sulla sua vita furono dal Valla diligentemente raccolte, sia da libri a stampa, sia da molte fonti manoscritte, ch'egli rinvenne nelle biblioteche e negli archivi di Firenze e di Pisa. L'archivio del Collegio gli offerse molto materiale.

La Memoria, di breve mole, è lodevole per contenuto e per metodo. La Commissione ne propone quindi la lettura alla Classe.

E. Ferrero.
C. Cipolla, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Mosso, Spezia, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Camerano Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente con sentite parole di compianto annunzia la morte del Comm. Prof. Bernardino Peyron vice Presidente dell'Accademia e propone si tolga la seduta in segno di lutto.

La Classe unanime accoglie la proposta del Presidente.

LETTURE

Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi.

Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. — Riguardando le n variabili (reali) indipendenti:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

come coordinate Cartesiane ortogonali in uno spazio Euclideo S_n a n dimensioni, consideriamo una trasformazione data dalle formole:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

come una rappresentazione dello spazio sopra sè stesso. Diremo che essa conserva i volumi (o le aree se $n = 2$) quando il modulo della trasformazione (1), cioè il determinante funzionale delle x' rapporto alle x, sia eguale all'unità:

$$\frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1; \tag{2}$$

più brevemente diremo allora che la (1) è una trasformazione *equivalente*.

In effetto l'elemento di volume o d'area:

$$dx_1 \,.\, dx_2 \ldots dx_n$$

conserva in tal caso lo stesso valore, passando dalla figura primitiva alla trasformata; e per ciò si conservano anche i volumi finiti corrispondenti.

La totalità delle trasformazioni (1) equivalenti è un gruppo continuo *infinito* G nel senso preciso di Lie, colla equazione di

definizione (2) per le trasformazioni finite. Possiamo invece definire il gruppo G per mezzo delle trasformazioni infinitesime:

$$Xf = \sum_{i}^{1\ldots n} \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3}$$

che lo generano. Condizione necessaria e sufficiente, affinchè la trasformazione infinitesima (3) appartenga a G, è che le ξ soddisfino la condizione:

$$\sum_{i}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0; \tag{4}$$

diremo allora che la Xf è una trasformazione infinitesima equivalente. Inversamente, se la Xf soddisfa la (4), le trasformazioni finite:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$$

del gruppo G_1 ad un parametro generato da Xf conservano i volumi. Queste sono infatti gli integrali del sistema differenziale:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \tag{5}$$

fissati dalle condizioni iniziali:

$$x_i' = x_i \qquad \text{per } t = 0.$$

Ora il determinante funzionale:

$$I = \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = I(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$$

derivato rapporto a t, con riguardo alle (5) ed alla (4), dà:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I \sum_{i} \frac{\partial \xi_i'}{\partial x_i} = 0;$$

e poichè per $t = 0$ è $I = 1$, sarà identicamente $I = 1$.

2. — Ci proponiamo di studiare i gruppi continui *finiti* di trasformazioni equivalenti, avendo di mira il problema della de-

terminazione di tutti i possibili sottogruppi di G che dipendono da un numero finito di parametri.

Sia G_r un tale gruppo con r parametri.

Se eseguiamo una trasformazione di variabili:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a modulo costante k:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = k,$$

il gruppo G_r si trasforma in un altro $\bar{G}_r$, che sarà ancora evidentemente di trasformazioni equivalenti. Riguardiamo due tali gruppi G_r, $\bar{G}_r$ come appartenenti ad un medesimo *tipo*, ed il nostro problema si riduce a trovare tutti i tipi possibili distinti, assegnando per ogni tipo un rappresentante. Dobbiamo per ciò risolvere la questione preliminare seguente:

Data una trasformazione infinitesima qualunque:

$$Xf = \sum_i^{1\ldots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

quali sono i cangiamenti di variabili che la traducono in una trasformazione infinitesima conservante i volumi?

Supponiamo che sia:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

una tale trasformazione. Essa cangia Xf in:

$$Yf = \sum_i^{1\ldots n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

posto:

$$\eta_i = Xy_i = \sum_\lambda^{1\ldots n} \xi_\lambda \frac{\partial y_i}{\partial x_\lambda}, \tag{6}$$

e si dovrà quindi avere:

$$\sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \eta_i}{\partial y_i} = 0. \tag{6*}$$

Se poniamo:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = a_{ik} \tag{7}$$

e nel determinante funzionale:

$$I = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

indichiamo con α_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} diviso per I stesso, avremo, come subito si vede:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \alpha_{ki}. \tag{7*}$$

La condizione (6*) si scrive ora:

$$\sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_\lambda^{1\ldots n} a_{i\lambda} \xi_\lambda = 0\,,$$

od anche:

$$\sum_{ik}^{1\ldots n} \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_\lambda^{1\ldots n} a_{i\lambda} \xi_\lambda \right) = 0\,,$$

cioè:

$$\sum_\lambda^{1\ldots n} \xi_\lambda \sum_{i,k}^{1\ldots n} \alpha_{ik} \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_k} + \sum_{k,\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_k} \sum_i^{1\ldots n} \alpha_{ik} a_{i\lambda} = 0\,. \tag{8}$$

Ora si ha:

$$\sum_i^{1\ldots n} \alpha_{ik} a_{i\lambda} = 0 \quad \text{per } k \neq \lambda$$

$$\sum_i \alpha_{ik} a_{i\lambda} = 1 \quad \text{per } k = \lambda\,,$$

e d'altra parte si ha:

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_k} = \sum_{ik} \alpha_{ik} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k \partial x_\lambda} = \sum_{ik} \alpha_{ik} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\lambda}\,,$$

e l'ultima somma, per la regola di derivazione dei determinanti, è eguale a

$$\frac{\partial \log I}{\partial x_\lambda};$$

la (8) si scrive quindi:

$$\text{(I)} \qquad \sum_\lambda \xi_\lambda \frac{\partial I}{\partial x_\lambda} + I \sum_\lambda \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\lambda} = \sum_\lambda \frac{\partial (\xi_\lambda I)}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Come è ben noto, le soluzioni I di questa equazione a derivate parziali sono i *moltiplicatori* di Jacobi per l' equazione $Xf = 0$. Risponde dunque alla questione proposta il teorema:

La trasformazione infinitesima Xf *si cangia in una trasformazione che conserva i volumi per tutte e sole quelle trasformazioni:*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

nelle quali il determinante funzionale:

$$I = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

eguaglia un moltiplicatore della $\mathrm{Xf} = 0$.

3. — Sia ora dato un gruppo G_r generato dalle r trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$$

sulle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il risultato sopra stabilito ci dà immediatamente il teorema:

Affinchè il gruppo $\mathrm{G}_r \equiv (\mathrm{X}_1\mathrm{f}, \mathrm{X}_2\mathrm{f}, \ldots, \mathrm{X}_r\mathrm{f})$ *sia simile ad un gruppo di trasformazioni equivalenti è necessario e sufficiente che le* r *trasformazioni infinitesime posseggano un moltiplicatore comune. Le trasformazioni* $\mathrm{y}_i = \mathrm{f}_i(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *che cangiano* G_r *in un gruppo di trasformazioni equivalenti sono tutte e sole quelle per le quali il determinante funzionale* $\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *eguaglia un moltiplicatore comune di* $\mathrm{X}_1\mathrm{f}, \mathrm{X}_2\mathrm{f}, \ldots, \mathrm{X}_r\mathrm{f}$.

Conviene ora che esaminiamo a quali condizioni dovranno soddisfare $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ perchè esista effettivamente un moltiplicatore comune I.

Se poniamo come al solito:

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$k = 1, 2, \ldots, r,$$

le equazioni simultanee cui deve soddisfare I sono per la (I):

$$\text{(II)} \qquad \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial I}{\partial x_i} + I \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, r$$

ovvero, posto:

$$y = \log I,$$

$$\text{(II*)} \qquad \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_i} = 0,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

A questo sistema di r equazioni lineari *non omogenee* con n variabili indipendenti sostituiamo, con un noto processo, un sistema omogeneo colle $n + 1$ variabili:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y$$

riguardate come indipendenti. Per ciò si assuma come funzione incognita una funzione $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, che eguagliata a zero dia la y espressa per le x; così avremo il sistema:

$$\text{(9)} \qquad \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial y} \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0$$
$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

Siamo per tal modo condotti, molto naturalmente, ad interpretare i primi membri delle (9) come simboli di trasformazioni infinitesime $Y_k F$ in $n + 1$ variabili, dove dunque:

$$\text{(10)} \qquad Y_k F = X_k F - \frac{\partial F}{\partial y} \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i},$$
$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

Ora dimostreremo che queste r trasformazioni generano un gruppo *ampliato* $\overline{G}_r$ nelle $n+1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, che è oloedricamente isomorfo col primitivo G_r.

Per ciò osserviamo che, indicando al solito con c_{iks} le costanti di composizione del gruppo G_r, si ha:

$$(11) \qquad (X_i X_k) = \sum_s^{1 \ldots n} c_{iks} X_s f,$$

e quindi l'identità:

$$(11^*) \qquad X_i(\xi_{k\lambda}) - X_k(\xi_{i\lambda}) = \sum_s^{1 \ldots n} c_{iks} \xi_{s\lambda}.$$

Ora la (10) ci dà:

$$\begin{cases} Y_i F = X_i F - \left(\sum_\lambda \frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \\ Y_k F = X_k F - \left(\sum_\lambda \frac{\partial \xi_{k\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

onde deduciamo subito:

$$(12) \qquad (Y_i Y_k) = (X_i X_k) + \sum_\lambda^{1 \ldots n} \left[X_k \left(\frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) - X_i \left(\frac{\partial \xi_{k\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) \right] \cdot \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Ma dalla identità (11*), derivando rispetto a x_λ e sommando da $\lambda = 1$ a $\lambda = n$, abbiamo:

$$\sum_\lambda^{1 \ldots n} \left[X_i \left(\frac{\partial \xi_{k\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) - X_k \left(\frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\lambda} \right) \right] + \sum_{\lambda, \mu}^{1 \ldots n} \left(\frac{\partial \xi_{i\mu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_{k\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \xi_{k\mu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\mu} \right) =$$

$$= \sum_s^{1 \ldots n} c_{iks} \sum_\lambda^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_{s\lambda}}{\partial x_\lambda}.$$

La somma doppia nel primo membro è nulla, perchè cangia di segno permutando le lettere di sommazione λ, μ; ne segue che la (12) si scrive:

$$(Y_i Y_k) = \sum_s^{1 \ldots n} c_{iks} \left\{ X_s F - \frac{\partial F}{\partial y} \sum_\lambda^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_{s\lambda}}{\partial x_\lambda} \right\},$$

ovvero:

$$(12^*) \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s^{1\ldots n} c_{iks} Y_s I.$$

Queste ci dimostrano quanto sopra abbiamo asserito. Così si è trovato incidentalmente il teorema:

Se le r *trasformazioni infinitesime sulle* n *variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

generano un gruppo G_r, *le altre* r:

$$Y_k F = X_k F - \frac{\partial F}{\partial y} \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_i}$$

generano un gruppo G_r *oloedricamente isomorfo sulle* $n+1$ *variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

In questo modo d'ampliamento di un gruppo G_r (che non so se sia stato da altri considerato) il gruppo ampliato $\overline{G}_r$ agisce imprimitivamente sulle rette:

$$x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \; \ldots, \; x_n = c_n$$

dello spazio S_{n+1} permutandole fra loro secondo le trasformazioni del gruppo dato G_r.

4. — Dopo ciò è chiaro che *le condizioni d'integrabilità* del sistema (9) sono identicamente soddisfatte e non resta più altro che a considerare le condizioni *algebriche* di compatibilità del sistema lineare (9) nelle $n+1$ incognite:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}, \; \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial F}{\partial y},$$

da risolversi inoltre in modo che sia $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Abbiamo quindi:

Affinchè il gruppo:

$$G_r \equiv (X_1 f, \; X_2 f, \ldots, X_r f)$$

sia simile ad un gruppo di trasformazioni equivalenti è necessario e sufficiente che, essendo:

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots, & \xi_{1n}, & \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{1\lambda}}{\partial x_\lambda} \\ \xi_{21}, & \xi_{22}, & \ldots, & \xi_{2n}, & \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{2\lambda}}{\partial x_\lambda} \\ \xi_{r1}, & \xi_{r2}, & \ldots, & \xi_{rn}, & \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{r\lambda}}{\partial x_\lambda} \end{matrix} \right\|$$

non abbassi di caratteristica togliendo l'ultima colonna.

È questo, come si vede, un criterio molto semplice, che permette, per ogni gruppo dato, di risolvere subito la questione proposta. Se si ricorda poi il significato della caratteristica della matrice costruita coi coefficienti delle trasformazioni infinitesime di un gruppo G_r, si può dare a questo criterio l'altra forma:

Il gruppo G_r *è simile ad un gruppo di trasformazioni equivalenti solo quando le minime varietà invarianti di* G_r *hanno lo stesso numero di dimensioni di quelle appartenenti al gruppo ampliato* $\overline{\mathrm{G}}_r$ *del n° 3.*

Ciò ha sempre luogo in particolare se la caratteristica della matrice:

$$\| \xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn} \| \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

eguaglia il numero r dei parametri; più in particolare ancora si ha il risultato:

Qualunque gruppo semplicemente transitivo è simile ad un gruppo di trasformazioni equivalenti.

In questo caso è da notarsi ancora che il moltiplicatore comune di $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_n f$ è determinato con una quadratura dalle (II), a meno di un fattore costante. Più in generale ciò accade ogni qualvolta il gruppo è transitivo, e per ciò:

Due gruppi transitivi simili di trasformazioni equivalenti appartengono sempre al medesimo tipo.

5. — Una considerazione diretta molto semplice ci fa riconoscere, indipendentemente dai risultati superiori, l'esistenza di una classe molto estesa di gruppi simili a gruppi di trasfor-

mazioni equivalenti. Supponiamo che una forma differenziale quadratica:

$$\varphi = \sum_{r_{ik}}^{1\ldots n} a_{ik}(x) \,.\, dx_i dx_k ,$$

alla quale imponiamo la sola condizione di avere il discriminante $a = |a_{ik}|$ non nullo, ammetta un gruppo continuo G_r di trasformazioni in sè stessa. Se facciamo una tale trasformazione di variabili:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

che sia:

$$\frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \sqrt{|a|}$$

il gruppo G_r si cangierà, come subito si vede, in un gruppo di trasformazioni equivalenti. In altre parole: *Se una forma differenziale quadratica in* x *variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *a discriminante* $a \neq 0$, *ammette il gruppo:*

$$G_r \equiv (X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f)$$

sarà $I = \sqrt{|a|}$ *un moltiplicatore comune di* $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$.

Ciò si conferma anche direttamente dalle note formole di Killing (*):

$$(13) \qquad \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \left(\xi_\lambda \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\lambda} + a_{i\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_k} + a_{k\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

che dànno le equazioni di definizione per le trasformazioni infinitesime:

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

di un tale gruppo. Moltiplicando infatti la (13) per A_{ik} (**) e sommando rispetto ad i, k si deduce facilmente:

$$\sum_\lambda \xi_\lambda \frac{\partial \log \sqrt{|a|}}{\partial x_\lambda} + \sum_\lambda \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0 ,$$

ciò che fa riconoscere appunto in $\sqrt{|a|}$ un moltiplicatore di Xf.

(*) *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, " Crelle's Journal ", Bd. 109, pag. 121.

(**) A_{ik} indica il complemento algebrico di a_{ik} diviso per a.

In particolare le forme differenziali quadratiche (definite o indefinite) a curvatura Riemanniana costante dànno luogo a gruppi di trasformazioni equivalenti con $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri.

6. — Ritornando alla questione generale, osserviamo che ove si conoscessero tutti i tipi di gruppi ad n variabili si potrebbe, applicando i criterii stabiliti, discernere fra questi quelli che possono cangiarsi in gruppi di trasformazioni equivalenti, e classificare quindi completamente questi ultimi gruppi. Le ricerche complete di Lie pei casi $n=2$, $n=3$ ci dànno in particolare il modo di risolvere la nostra questione pei gruppi di trasformazioni equivalenti del piano e dello spazio. Qui ci occuperemo specialmente del primo caso ed osserveremo prima un'altra forma notevole che si può dare al problema.

Supposto che sia:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

una trasformazione infinitesima del piano che conservi le aree, deve essere:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0\,;$$

ne risulta quindi determinata, a meno di una costante additiva, una funzione $I_1(x, y)$ dalle formole:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \eta_1, \qquad \frac{\partial I_1}{\partial y} = -\xi_1.$$

Diremo I_1 la *funzione generatrice* di $X_1 f$, che si scrive allora:

$$X_1 f = \frac{\partial(I_1, f)}{\partial(x, y)}.$$

Si vede subito che se I_1, I_2 sono le funzioni generatrici di $X_1 f$, $X_2 f$, la generatrice dell'alternata $(X_1 X_2)$ sarà precisamente $\frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(x, y)}$. Per ciò ad un gruppo:

$$G_r \equiv (X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f)$$

di trasformazioni equivalenti corrispondono r funzioni generatrici:

$$I_1, I_2, \ldots, I_r, \tag{14}$$

dotate delle proprietà *caratteristiche* seguenti:

1° *Fra le funzioni del sistema* (14) *non ha luogo alcuna relazione lineare a coefficienti costanti:*

$$c_1 I_1 + c_2 I_2 + \ldots + c_r I_r + c_{r+1} = 0;$$

2° *Tutti i determinanti funzionali:*

$$\frac{\partial(I_k, I_l)}{\partial(x, y)}, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, r$$

sono combinazioni lineari a coefficienti costanti di $I_1, I_2, \ldots, I_r$.

È chiaro che una trasformazione di variabili a modulo $\frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \text{cost}$ cangia il sistema (14) in un altro colle stesse proprietà, che riguardiamo appartenente al medesimo tipo (cfr. n° 2).

Le ricerche che eseguiamo nei n^i seguenti, appoggiandoci sui risultati di Lie, risolvono dunque il problema di trovare tutti i possibili tipi di sistemi (14) di funzioni dotati delle proprietà enunciate.

7. — Prendiamo ora le tabelle date da Lie per i varî tipi possibili di gruppi finiti del piano a pag. 71-73 del Vol. III (*Transformationsgruppen*). Per altro, siccome qui vogliamo trattare di gruppi reali, dobbiamo intendere completate queste tabelle nel modo che il Lie stesso assegna a pag. 380 (Vol. III) pei gruppi reali.

Incominciando dai gruppi primitivi, troviamo nelle tabelle di Lie 8 tipi distinti, tre dei quali sono dati a pag. 71 (l. c.) e gli altri cinque a pag. 380. Quelli di questi tipi che sono simili a gruppi conservanti le aree, debbono avere un moltiplicatore comune per le loro trasformazioni infinitesime (n° 3). Ora i primi 6 tipi contengono tutti il sottogruppo delle traslazioni:

$$\overline{|p, q|},$$

onde le (II) ci dicono che pel moltiplicatore I comune supposto si deve avere:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = 0,$$

cioè $I =$ cost. I gruppi cercati fra i primi 6 tipi sono dunque soltanto quelli che sono già di trasformazioni equivalenti, e si riducono ai due seguenti:

1° Il gruppo *lineare speciale* secondo Lie:

$$(\alpha) \qquad \overline{|p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp - yq|},$$

cioè il gruppo delle sostituzioni lineari intere a determinante $=1$ (gruppo delle affinità speciali). Le rispettive cinque funzioni I generatrici (n° 6) sono:

$$(\alpha') \qquad I_1 = y,\ I_2 = x,\ I_3 = x^2,\ I_4 = y^2,\ I_5 = xy;$$

2° Il gruppo dei movimenti del piano:

$$(\beta) \qquad \overline{|p,\ q,\ xq - yp|} \ (*)$$

con

$$(\beta') \qquad I_1 = y,\ I_2 = x,\ I_3 = x^2 + y^2.$$

Restano da considerarsi i due ultimi tipi:

$$(a) \qquad \overline{|xq - yp,\ (1 + x^2 - y^2)p + 2xyq,\ 2xyp + (1 + y^2 - x^2)q|}$$

$$(b) \qquad \overline{|xq - yp,\ (1 + y^2 - x^2)p - 2xyq,\ -2xyp + (1 + x^2 - y^2)q|},$$

i quali, secondo i criterî stabiliti al n° 4, sono traducibili in gruppi conservanti le aree, essendo per il primo $I = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ e per il secondo $I = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}$ un moltiplicatore comune delle rispettive trasformazioni infinitesime. La stessa cosa risulta, applicando le considerazioni del n° 5, dall'osservare che il

(*) Corrisponde al terzo tipo di Lie, pag. 380, ove si faccia $c = 0$.

gruppo (α) è il gruppo delle trasformazioni in sè della forma differenziale quadratica:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

che dà il ds^2 della sfera, cioè (a) è il gruppo dei movimenti della sfera. Similmente (b) è il gruppo dei movimenti delle superficie pseudosferiche, ove se ne assuma il ds^2 sotto la forma:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Per gruppi di trasformazioni equivalenti in cui si traducono (a) (b) possono prendersi rispettivamente i due seguenti:

$$(\gamma) \qquad \boxed{q,\ \sqrt{1-y^2}\cos y.p + \frac{x \operatorname{sen} y}{\sqrt{1-x^2}} q,\ \sqrt{1-x^2}\operatorname{sen} y.p - \frac{x\cos y}{\sqrt{1-x^2}}\, q}$$

colle funzioni generatrici:

$$(\gamma') \quad I_1 = x, \quad I_2 = \operatorname{sen} y.\sqrt{1-x^2}, \quad I_3 = \cos y.\sqrt{1-x^2},$$

e l'altro:

$$(\delta) \qquad \boxed{q, \quad xp - yq, \quad 2xyp + \left(\frac{1}{x^2} - y^2\right) q}$$

colle funzioni generatrici:

$$(\delta') \qquad I_1 = x, \quad I_2 = xy, \quad I_3 = \frac{1}{x} + xy^2.$$

Il primo appartiene, come gruppo di movimenti, al ds^2 sferico sotto la forma:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - x^2} + (1 - x^2)\, dy^2,$$

il secondo in modo analogo al ds^2 pseudosferico:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x^2} + x^2 dy^2,$$

ambedue le volte il discriminante della forma essendo reso $=1$.

Riepilogando, abbiamo:

Esistono quattro soli tipi distinti di gruppi continui finiti primitivi di trasformazioni del piano che conservano le aree, e sono:

1° *Il gruppo lineare speciale* G_5 (α).

2° *Il gruppo* G_3 *dei movimenti del piano* (β).

3° *Il gruppo* G_3 *dei movimenti della sfera* (γ).

4° *Il gruppo* G_3 *dei movimenti della sfera* (δ).

Un risultato perfettamente analogo vale nello spazio ordinario pei gruppi di trasformazioni che conservano i volumi.

8. — Passiamo ora ai gruppi imprimitivi che distinguiamo in due specie secondo che possono contenere un numero illimitato di parametri, ovvero ne contengono un numero limitato.

Alla prima specie appartengono solo i due tipi seguenti:

(A) $$\overline{|\underline{p,\ q,\ xq,\ x^2q,\ \ldots,\ x^rq,\ xp-yq}|}\ r>0$$

$$I_1=y,\ I_2=x,\ I_3=x^2,\ I_{r+1}=x^{r+1},\ I_{r+2}=xy$$

(B) $$\overline{|\underline{q,\ xq,\ F_1(x)q,\ F_2(x)q,\ \ldots,\ F_r(x)q}|}\ r>0$$

$$I_1=x,\ I_2=x_2,\ I_3=\int F_1(x)dx,\ \ldots,\ I_{r+2}=\int F_r(x)dx;$$

essi corrispondono rispettivamente al 5° tipo di Lie a pag. 71 (per $c=-1$) ed al 2° tipo, pag. 73.

I gruppi della seconda specie hanno 3, 2, o infine un solo parametro, e sono:

1° $$\overline{|\underline{p,\ 2xp+yq,\ x^2p+xyq}|}$$

corrispondente al 10° tipo di Lie, pag. 72, che si traduce in un gruppo di trasformazioni equivalenti, p. e. colla trasformazione:

$$x'=x,\quad y'=\frac{1}{y^2},$$

ciò che dà il gruppo:

(C) $$\overline{|\underline{p,\ xp-yq,\ x^2p-2xyq}|}$$

con:

(C') $$I_1=y,\ I_2=xy,\ I_3=x^2y,$$

indi:

2° $$\overline{|p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q|},$$

che è il 4° tipo di Lie, pag. 73. Esso è il gruppo delle trasformazioni in sè della forma differenziale quadratica (indefinita) a curvatura costante:

$$\frac{dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

Lo trasformiamo in un gruppo che conserva le aree p. e. colla sostituzione:

$$x'=x,\quad y'=\frac{1}{x-y};$$

otteniamo così:

(D) $$\overline{|p,\ xp-yq,\ x^2p+(1-2xy)q|}$$

$$I_1=y,\ I_2=xy,\ I_3=x-x^2y.$$

In fine un terzo tipo a due parametri corrispondente al nono di Lie, pag. 73, con $c=-1$:

(E) $$\overline{|p,\ q,\ xp-yq|}$$

$$I_1=y,\ I_2=x,\ I_3=xy.$$

Questo è il gruppo delle trasformazioni in sè della forma quadratica $dxdy$ a curvatura nulla.

Abbiamo poi i tipi a due parametri:

(F) $\overline{|q,\ xp-yq|}$ $\qquad$ $\overline{|p,\ q|}$ (G)

ed in fine il gruppo ad un parametro:

(H) $$\overline{|q|},$$

sottogruppi dei precedenti.

Determinati così tutti i tipi possibili di gruppi continui finiti del piano che conservano le aree, si osserverà che di questi soltanto i tipi (B) (G) (H) sono *Abeliani*, cioè costituiti di trasformazioni due à due permutabili.

Sopra il calcolo della Costante solare.

Nota di G. B. RIZZO.

(Con una Tavola).

Il Signor K. Ångström, direttore dell'Istituto fisico dell'Università di Upsala, ha ripreso da alcuni anni lo studio della radiazione solare con un suo strumento, che è dotato di una grande sensibilità e insieme di una grande esattezza. Lo strumento, chiamato dall'Autore " pireliometro a compensazione elettrica „ (1), consiste essenzialmente in un sistema di due lastrine sottilissime di platino o di manganina, le quali sono annerite sopra le faccie che possono essere esposte alla radiazione del sole: sulle faccie opposte si appoggiano le saldature di una coppia termoelettrica avente nel suo circuito un galvanometro molto sensibile. Quando si protegge una delle lastrine con uno schermo e l'altra viene irradiata dal sole, allora quest'ultima si riscalda; e se si fa passare nella prima lastrina una corrente elettrica, data da una pila indipendente, e si regola questa corrente (che si misura con un reometro di conveniente sensibilità), in modo da ottenere la medesima temperatura nelle due lastrine, l'intensità della radiazione solare che cade sopra l'una è evidentemente uguale al calore di Joule svolto nell'altra al passaggio della corrente.

Nell'apparecchio N° 29, che il Signor Ångström ha avuto la bontà di far costruire per me, si hanno le costanti seguenti:

larghezza delle lastrine	0.1498 cm.
resistenza elettrica (a 17°)	0.07933 ohm per cm.
potere assorbente	0.98
coefficiente di temp. della resistenza	0.00045.

Se si indica pertanto con i l'intensità della corrente che compensa il calore dovuto alla radiazione solare, l'intensità Q di

(1) " Ann. d. Phys. u. Chem. „, 67, pag. 633, 1899.

quest'ultima, espressa in piccole calorie per centimetro quadrato e per minuto primo, alla temperatura di 17°, è data dalla formola:

$$Q = \frac{60 \times 0.07933}{4.19 \times 0.98 \times 0.1498} i^2 = ki^2.$$

Il fattore k varia alquanto colla temperatura e si ha:

a	0°	$k = 7.69$
	10°	7.72
	20°	7.75
	30°	7.78
	40°	7.81

Come si vede dalla semplicità della teoria di questo strumento e dalla concordanza dei risultati che si ottengono, col pireliometro a compensazione elettrica si può determinare l'intensità della radiazione del sole con molta esattezza; perciò i risultati ottenuti meritano la più grande fiducia e possono fornire un prezioso contributo per determinare la legge dell'assorbimento atmosferico, e il modo col quale si debbano coordinare fra loro le osservazioni per dedurre il valore della costante solare.

In un lavoro precedente (1) ho cercato di dimostrare che il metodo ordinariamente seguito per calcolare la costante solare, il quale consiste nell' esprimere con una formola di interpolazione l'intensità della radiazione solare in funzione dell'altezza del sole sull'orizzonte, per assumere poi come costante solare il valore che prende quella espressione, quando si ponga uguale a zero lo spessore atmosferico attraversato dai raggi, non può condurre ad un risultato esatto. Le ragioni che adducevo erano in sostanza le seguenti: se si indica con ϵ, come si suole, lo spessore atmosferico attraversato dai raggi del sole (prendendo per unità lo spessore medesimo secondo la verticale), l'intensità Q della radiazione solare si può esprimere in funzione di ϵ con diverse formole, le quali sono ugualmente adatte per $\epsilon > 1$, ma nulla dimostra che si possano applicare nel caso in cui $\epsilon < 1$, e tanto meno nel caso in cui $\epsilon = 0$.

In secondo luogo ho dimostrato che applicando ad una medesima serie di misure diverse formole di interpolazione, le quali

(1) G. B. Rizzo, *Sopra le recenti misure della Costante solare,* " Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino ", Ser. II, XLVIII, 1898.

le rappresentano per lo più con la stessa esattezza e perciò hanno lo stesso grado di precisione, ciascuna di queste formole, ponendo $\epsilon = 0$, dà un valore differente della costante solare.

Perciò io proponevo di adoperare codeste formole di interpolazione soltanto per dedurre il valore più probabile della radiazione solare riferita allo zenit, cioè il valore della radiazione corrispondente ad $\epsilon = 1$, a diverse altezze sul livello del mare, e di dedurre poi il valore della costante solare da una formola, la quale rappresenti l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit in funzione della pressione atmosferica, che misura lo spessore atmosferico attraversato in questo caso dai raggi del sole. E applicando questo metodo alla discussione delle più notevoli serie di osservazioni fatte a diverse altitudini avevo trovato per la costante solare il valore di circa 2.6 piccole calorie per centimetro quadrato e per minuto primo.

Molti cultori della fisica terrestre, fra i quali il Violle (1), l'Ångström (2) e l'Arrhenius (3), accolsero questi risultati; ma la lunga abitudine induce ancora alcuni sperimentatori a calcolare questo elemento coll'antico metodo che dà ordinariamente dei valori più elevati.

Ora questo è un errore, perchè nessuna formola di interpolazione, nella quale sia espressa l'intensità della radiazione solare in funzione dell'altezza del sole sull'orizzonte, può farci conoscere, se non forse per caso, il valore della costante solare. La dimostrazione che ne avevo data nella Memoria citata più sopra era una dimostrazione indiretta, e perciò mi propongo di provarlo più direttamente in questa nota, facendo una ulteriore discussione delle ottime misure eseguite dall'Ångström a diverse altezze sul livello del mare nell'isola di Teneriffa e aggiungendovi alcune altre considerazioni.

La spedizione di Ångström, generosamente sussidiata dal Governo e dai principali Istituti scientifici della Svezia, ha portato un notevolissimo contributo allo studio della trasmissione della radiazione solare attraverso all'atmosfera terrestre.

---

(1) J. Violle, " Annales de Chimie et de Physique „, s. VII, t. XXII, pag. 329, 1901.

(2) K. Ångström, *Intensité de la radiation solaire à différentes altitudes*, pag. 31. Upsala, 1900.

(3) S. Arrhenius, *Lehrbuch der Kosmischen Physik*, 165, Leipzig, 1903.

L'Ångström ebbe per collaboratore nella sua spedizione il signor O. Edelstam; e, senza trascurare alcuna delle ordinarie osservazioni meteorologiche, misurarono con tutta l' esattezza desiderabile l'intensità della radiazione, facendo delle osservazioni simultanee a diverse altezze sul livello del mare, con due esemplari del pireliometro a compensazione elettrica che ho descritto in principio.

Dopo aver eseguito una serie di osservazioni di confronto fra i due strumenti ad Alta Vista, dove era stato l'antico osservatorio di Piazzi Smith, fecero delle serie di osservazioni simultanee al Picco di Teyda (m. 3683) e ad Alta Vista (m. 3252), ad Alta Vista e al piano di Cañada (m. 2125), ad Alta Vista e nella piccola città di Guimar (m. 360).

Ecco i risultati delle misure fatte il giorno 3 luglio in queste due ultime stazioni, che sono quelle le quali offrono una maggiore differenza di livello. Il valore della distanza zenitale del sole z fu calcolato dall'Ångström mediante le osservazioni orarie, e il valore di ϵ fu calcolato da me colla formola nota

$$\epsilon = \frac{s}{58''.36 \operatorname{sen} z},$$

dove s è la rifrazione atmosferica corrispondente alla distanza zenitale z.

Guimar (m. 360) $P = 731.3$			Alta Vista (m. 3252) $P = 518.9$		
z	ϵ	Q	z	ϵ	Q
81°44′	6.631	0.721	85°34′	11.258	0.819
80 29	5.828	0.795	79 52	5.550	1.138
73 36	3.499	0.994	73 24	3.460	1.340
67 28	2.593	1.105	67 03	2.547	1.421
61 15	2.070	1.190	60 11	2.004	1.488
54 33	1.720	1.251	54 07	1.702	1.525
41 26	1.333	1.292	41 11	1.327	1.578
28 00	1.131	1.361	26 28	1.118	1.609
5 33	1.003	1.384	5 34	1.007	1.618
27 08	1.122	1.325	26 02	1.109	1.609
40 20	1.310	1.275	40 20	1.312	1.579
53 02	1.658	1.219	47 34	1.478	1.540
59 45	1.978	1.150	52 36	1.641	1.520
65 46	2.421	1.070	60 11	1.964	1.479
72 33	3.330	0.943	65 46	2.420	1.439
			69 37	2.848	1.396

Le formole di interpolazione più usate per rappresentare l'intensità della radiazione solare in funzione dell'altezza del sole sull'orizzonte sono quelle di

Lambert-Pouillet: $Q = Ap^{\epsilon}$, (1)

Crova: $Q = \frac{A}{(1+\epsilon)^m}$ (2)

Bartoli e Stracciati: $Q = C\epsilon^{-n}$; (3)

ed ho applicato il metodo dei minimi quadrati al calcolo delle costanti di queste tre formole per entrambe le serie di osservazioni (1).

Ecco i risultati ottenuti. Per le osservazioni di Guimar si ha:

Colla formola del Pouillet: $A = 1.485$ $p = 0.893$
" di Crova: $A = 1.932$ $m = 0.467$
" del Bartoli: $C = 1.430$ $n = 0.328$

Guimar						
Q	Q'	Q''	Q'''	δ'	δ''	δ'''
0.721	0.703	0.747	0.769	0.018	— 0.026	— 0.048
0.795	0.770	0.787	0.802	0.025	0.008	— 0.007
0.994	1.001	0.957	0.948	— 0.007	0.037	0.046
1.105	1.110	1.063	1.046	— 0.005	— 0.058	— 0.041
1.190	1.176	1.144	1.127	0.014	0.046	0.063
1.251	1.224	1.210	1.197	0.027	0.041	0.054
1.292	1.278	1.300	1.302	0.014	— 0.018	— 0.010
1.361	1.307	1.356	1.374	0.054	0.005	— 0.013
1.384	1.327	1.396	1.429	0.057	— 0.012	— 0.045
1.325	1.309	1.359	1.377	0.016	— 0.034	— 0.048
1.275	1.281	1.306	1.309	— 0.006	— 0.031	— 0.034
1.219	1.232	1.223	1.212	— 0.013	— 0.004	0.007
1.150	1.188	1.160	1.144	— 0.038	— 0.010	0.006
1.070	1.130	1.087	1.070	— 0.060	— 0.017	0.000
0.943	1.024	0.977	0.967	— 0.081	— 0.034	— 0.024
			$\mu =$	± 0.038	± 0.031	± 0.038

(1) L'Ångström non crede che valga la pena di applicare il metodo dei minimi quadrati per il calcolo delle costanti delle formole di interpolazione; ma ho ricorso a questo metodo, in verità alquanto laborioso, per raggiungere la massima esattezza possibile e mettere in evidenza la discordanza dei risultati che si ottengono, per $\epsilon = 0$, applicando delle formole, che per $\epsilon > 1$ sono ugualmente attendibili.

E per le osservazioni di Alta Vista:

Colla formola del Pouillet: $A = 1.706$ $p = 0.935$
" di Crova: $A = 2.181$ $m = 0.366$
" del Bartoli: $C = 1.724$ $n = 0.258$

Alta Vista						
Q	Q'	Q''	Q'''	δ'	δ''	δ'''
0.819	0.801	0.899	0.924	0.018	— 0.080	— 0.005
1.138	1.179	1.099	1.111	— 0.041	0.039	0.027
1.340	1.352	1.261	1.252	— 0.012	0.079	0.088
1.421	1.438	1.341	1.355	— 0.017	0.080	0.066
1.488	1.491	1.458	1.441	— 0.003	0.030	0.047
1.525	1.522	1.515	1.503	0.003	0.010	0.022
1.578	1.561	1.601	1.603	0.017	— 0.023	— 0.025
1.609	1.583	1.657	1.675	0.026	— 0.048	— 0.066
1.618	1.595	1.690	1.721	0.023	— 0.072	— 0.003
1.609	1.584	1.660	1.679	0.025	— 0.051	— 0.070
1.579	1.562	1.605	1.608	0.017	— 0.026	— 0.029
1.540	1.545	1.564	1.559	— 0.005	— 0.024	— 0.019
1.520	1.528	1.528	1.518	— 0.008	— 0.008	0.002
1.479	1.495	1.465	1.449	— 0.016	0.014	0.030
1.439	1.450	1.390	1.405	— 0.011	0.049	0.034
1.396	1.409	1.331	1.317	— 0.013	0.065	0.079
			$\mu =$	± 0.019	± 0.052	± 0.048

I due specchi precedenti contengono, insieme ai valori Q osservati, i valori Q', Q'', Q''' calcolati rispettivamente con le tre formole, le corrispondenti differenze δ', δ'', δ''' fra i valori osservati e i valori calcolati e gli errori medii $\mu = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}$ per le due serie di osservazioni.

Come si vede le tre formole rappresentano bene ciascuna serie di misure; ma le due prime dànno per la costante A, che dovrebbe essere uguale alla costante solare, dei valori differenti, senza che dalle osservazioni si possa decidere quale sia quello che più si avvicina al vero; nella formola del Bartoli e dello Stracciati, col tendere di ϵ verso 0, il valore di Q cresce indefinitamente.

Queste osservazioni confermano adunque che non si può dedurre la costante solare da una formola d'interpolazione, la quale esprime semplicemente la legge con cui varia l'intensità della

radiazione col variare dell' altezza del sole sull'orizzonte, come già avevo dimostrato nella memoria citata.

Discutendo ora il complesso delle determinazioni fatte dall'Ångström nelle sue quattro stazioni all'isola di Teneriffa si trova la ragione di codesta impossibilità.

Le misure fatte nelle diverse coppie di stazioni, in giorni differenti, sono rese comparabili fra loro, riducendole tutte al valor medio della radiazione ad Alta Vista, per le diverse altezze del sole sull'orizzonte; e qui riassumo codesti valori medi nelle quattro stazioni, quali risultano dalle misure di Ångström insieme coi valori che ho calcolato colla formola di Crova.

Picco di Teyda; altezza m. 3863; $P = 492$.

z	ϵ	Q oss.	Q calc.	Oss.-calc.
80°	5.567	1.184	1.200	— 0.016
70°	2.902	1.388	1.375	0.013
60°	1.995	1.490	1.474	0.016
50°	1.555	1.553	1.537	0.016
40°	1.306	1.585	1.579	0.006
30°	1.156	1.606	1.608	— 0.002
20°	1.065	1.619	1.626	— 0.007
10°	1.016	1.624	1.638	— 0.014
5°	1.003	1.627	1.639	— 0.012

$$Q = \frac{1.967}{(1 + \epsilon)^{0.293}} \qquad \text{(I)}$$

Alta Vista; altezza m. 3252; $P = 518$.

z	ϵ	Q oss.	Q calc.	Oss.-calc.
80°	5.567	1.156	1.171	— 0.015
70°	2.902	1.370	1.351	0.019
60°	1.995	1.468	1.452	0.016
50°	1.555	1.527	1.517	0.010
40°	1.306	1.565	1.560	0.005
30°	1.156	1.583	1.589	— 0.006
20°	1.065	1.595	1.604	— 0.009
10°	1.016	1.610	1.619	— 0.009
5°	1.003	1.613	1.622	— 0.009

$$Q = \frac{1.962}{(1 + \epsilon)^{0.271}} \qquad \text{(II)}$$

PIANO DI CAÑADA; altezza m. 2125; $P = 597$.

z	ϵ	Q oss.	Q calc.	Oss.-calc.
80°	5.567	1.055	1.077	— 0.022
70°	2.902	1.288	1.268	0.020
60°	1.995	1.402	1.378	0.024
50°	1.555	1.472	1.448	0.024
40°	1.306	1.508	1.495	0.013
30°	1.156	1.529	1.527	0.002
20°	1.065	1.530	1.548	— 0.018
10°	1.016	1.540	1.560	— 0.020
5°	1.003	1.542	1.563	— 0.021

$$Q = \frac{1.942}{(1+\epsilon)^{0.283}} \qquad \text{(III)}$$

GUIMAR; altezza m. 360; $P = 734$.

z	ϵ	Q oss.	Q calc.	Oss.-calc.
80°	5.567	0.780	0.806	— 0.026
70°	2.902	1.049	1.028	0.021
60°	1.995	1.189	1.164	0.025
50°	1.555	1.269	1.255	0.014
40°	1.306	1.314	1.318	— 0.004
30°	1.156	1.357	1.360	— 0.003
20°	1.065	1.375	1.388	— 0.013
10°	1.016	1.391	1.404	— 0.013
5°	1.003	1.401	1.408	— 0.007

$$Q = \frac{1.955}{(1+\epsilon)^{0.172}} \qquad \text{(IV)}$$

La legge con cui varia l'assorbimento atmosferico nelle quattro stazioni considerate si può mettere in evidenza esprimendo con le corrispondenti formole di Crova l'intensità della radiazione per $\epsilon = 5$, $\epsilon = 4$, $\epsilon = 3$, $\epsilon = 2$, $\epsilon = 1$.

ϵ	Intensità della radiazione			
	Picco	Alta Vista	Cañada	Guimar
5	1.227	1.202	1.108	0.839
4	1.289	1.262	1.173	0.914
3	1.367	1.342	1.258	1.016
2	1.474	1.452	1.377	1.164
1	1.640	1.622	1.564	1.388

Questi risultati sono anche rappresentati graficamente nella figura I; nella figura II i punti A, B, C, D rappresentano l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit, cioè per $\epsilon = 1$, nelle quattro stazioni, in funzione dello spessore atmosferico attraversato dai raggi, prendendo come misura di questo spessore atmosferico il valore corrispondente della pressione riferita alla pressione normale, cioè il rapporto $\frac{P}{760} = a$.

Supponiamo ora che l'intensità della radiazione solare si possa esprimere in funzione di a con una formola analoga a quelle che servono per rappresentare l'intensità della radiazione in funzione dell'altezza del sole sull'orizzonte, la qual cosa si potrebbe fare, se queste formole, che esprimono la radiazione in funzione di ϵ, fossero ancora applicabili per $\epsilon < 1$: allora l'intensità della radiazione riferita allo zenit si potrebbe esprimere con la formola:

$$Q_1 = \frac{A}{(1 + a)^m} \qquad \text{(V)}$$

nella quale, determinando le costanti A ed m col metodo dei minimi quadrati, si troverebbe:

$$A = 2.655$$
$$m = 0.946.$$

Nella tabella seguente sono posti a confronto i valori osservati con quelli ottenuti mediante la formola (V):

Stazione	P	a	Q_1 oss.	Q_1 calc.	Oss.-calc.
Picco . . .	492	0.647	1.640	1.660	— 0.020
Alta Vista .	518	0.682	1.622	1.623	— 0.001
Cañada . . .	597	0.786	1.564	1.534	0.030
Guimar . . .	734	0.966	1.388	1.400	— 0.012

$$\mu = \pm 0.022.$$

Applicando la formola del Pouillet:

$$Q_1 = A p^a. \qquad (V')$$

si otterrebbero i risultati seguenti:

$$A = 2.339$$

$$p = 0.5861$$

Stazione	P	a	Q_1 oss.	Q_1 calc.	Oss.-calc.
Picco . . .	492	0.647	1.640	1.655	— 0.015
Alta Vista .	518	0.682	1.622	1.625	— 0.003
Cañada. . .	597	0.786	1.564	1.530	0.034
Guimar. . .	734	0.966	1.388	1.396	— 0.008

$$\mu = \pm 0{,}022.$$

Le curve *MN* ed *MO* della figura 2ª rappresentano l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit in funzione dello spessore atmosferico, quali vengono espresse dalle formole (V) e (V').

Come si vede dalle curve stesse e come si può facilmente dedurre da note proprietà analitiche delle formole che le rappresentano, queste curve volgono la loro concavità verso la direzione delle ordinate positive; laddove risulta evidente che i quattro punti *A*, *B*, *C* e *D*, i quali devono appartenere alla curva che rappresenta codesta intensità in funzione dello spessore atmosferico e che sono determinati, come abbiamo veduto, con procedimenti rigorosi, stanno invece sopra una curva che volge la concavità verso la direzione negativa delle ordinate. Da questo solo si potrebbe concludere che le formole, le quali rappresentano l'intensità della radiazione solare per $\epsilon > 1$, non sono più applicabili per $\epsilon < 1$.

Ma lo stesso si può dimostrare considerando il valore del coefficiente di trasmissibilità della radiazione solare attraverso all'atmosfera.

La formola del Pouillet $Q = Ap^{\epsilon}$ è stata dedotta partendo dall'ipotesi che il coefficiente di trasmissibilità rimanga costante, e si ha:

$$\log_e p = -\frac{\frac{dQ}{d\epsilon}}{Q} = -\frac{1}{\text{sottotangente}}.$$

Ora l'esperienza dimostra che rappresentando con una curva la variazione dell'intensità della radiazione solare col variare dello spessore atmosferico, *quando questo è maggiore dell'unità,* cioè col variare della distanza zenitale del sole, la lunghezza della sottotangente va crescendo col crescere dello spessore atmosferico; perciò la formola del Pouillet, a rigore, non è applicabile se non in un intervallo di ϵ, nel quale il coefficiente di trasmissibilità rimanga costante. E da questa proprietà, che nella curva dell'intensità della radiazione la lunghezza della sottotangente cresce col crescere di ϵ, il Crova dedusse la sua formola:

$$Q = \frac{A}{(a + b\epsilon)^p}$$

(A = costante solare; a, b, p costanti empiriche)

e poi quella semplice:

$$Q = \frac{A}{(1 + \epsilon)^m}.$$

Nella curva rappresentata da questa equazione si ha:

$$\text{sottotangente} = \frac{1 + \epsilon}{m}$$

e perciò:

$$\log_e p = -\frac{m}{1 + \epsilon},$$

ossia:

$$p = e^{-\frac{m}{1 + \epsilon}}.$$

Calcolando con questa formola il coefficiente di trasmissibilità della radiazione solare riferita allo zenit nelle quattro stazioni di Guimar, Cañada, Alta Vista e Picco di Teyda si avrebbero i risultati seguenti:

Stazione	Altezza metri	Coefficiente di trasmissibilità
Guimar	360	0.618
Cañada	2125	0.588
Alta Vista	3252	0.570
Picco di Teyda. . .	3863	0.563

Laonde, affinchè la formola di Crova potesse anche rappresentare la legge con cui varia la radiazione del sole per $\epsilon < 1$, la trasparenza dell'aria dovrebbe andare diminuendo col crescere dell'altezza sul livello del mare (1).

L'esperienza dimostra invece precisamente il contrario: consideriamo infatti le stesse osservazioni dell'Ångström e applichiamo la formola del Pouillet per determinare la *trasparenza media* dell'aria fra Guimar e Cañada, Cañada e Alta Vista, Alta Vista e Picco di Teyda.

Ecco i risultati che si ottengono:

Intervallo	Altezza media metri	Coefficiente medio di trasmissibilità
Guimar - Cañada . .	1242	0.515
Cañada - Alta Vista .	2688	0.702
Alta Vista - Picco . .	3557	0.740

Dalla serie più completa delle misure fatte dal Langley nella sua memorabile spedizione al monte Whitney si ricava:

Intervallo	Altezza media metri	Coefficiente medio di trasmissibilità
Lone Pine - Mountain Camp	2500	0.513
Mountain Camp - Whitney Peak	3984	0.729

(1) Affinchè si potesse applicare la formula del Bartoli per $\epsilon < 1$, il coefficiente di trasmissibilità dovrebbe diminuire ancora più rapidamente, essendo $p = e^{-\frac{n}{\epsilon}}$.

E dalle mie misure al Monte Rocciamelone (1):

Intervallo	Altezza media metri	Coefficiente medio di trasmissibilità
Trucco - Cà d'Asti	2278	0.470
Cà d'Asti - Punta Rocciamelone	3185	0.726

Le osservazioni attinometriche fatte a diverse altezze, nelle circostanze più svariate, dimostrano pertanto il principio generalmente ammesso, che la trasparenza dell'atmosfera, almeno fino ad un limite altissimo, cresce coll'aumentare dell'altezza sul livello del mare.

Perciò nessuna delle formole finora impiegate, che esprimono l'intensità della radiazione solare in funzione dell'altezza del sole sull'orizzonte, si può applicare alla determinazione della costante solare, facendo uguale a zero lo spessore atmosferico attraversato dai raggi; infatti codeste formole suppongono che la trasparenza dell'aria diminuisca col diminuire dello spessore atmosferico, e soltanto nella formola del Pouillet si ammette che la trasparenza rimanga costante.

La curva che esprime la legge colla quale varia l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit, col variare dello spessore atmosferico, si può rappresentare convenientemente colla formola:

$$Q_1 = A + b(760 - P)^{\frac{1}{2}}$$

dove A e b sono due costanti e P la pressione atmosferica nel luogo considerato, oppure colla formola:

$$Q_1 = A + B(1 - a)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(VI)}$$

dove $a = \frac{P}{760}$.

(1) Ho escluso da questo calcolo la stazione di Mompantero, vicino a Susa, perchè si trova in fondo alla valle in cui scorre la Dora, e, anche nelle giornate che in apparenza sono serene, è quasi sempre occupata, fino all'altezza delle montagne che la racchiudono, cioè fino all'altezza del Trucco ed anche più in alto, da una finissima caligine che ne diminuisce la trasparenza.

Ecco i risultati ottenuti, calcolando le costanti A e B mediante le osservazioni di Ångström:

$$A = 1.276$$
$$B = 0{,}614.$$

Stazione	P	a	Q_1 oss.	Q calc.	Oss.-calc.
Picco	492	0.647	1.640	1.641	— 0.001
Alta Vista . .	518	0.682	1.622	1.623	0.001
Cañada . . .	597	0.786	1.564	1.561	0.003
Guimar . . .	734	0.966	1.388	1.390	— 0.002

$$\mu = \pm 0.002$$

Seguendo lo stesso procedimento che ha seguito il Crova, si potrebbe dedurre la formola dell'intensità della radiazione, anche in funzione di $a = \frac{P}{760}$, mediante l'equazione della sottotangente. Basterebbe costruire ad occhio la curva della radiazione, quindi misurare la sottotangente in diversi punti ed esprimerla con una equazione in funzione di a. Si troverebbe che, contrariamente a quello che si ha nel caso esaminato dal Crova, in cui si considera l'intensità della radiazione in funzione della distanza zenitale del sole, la sottotangente cresce col diminuire dello spessore atmosferico, tuttavia, mediante una integrazione, si potrebbe determinare l'equazione della curva. Ma, oltre che questa integrazione può presentare delle difficoltà non leggere e conduce generalmente a delle formole troppo complicate per il calcolo pratico, non mi sembra che il metodo possa dirsi rigoroso, perchè l' equazione che noi otteniamo per questa via non può essere altro che l' espressione della curva che noi abbiamo prima costruita, e la formola conterrà gli stessi errori che abbiamo potuto commettere nel tracciare la curva e nel misurarne le sottotangenti. Credo invece più opportuno ricorrere ad una formola empirica, calcolandone i coefficienti in modo che la medesima rappresenti bene i valori osservati: e così ho ottenuto la formola (VI).

Come si vede dallo specchio precedente, l'accordo fra i valori osservati e quelli calcolati con questa formola, è tale che non si potrebbe desiderare maggiore, perciò è lecito concludere che, anche secondo le determinazioni dell'Ångström, *l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit si può esprimere in funzione dello spessore atmosferico attraversato dai raggi mediante la formola:*

$$Q_1 = A + B(1 - a)^{\frac{1}{2}}$$

dove a è la pressione atmosferica riferita alla pressione normale:

Non si può affermare che il valore della costante solare sia esattamente uguale a quello che si ottiene ponendo $a = 0$ nella formola (VI), perchè nella radiazione del sole vi sono probabilmente dei raggi (fra i quali alcuni raggi attinici e quelli che cadono nel campo d'assorbimento dell'anidride carbonica) i quali vengono completamente assorbiti nei primi strati dell'atmosfera, senza arrivare alle nostre più elevate stazioni d'osservazione; ma, osservando la curva probabile della radiazione del sole, si vede che la radiazione compresa in quel campo è molto piccola, rispetto alla radiazione totale, e possiamo considerare come sufficientemente approssimato il valore della costante solare calcolato con questo metodo.

Qui si deve avvertire che i valori della radiazione trovati dall'Ångström darebbero per la costante solare

$$Q_0 = 1.89,$$

poichè esprimendo la radiazione solare riferita allo zenit in funzione di a nelle quattro stazioni di Ångström si ottiene:

$$Q_1 = 1.276 + 0.614\,(1 - a)^{\frac{1}{2}},$$

e questo valore della costante solare è certamente troppo piccolo, perchè si hanno molte determinazioni dirette della radiazione del sole, nelle quali questa risulta già più grande di due calorie.

L'essere così piccolo il valore della costante solare, che si deduce dalle determinazioni dell'Ångström, dipende probabilmente dalle condizioni, nelle quali sono state fatte le misure.

Non credo che il vapor acqueo, allo stato di vapore invisibile, produca un notevole assorbimento sulla radiazione solare;

ma l'abbondanza dell'umidità, specialmente in presenza delle particelle saline che i venti trasportano dal mare fin nelle regioni elevate dell'atmosfera, agevola la formazione delle goccioline liquide, le quali, rimanendo sospese nell'aria, ne diminuiscono la trasparenza anche per i raggi provenienti dal sole; e perciò in un clima eminentemente marittimo, come quello dell'isola di Teneriffa, la radiazione che giunge a 3683 metri sul livello del mare (altezza della più elevata stazione d'osservazione) è già stata totalmente privata di una buona parte della sua energia. Il valore della costante solare si deduce pertanto con maggiore approssimazione dalle misure fatte nei climi continentali. Dal complesso di queste misure, come risulta dalla discussione che ne ho fatto nella memoria citata, si ottiene:

$$Q_1 = 1.324 + 1.268\,(1 - a)^{\frac{1}{2}},$$

e quindi si ha per la costante solare un valore prossimo a 2.6 piccole calorie per minuto primo sopra ogni centimetro quadrato.

Lo Stankevitch (C. R., t. 131, p. 879, 1900), durante un suo viaggio all'altipiano di Pamir nell'Asia Centrale, fece due serie di misure della radiazione solare, a diverse altitudini, con lo stesso attinometro a compensazione elettrica dell'Ångström. Ecco i risultati che ho ottenuto calcolando le osservazioni dello Stankevitch colla formola del Pouillet e con la formola del Crova, per dedurne la radiazione riferita allo zenit Q_1, in entrambe le stazioni.

Passaggio di Taldik: $\varphi = 39° 44'$, $\lambda = 72° 13'$ E. Gr.
Altit. sul livello del mare m. 3590; Pressione atm. $P = 491$ mm.
12 Giugno 1900.

Ora (t. m. l.)	z	ϵ	Q
$9^h\ 12^m$	38° 52′	1.284	1.81
11 47	16° 49′	1.044	1.93

Colla formola del Pouillet: $Q = 2.552 \times 0.765^{\epsilon}$; $Q_1 = 1.953$

" Crova: $Q = \frac{2.908}{(1+\epsilon)^{0.573}}$; $Q_1 = 1.954$

Kisil Art: $\varphi = 39^\circ 24'$, $\lambda = 73^\circ 17'$ E. Gr.

Altit. sul livello del mare m. 4220; Pressione atm. $P = 452$ mm.

17 Giugno 1900.

Ora	z	ϵ	Q
$9^h\ 18^m$	$37^\circ 54'$	1.268	1.89
11 53	$16^\circ 06'$	1.041	2.02

Colla formola del Pouillet: $Q = 2.744 \times 0.745^\epsilon$; $Q_1 = 2.044$

" Crova: $Q = \frac{3.175}{(1+\epsilon)^{0.634}}$; $Q_1 = 2.047$.

Queste osservazioni sono poco numerose e oltre a questo non sono simultanee nè possono rendersi comparabili mediante il confronto coi risultati ottenuti in una stazione fissa, perciò i valori della radiazione solare riferita allo zenit:

$Q_1 = 1.953$ nella stazione di Taldik
$Q_1 = 2.045$ " Kisil Art

a rigore non possono impiegarsi per dedurne i coefficienti della formola che esprime la legge colla quale aumenta l'intensità della radiazione col crescere dell'altezza sul livello del mare, tanto più che un'altra determinazione fatta il giorno 21 Giugno ad Ak Baital, all'altezza di m. 4650, diede un valore leggermente più basso di quello ottenuto a Kisil Art, e si vide chiaramente che la trasparenza dell'atmosfera era turbata da un fine pulviscolo. Tuttavia possiamo vedere che i valori della radiazione osservati al passaggio di Taldik e a Kisil Art differiscono per poco da quelli che si ottengono con la formola:

$$Q_1 = 1.324 + 1.268(1 - a)^{\frac{1}{2}}.$$

Infatti questa formola darebbe per la prima stazione:

$$Q_1 = 2.078 \quad \text{invece di} \quad 1.953$$

e per la seconda:

$$Q_1 = 2.132 \quad \text{invece di} \quad 2.045.$$

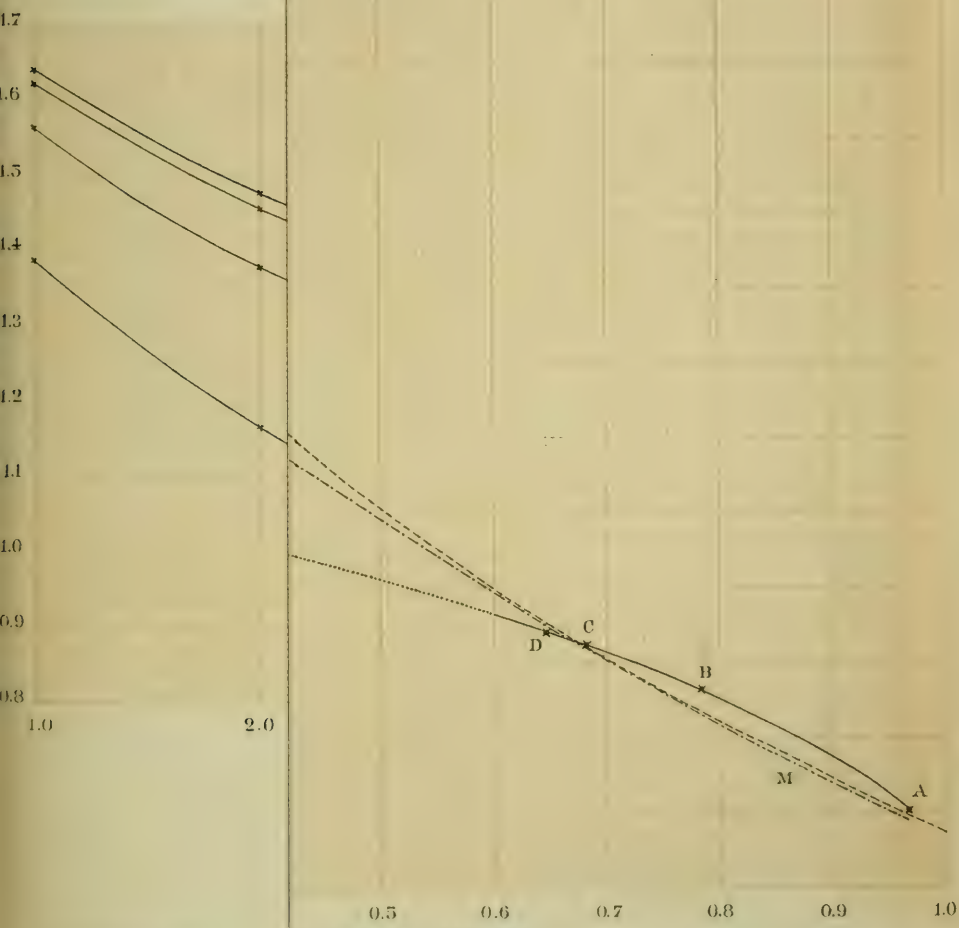
Fig. 2

la radiazione solare riferita allo zenit

e sul livello del mare

Relazione fra l'intensit

(secondo l



Lit. Salussolia, Torino

ore atmosferico a P: 760

Fig. 1

Relazione fra l'intensità della radiazione e l'altezza del sole sull'orizzonte

(secondo le misure di Ångström nell'Isola di Teneriffa)

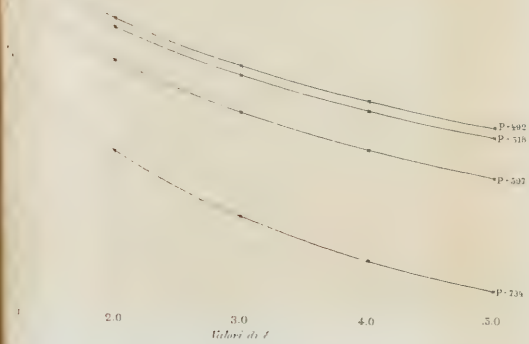
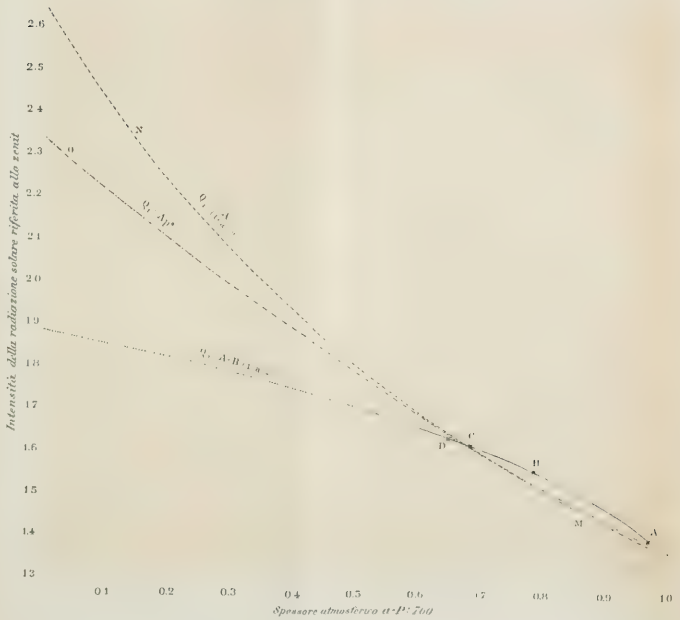


Fig. 2

Relazione fra l'intensità della radiazione solare riferita allo zenit e l'altitudine sul livello del mare



Le condizioni climatiche di Torino durante l'anno 1902.

Nota del Dott. EFISIO FERRERO.

Il presente studio venne composto sui dati delle osservazioni fatte, come per lo addietro, alle ore 9, 15 e 21. I risultati di queste sono pubblicati nelle *Osservazioni Meteorologiche* edite negli " Atti della R. Accademia delle Scienze „ e si riferiscono sempre ad ore di tempo medio dell'Europa Centrale.

Non si tenne qui conto delle osservazioni delle 7 e delle 12, che vengono trasmesse telegraficamente all'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica di Roma, Amburgo, Budapest, Parigi, Pietroburgo, Sofia, Trieste, Vienna e Zurigo, per il servizio dei presagi; come pure di quella delle ore 18 che fu introdotta a cominciare dal 15 Maggio di quest'anno.

I valori normali dei diversi elementi meteorologici sono, come negli anni precedenti, quelli calcolati dal Dott. Rizzo nel suo " Clima di Torino „.

Osservazioni generali.

L'anno meteorologico testè trascorso incomincia con un mese bello per la quasi totale assenza di giorni piovosi e per la mitezza della temperatura, benchè il 1° Gennaio si sia osservata la minima assoluta temperatura dell'anno.

Non fu però così il mese seguente: umido, piovoso, caratteristico per la pressione atmosferica di molto inferiore alla normale e per la quantità d'acqua caduta; notevole è l'abbondante ed eccezionale nevicata dei primi giorni.

Il Marzo fu un mese asciutto e quasi normale; mentre l'Aprile, pur mantenendosi nei principali elementi meteorologici

poco discosto dai valori normali, fu anch'esso umido, ricco di giornate piovose e d'acqua caduta.

Nel mese di Maggio l'umidità relativa è di molto inferiore alla normale, e questa diminuzione si protrae decrescendo nei mesi successivi sino a raggiungere quel valore nel mese di Ottobre. In questo periodo i principali elementi meteorologici si mantennero di poco differenti dai corrispondenti normali. È però importante notare: le basse temperature nei primi di Maggio, e la frequenza dei venti forti del 3° quadrante; la mitezza della temperatura in Giugno, quindi l'eccessive temperature di Luglio.

Nel Novembre poi si riscontra: un periodo relativamente caldo dal 1° al 18, nel quale la temperatura conservò un valore superiore al normale; quindi un periodo piuttosto freddo dal 18 al 28 che anticipò così l'inverno; a questo si aggiungano frequenti, benchè non intense, nevicate; molta umidità e una lunga serie di giornate nebbiose.

Il Dicembre invece si presentò sotto migliori auspicî: temperatura mite e talvolta primaverile; fu relativamente secco, con qualche nebbia eccezionale; è notevole in questo mese il massimo assoluto di 16.2 osservatosi il 18 Dicembre; esso è dovuto ad un vento caldo fortissimo di *S* e di *W*, che ha dominato in quel giorno e nel successivo.

In complesso l'anno 1902 si presentò con buoni caratteri meteorologici.

Temperatura.

Per la misura della temperatura si è osservato il termometro centigrado asciutto del psicrometro posto sul terrazzo nord dell'Osservatorio. Nella tabella seguente sono esposte le temperature medie annuali, gli estremi termometrici osservati e le loro deviazioni dai rispettivi normali, nell'ultimo decennio, facendo notare che per Torino si hanno i seguenti valori medî normali, dove le medie delle minime e massime annuali si riferiscono al periodo 1866-1902:

media annuale	11.7
media delle minime annuali	— 8.8
media delle massime annuali	32.5

Anno	Temperat. media		Temp. mass. osserv.			Temperat. minima osserv.			Escursione annua
	T_m	T_m-T_n	M	Data dell'oss.	$M-M_n$	m	Data dell'osserv.	$m-m_n$	$M-m$
1893	12.3	+0.6	31.6	20 VIII	—0.9	—15.0	19 I	—6.2	46.6
1894	12.2	+0.5	32.5	3 VII	0.0	—10.2	15 I	—1.4	42.7
1895	11.8	+0.1	33.4	9 IX	+0.9	—13.0	19 II	—4.2	46.4
1896	11.8	+0.1	34.2	11 VII	+1.7	— 7.5	13 I	+1.3	41.7
1897	12.8	+1.1	32.1	2 VII	—0.4	— 5.9	28 XII	+2.9	38.0
1898	12.6	+0.9	31.8	21 VIII	—0.7	— 3.8	28 XII	+5.0	35.6
1899	12.5	+0.8	31.1	21 VII	—1.4	— 7.5	13 XII	+1.3	38.6
1900	12.5	+0.8	33.1	17 VII	+0.6	— 5.1	1 II	+3.7	38.2
1901	11.2	—0.5	30.5	10 VII	—2.0	—10.4	21, 22 II	—1.6	40.9
1902	11.5	—0.2	33.5	15 VII	+1.0	— 4.8	1 I, 6 II	+4.0	38.3

L'anno 1902 e l'anno precedente sono notevoli per aver interrotta la lunga serie d'anni in cui la media annuale della temperatura si mantenne al disopra del valore normale. Nell'ultimo decennio la massima temperatura assoluta annuale fu di 34°.2 l'11 Luglio del 1896, mentre la minima fu di — 15°.0 il 19 Gennaio 1893.

Esaminando invece i massimi annui osservati a Torino nel periodo 1753-1902, troviamo come estremi i valori 38°.1 il 9 Agosto 1771 e 27°.0 il 14 Giugno 1824. In questo periodo, nel quale le osservazioni ebbero una interruzione di 4 anni, la massima si formò 21 volte in Giugno, 86 in Luglio, 38 in Agosto e 1 volta in Settembre. In quanto ai minimi annui nello stesso periodo 1753-1902, gli estremi si verificarono il 3 Febbraio 1754 con il valore — 17°.7 ed il 30 Gennaio 1756 con il valore — 3°.1. La minima annua si formò 81 volta in Gennaio, 30 in Febbraio, 2 in Marzo e 38 in Dicembre.

Per la tabella seguente è necessario notare che per Torino i valori normali delle temperature nell'Inverno, Primavera, Estate, Autunno sono rispettivamente: 1.6; 11.7; 21.6; 11.9 e le stagioni risultano così composte:

Inverno	Dicembre Gennaio Febbraio	Estate	Giugno Luglio Agosto
Primavera	Marzo Aprile Maggio	Autunno	Settembre Ottobre Novembre

Anno	Temp. invernale media		Temp. primaver. media		Temp. estiva media		Temp. autunn. media	
	T^i	$T^i - T^i_n$	T^p	$T^p - T^p_n$	T^e	$T^e - T^e_n$	T^a	$T^a - T^a_n$
1893	— 0.2	— 1.8	13.4	+ 1.7	22.1	+ 0.5	12.9	+ 1.0
1894	+ 1.2	— 0.4	12.8	+ 1.1	22.7	+ 1.1	12.6	+ 0.7
1895	— 1.4	— 3.0	11.5	— 0.2	22.1	+ 0.5	14.0	+ 2.1
1896	+ 2.2	+ 0.6	12.6	+ 0.9	21.0	— 0.6	12.0	+ 0.1
1897	+ 3.7	+ 2.1	13.0	+ 1.3	22.8	+ 1.2	11.5	— 0.4
1898	+ 3.0	+ 1.4	11.3	— 0.4	21.5	— 0.1	14.3	+ 2.4
1899	+ 4.2	+ 2.6	12.1	+ 0.4	21.9	+ 0.3	12.8	+ 0.9
1900	+ 2.6	+ 1.0	11.0	— 0.7	21.9	+ 0.3	13.5	+ 1.6
1901	+ 0.9	— 0.7	11.1	— 0.6	22.1	+ 0.5	11.4	— 0.5
1902	+ 2.0	+ 0.4	11.4	— 0.3	21.3	— 0.3	11.2	— 0.7

Veniamo ora, per mezzo della tabella I, a studiare più particolarmente l'andamento della temperatura diurna, osservata in corrispondenza al suo rispettivo andamento normale. Il mese di Gennaio presenta un periodo continuato di deviazioni positive dal 2 al 21, al quale segue un periodo fino al 1° Marzo con predominio rilevante di deviazione negativa. Quindi una serie di periodi alternati dal 1° Marzo al 28 Aprile, di cui i più notevoli sono quelli compresi fra il 27 Marzo e il 7 Aprile, dal 13 al 22 Aprile a deviazioni positive. Notevolissimo, e per la durata, e per lo scostamento, è il periodo di deviazioni negative che cominciò il 28 Aprile e terminò il 25 Maggio. In Giugno vi è da notare un periodo distinto di deviazioni negative dal 9 al 21; mentre i mesi di Luglio, Agosto, Settembre offrono periodi alternati di corta durata. Dal 23 Settembre al 10 Ottobre riscontrasi di nuovo un notevole periodo a deviazione positiva, seguìto da altri due di minore estensione, uno positivo e l'altro negativo. In Novembre si distinguono due periodi: il primo a deviazioni positive dal 4 al 13, il secondo a deviazioni negative dal 16 al 29. E infine in Dicembre dal giorno 9 al 31 predomina, quasi totalmente, un periodo positivo.

La tabella II ci dà le escursioni diurne osservate nell'anno 1902 e le loro differenze dall'escursione normale; in essa osserviamo: 263 deviazioni negative, 93 positive e 9 deviazioni nulle. La massima escursione diurna si ebbe il 18 Dicembre e

fu di 15°.4; la minima di 0°.7 si è formata l'1 e il 2 Febbraio e il 23 Settembre.

Media escursione della temperatura diurna nell'anno 1902 6.3
Escursione normale della temperatura 7.5
Differenza $(E - E_n)$. . . . . — 1.2

Pressione atmosferica.

(L'unità adottata è il mm.).

Nella tabella seguente sono dati la media, gli estremi e l'escursione annua della pressione atmosferica dell'ultimo decennio, nonchè la data nella quale si verificarono gli estremi.

Anno	Media	Massimo osservato M	Data dell'osservazione	Minimo osservato m	Data dell'osservazione	$M - m$
1893	737.49	753.22	30 XII	716.65	22 II	36.57
1894	37.72	50.44	26 XII	18.13	30 XII	32.31
1895	36.06	51.74	2 XI	18.00	16 V	33.74
1896	37.40	54.74	30 I	18.17	6 XII	36.57
1897	37.08	53.64	22 XI	10.15	23 I	43.49
1898	37.55	53.96	29 I	14.51	4 II	39.45
1899	38.21	50.20	20 X	19.10	14 XII	31.10
1900	38.21	50.60	10 III	15.14	28 I	35.46
1901	36.73	51.32	23 I	15.02	20 III	36.30
1902	37.04	53.20	15 I	17.81	30 XII	35.39

Nell'ultimo decennio la massima pressione fu di mm. 754.74, osservata nel 1896; mentre la minima di 710.15 si ebbe nell'anno seguente. Dal 1787, anno in cui cominciarono regolarmente le osservazioni sulla pressione atmosferica, al 1902, troviamo che la massima media annua fu di mm. 740,8 nel 1790, e la minima nel 1842 di mm. 735.1. Così pure nella serie degli estremi barometrici assoluti, in questo lungo periodo abbiamo un massimo di mm. 759.9, osservato il 16 Gennaio 1882, ed un minimo di mm. 709.4 il 19 Marzo 1797. Tenuto conto dell'interruzione di un anno nel periodo 1787-1902 il massimo barometrico si riscontrò 40 volte in Gennaio, 21 in Febbraio, 16 in Marzo, 1 in

Aprile, 2 in Settembre, 6 in Ottobre, 10 in Novembre, 19 in Dicembre; e nello stesso periodo senza alcuna interruzione, il minimo assoluto dell'anno si formò 25 volte in Gennaio, 23 in Febbraio, 19 in Marzo, 5 in Aprile, 1 in Maggio, 1 in Settembre, 6 in Ottobre, 9 in Novembre, 27 in Dicembre.

Analogamente a quello che si è fatto per la temperatura esaminiamo ora particolarmente la tabella III che ci dà le deviazioni giornaliere delle medie pressioni barometriche dai corrispondenti valori normali. In essa osserviamo che la massima deviazione è di 12.12 il 24 Dicembre; e il 30 dello stesso mese si nota anche la minima di — 18.05.

Il Gennaio è distinto per un periodo, dal 6 al 24, in cui la pressione si mantiene costantemente e notevolmente superiore alla normale; a questo periodo di alta pressione corrisponde in generale un periodo di belle giornate. Nei mesi seguenti di notevole non abbiamo che le forti depressioni dal 1° al 19 Febbraio, con giornate coperte, abbondanti nevicate e pioggie; dall'8 al 20 Maggio e dal 6 al 21 Giugno, alle quali corrisposero in generale brutte giornate. In Novembre invece riscontriamo un lungo periodo di deviazioni positive dal 1° al 24, accompagnato da giornate umide e miste. Delle variazioni repentine, le più notevoli sono tra il 24 e il 25 Gennaio, in cui il barometro si abbassò di mm. 13.70; e quella dal 29 al 30 Dicembre, in cui discese di mm. 11.09: tanto l'una che l'altra furono, si può dire, l'estinzione di una serie di belle giornate e ci portarono rispettivamente la prima e l'ultima neve dell'anno.

Direzione e forza del vento.

I numeri che rappresentano la frequenza dei venti durante l'anno 1902 sono rappresentati nella prima tabella della pagina seguente.

Riducendo ai quattro venti principali le cifre relative all'intero anno, ed instituendo le proporzioni per 1000 avremo:

N	E	S	W	Totale
376	197	271	156	1000

in cui è evidente il predominio del N, cui segue il S.

Mesi	Numero delle volte in cui fu osservato il vento da								Calma
	N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	
Gennaio . . .	8	3	4	—	40	2	3	2	31
Febbraio . . .	8	4	2	1	13	28	4	2	22
Marzo	13	10	7	4	10	19	6	8	16
Aprile	20	15	13	1	8	5	2	4	22
Maggio . . .	16	18	17	2	10	8	13	4	5
Giugno . . .	12	17	10	4	15	8	5	3	16
Luglio . . .	26	9	6	—	8	3	6	3	32
Agosto . . .	44	8	2	6	5	—	2	5	21
Settembre . .	36	13	5	4	2	1	2	6	21
Ottobre . . .	12	6	8	3	10	2	5	2	45
Novembre . .	6	6	3	1	15	5	—	1	53
Dicembre . .	12	5	4	3	16	4	10	—	39
Anno	213	114	81	29	152	85	58	40	323

Riaggruppando nei quattro quadranti dominanti, se ne deduce la prevalenza dei venti del 1° quadrante, a cui seguono quelli del 3°.

1° Q. (N-E)	2° Q. (E-S)	3° Q. (S-W)	4° Q. (W-N)	Totale
337	189	246	228	1000

Nella tabella che segue sono esposti i venti predominanti negli ultimi 10 anni.

Anno	Numero delle volte in cui fu osservato il vento da								Calma
	N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	
1893	117	238	71	21	124	150	65	30	279
1894	117	304	66	24	105	156	51	31	241
1895	101	239	89	31	106	174	89	19	247
1896	229	191	50	21	244	113	60	42	148
1897	197	227	92	27	165	98	65	40	184
1898	146	141	114	14	111	77	106	10	376
1899	114	127	84	14	119	123	95	24	395
1900	66	76	103	23	87	86	53	21	580
1901	173	135	88	26	168	77	73	30	325
1902	213	114	81	29	152	85	58	40	323

Si vede quindi che a Torino i venti dominanti sono quelli di N e NE, S e SW, cioè del primo e del terzo quadrante.

La forza del vento si apprezza a stima nella scala da 0 a 4, e per l'anno 1902 essa è indicata nella tabella seguente:

Ore	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 1902
9	0.9	1.0	1.1	1.0	1.6	1.1	0.8	1.0	0.8	0.5	0.4	0.6	0.9
15	1.3	1.3	1.7	1.5	2.0	1.6	1.3	1.1	0.9	0.7	0.6	0.8	1.2
21	1.1	1.0	1.0	0.8	1.3	1.0	0.6	0.7	0.6	0.5	0.3	0.9	0.8
Media	1.1	1.1	1.3	1.1	1.6	1.2	0.9	0.9	0.8	0.6	0.4	0.8	1.0

La forza media del vento ha una massima principale nel mese di Maggio, ed un secondo massimo nel Marzo; un minimo notevole in Novembre ed un secondo in Aprile. Nel 1902 il mese nel quale il vento ha soffiato con più forza fu dunque il mese di Maggio, nel qual mese, e precisamente il 18, soffiò per tutto il giorno un vento violentissimo di *W* che produsse parecchi danni ai fabbricati e alle persone.

Indico qui il significato di ciascuna delle cifre della scala suddetta e della velocità oraria approssimativa del vento, espressa in chilometri, corrispondente a ciascuna di esse cifre.

Notazione	Velocità Km. per ora
0 calma	Da 0 a 3
1 debole	„ 3 „ 9
2 moderato	„ 9 „ 18
3 forte	„ 18 „ 30
4 fortissimo	„ 30 e più.

La media velocità oraria del vento nell'anno, desunta dall'Anemografo negli ultimi 4 anni, è per Torino di Km. 4.41.

Tensione del Vapor acqueo ed Umidità relativa.

Per il 1902, la tensione media del vapore acqueo $T=7.5$, è di -0.6 differente dalla rispettiva normale T_n; l'umidità relativa U, paragonata colla normale annua U_n, dà $U-U_n=-3$.

Anno	Tensione del vapore			$T - T_n$	Umidità relativa			$U - U_n$
	Massima	Minima	Media		Massima	Minima	Media	
1893	17.9	1.4	8.2	+ 0.1	98	17	68	— 3
1894	16.8	1.2	7.8	— 0.3	100	10	70	— 1
1895	16.7	1.1	8.0	— 0.1	100	11	72	+ 1
1896	18.3	0.8	8.1	0.0	100	7	74	+ 3
1897	18.6	1.8	8.3	+ 0.2	100	13	69	— 2
1898	16.9	1.2	8.3	+ 0.2	99	10	69	— 2
1899	17.6	1.3	7.9	— 0.2	100	11	67	— 4
1900	17.0	1.3	8.2	+ 0.1	100	12	69	— 2
1901	17.8	1.2	7.9	— 0.2	100	11	74	+ 3
1902	17.7	1.7	7.5	— 0.6	100	5	68	— 3

La tensione del vapore è espressa in millimetri; l'umidità relativa in gradi centesimali, ossia in centesimi di saturazione.

In generale l'anno 1902 fu abbastanza asciutto.

Stato dell'atmosfera, precipitazioni d'ogni forma, fenomeni meteorici diversi.

La nebulosità del cielo si apprezza in decimi di cielo coperto. *O* rappresenta un cielo senza nubi, 10 un cielo completamente coperto. Il quadro seguente dà i dati relativi allo stato di nebulosità osservato nelle varie ore, per i diversi mesi dell'anno.

Ore di osservazione	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno 1902
9^h	4.6	7.5	4.6	7.5	4.2	4.8	3.5	4.9	5.1	5.9	7.6	5.6	5.5
15	4.3	6.5	3.5	6.5	4.6	4.8	2.6	4.1	4.6	5.5	6.6	4.4	4.9
21	4.1	6.4	2.5	7.0	4.9	4.2	3.1	4.3	3.7	4.5	6.3	4.7	4.6
Media	4.3	6.8	3.5	7.0	4.6	4.6	3.1	4.4	4.5	5.3	6.8	4.9	5.0

Se consideriamo come giorni sereni quei giorni in cui la somma dei decimi della nebulosità ottenuta dalle tre osserva-

zioni non sorpassa il numero 3, misti quelli nei quali detta somma varia da 4 a 26, coperti se la somma è di 27 a 30, otterremo per l'anno 1902 la tabella seguente. In questa è pure riportata la quantità d'acqua espressa in millimetri caduta all'altezza dell'Osservatorio sotto forma di pioggia e di neve, come pure il numero dei giorni nei quali avvennero questi fenomeni, nonchè il numero dei giorni con fenomeni meteorici diversi.

Mesi	Giorni			Precipitazioni in mm.			Giorni con		Giorni con				
	Sereni o quasi	Nuvolosi o coperti	Misti	Totale	Massimo	Data	Pioggia	Neve	Temporale	Grandine	Nebbia	Brina	Gelo
Gennaio	9	7	15	76.9	71.7	31	1	3	—	—	14	11	—
Febbraio	4	12	12	144.5	40.3	16	8	6	—	—	17	2	1
Marzo	11	5	15	12.6	10.3	22	5	—	1	—	3	—	—
Aprile	2	13	15	120.4	29.8	24	19	—	2	—	3	—	—
Maggio	6	4	21	77.0	35.8	9	15	—	3	1	1	—	—
Giugno	7	6	17	77.6	20.2	5	14	—	9	1	1	—	—
Luglio	11	2	18	27.1	23.7	16	8	—	5	1	—	—	—
Agosto	6	4	21	60.3	37.5	3	11	—	4	—	—	—	—
Settembre	5	6	19	54.0	24.8	30	8	—	2	—	1	—	—
Ottobre	4	6	21	87.4	26.4	11	10	—	3	—	7	—	—
Novembre	3	15	12	42.7	13.3	7	6	5	—	—	16	4	—
Dicembre	7	9	15	17.4	5.9	30	7	5	—	—	10	6	—
Anno	75	89	201	797.9	71.7	31 I	112	19	29	3	73	23	1

Rilevante è il numero dei giorni con nebbia, specialmente nei mesi di Febbraio e Novembre. Sono da rilevarsi, per la loro intensità, alcune nebbie di Gennaio e Dicembre e più ancora quelle di Novembre.

La massima quantità d'acqua caduta si ebbe in Febbraio, mentre la massima giornaliera fu il 31 Gennaio. Le maggiori nevicate dell'anno furono quelle degli ultimi due giorni di Gennaio e dei primi di Febbraio. Incominciò a nevicare nel pomeriggio del giorno 30 Gennaio e continuò, quasi senza interruzione, sino all' indomani alle ore 18; quindi si ebbe un po' di pioggia, ma nella notte riprese a nevicare e continuò fino al pomeriggio del giorno 2 Febbraio.

Misurata la neve in altezza si ebbero i seguenti valori:

31 Gennaio ore 20 . . . . . cm. 36
2 Febbraio „ 8 . . . . . „ 45

Bisogna notare però che l'altezza misurata il 31 Gennaio è certamente minore di un terzo di quella che si sarebbe ottenuta alle 18 ore, prima cioè che incominciasse la pioggia.

In quest'ultima tabella ho confrontato i dati relativi allo stato del cielo, precipitazioni e fenomeni diversi del 1902 con quelli degli ultimi 10 anni.

Anno	Stato del Cielo Giorni			Fenomeni diversi Giorni con							Precipitazioni in mm.		
	Sereni	Coperti	Misti	Pioggia	Neve	Pioggia e neve	Temporali	Grandine	Nebbia	Brina	Totale	Massimo	Data
1893	93	64	208	86	8	92	17	—	11	18	858.1	72.0	11 VII
1894	94	66	205	84	14	97	12	1	31	17	493.3	29.3	23 IV
1895	89	64	212	83	17	95	12	1	14	12	778.9	48.7	12 III
1896	78	85	203	120	9	128	23	1	21	19	1170.6	101.8	20 VIII
1897	90	82	193	100	7	107	18	1	10	10	1000.9	88.5	27 IV
1898	98	101	166	123	4	123	25	2	26	15	1088.8	60.8	7 III
1899	92	83	190	87	11	98	15	3	88	20	612.3	60.9	24 V
1900	73	89	203	121	6	126	24	4	38	33	959.9	60.9	14 V
1901	65	92	208	119	17	127	37	7	46	37	1482.8	83.1	24 IX
1902	75	89	201	113	19	125	29	3	73	23	797.9	71.7	31 I

Benchè i giorni di pioggia e di neve siano stati in quest'anno abbastanza numerosi, pur tuttavia la precipitazione totale fu di molto inferiore a quella dell'anno precedente, anno eccezionale per la quantità grandissima d'acqua caduta; e difatti nel lungo periodo dal 1803 in poi, una volta sola nel 1810, la precipitazione totale raggiunse un valore (mm. 1497.2) un po' superiore a quello dell'anno scorso.

Nel 1902 i temporali furono abbastanza frequenti; il loro numero fu di 34 circa, i più notevoli distribuiti in 29 giorni, ma in generale di poca intensità.

La tabella VI riassume le osservazioni meteorologiche fatte nelle stazioni Termo-Udometriche che trasmettono le loro osservazioni all'Osservatorio di Torino.

RIASSUNTO delle Osservazioni fatte nell'an

MESI	Pressione atmosferica			Temperatura								
				Media			Media delle massime giornaliere			Media delle mini giornaliere		
	Normale	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza
Gennaio .	739.78	741.77	+1.99	0.4	1.3	+0.9	3.6	4.1	+0.5	−2.2	−0.9	+
Febbraio.	38.57	34.49	−4.08	3.1	1.9	−1.2	6.7	4.1	−2.6	0.0	0.1	+
Marzo . .	35.26	35.14	−0.12	7.3	7.9	+0.6	11.4	12.1	+0.7	3.8	4.3	+
Aprile . .	34.35	35.73	+1.38	11.7	12.7	+1.0	16.1	15.9	−0.2	8.0	10.0	+
Maggio .	35.96	34.60	−1.36	16.2	13.7	−2.5	20.5	17.5	−3.0	12.0	9.7	−
Giugno .	36.74	35.37	−1.37	20.3	19.0	−1.3	24.7	22.6	−2.1	15.7	15.0	−
Luglio . .	36.68	37.26	+0.58	22.6	23.6	+1.0	27.3	27.6	+0.3	18.1	19.1	+
Agosto . .	37.15	36.86	−0.29	21.9	21.3	−0.6	25.4	24.9	−0.5	17.7	17.8	+
Settembre	37.85	38.52	+0.67	18.0	17.7	−0.3	22.1	21.4	−0.7	14.3	14.7	+
Ottobre .	37.73	37.23	−0.50	12.0	11.5	−0.5	15.7	14.5	−1.2	8.8	9.0	+
Novembre	37.08	38.70	+1.62	5.7	4.5	−1.2	9.0	6.8	−2.2	3.0	2.7	−
Dicembre	38.01	38.82	+0.81	1.2	2.8	+1.6	4.2	5.5	+1.3	−1.2	0.9	+
Anno . .	737.09	737.04	−0.05	11.7	11.5	−0.2	15.6	14.8	−0.8	8.2	8.5	+

I valori normali sono ridotti tenendo conto che le osservazioni sono fatte in ore di

Valori estr

	Pressione atmosferica	Temperatura
Massimi	753.20 il 15 gennaio	33.5 il 15 luglio
Minimi	717.81 il 30 dicembre	−4.8 il 1° gennaio, 6 febbra

2 e confronto coi valori normali.

sione del vapore			Umidità relativa			Precipitazioni in mm.			Giorni con pioggia o neve			MESI
	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza	Normale	1902	Differenza	
7	4.2	+0.5	83	79	—4	43.8	76.9	+33.1	7	3	—4	Gennaio
8	4.6	+0.8	77	84	+7	29.7	144.5	+114.8	5	12	+7	Febbraio
9	5.0	+0.1	69	61	—8	62.0	12.6	—49.4	8	5	—3	Marzo
1	8.2	+1.1	66	72	+6	122.1	120.4	—1.7	12	19	+7	Aprile
7	6.4	—3.3	66	53	—13	108.8	77.0	—31.8	13	15	+2	Maggio
7	9.4	—2.3	64	56	—8	79.5	77.6	—1.9	10	14	+4	Giugno
5	11.9	—0.6	61	52	—9	58.5	27.1	—31.4	8	8	0	Luglio
6	12.0	—0.6	64	60	—4	68.3	60.3	—8.0	8	11	+3	Agosto
0	10.7	—0.3	70	67	—3	68.5	54.0	—14.5	8	8	0	Settembre
6	7.9	—0.7	75	75	0	83.6	87.4	+3.8	10	10	0	Ottobre
5	5.8	—0.7	78	86	+8	69.1	42.7	—26.4	9	11	+2	Novembre
9	4.3	—0.6	83	76	—7	41.8	17.4	—24.4	7	9	+2	Dicembre
1	7.5	—0.6	71	68	—3	835.7	797.9	—37.8	105	125	+20	Anno

dell'Europa centrale, e non di tempo locale.

ervati.

Tensione del vapore	Umidità relativa	Pioggia in mm.	
17.7 l'8 e 27 luglio	100 il 18 novembre	71.7 il 31 gennaio	Massimi
1.7 l'11 luglio	5 l'11 luglio	—	Minimi

TABELLA I. — ***Deviazione della media temperatura diurna T dalla normale T***

Le differenze $T - T_n$ son

Giorni	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
1	— 1°.5	— 1°.1	— 1°.2	+ 2°.3	— 1°.1	0°.0
2	+ 0.5	— 1.4	+ 0.4	+ 2.2	— 0.1	+ 2.5
3	+ 2.1	— 1.9	+ 0.3	+ 1.7	— 2.2	+ **4.6**
4	+ 3.3	— 0.9	+ 0.4	+ 4.2	— 1.3	+ 0.2
5	+ 1.6	— **3.9**	+ 0.5	+ 3.6	— 0.3	— 0.2
6	+ 3.6	— 3.7	— 0.3	+ 2.6	— 1.8	+ 2.5
7	+ 2.6	— 1.3	— **1.6**	+ 2.2	— 3.5	0.0
8	+ 2.5	— 1.6	— 0.6	— 0.4	— 7.0	+ 0.7
9	+ 1.6	— 2.2	+ 1.5	— 0.6	— **7.6**	— 3.3
10	+ 1.1	— 0.3	+ 2.7	— 2.2	— 4.7	— **7.0**
11	+ 0.8	+ 1.8	+ 0.2	— 2.8	— 4.8	— 5.4
12	+ 0.6	— 1.5	+ 0.2	— 0.9	— 4.1	— 2.6
13	+ 0.1	— 0.5	+ 0.1	+ 2.0	— 3.5	— 3.1
14	0.0	— 2.1	— 0.8	+ 3.6	— 4.4	— 2.2
15	+ 0.2	— 1.0	— 1.3	+ 4.4	— 1.9	— 4.7
16	+ 0.6	— 1.9	+ 0.7	+ **4.7**	— 3.3	— 5.7
17	+ **5.4**	— 0.4	+ 0.8	+ 1.5	— 1.4	— 6.5
18	+ 2.0	— 0.5	+ 0.6	+ 1.7	— 1.3	— 2.8
19	+ 1.3	— 0.6	+ 2.0	+ 2.3	— 4.4	— 1.2
20	+ 1.0	— 0.7	+ 2.4	+ 2.6	— 4.2	— **7.0**
21	+ 2.2	+ **0.5**	— 0.1	+ 4.3	— 4.9	— 2.3
22	— 1.6	+ 0.3	— 1.3	+ 3.4	— 2.7	+ 1.0
23	— **2.3**	— 2.3	+ 0.3	— 0.6	— 2.3	+ 0.1
24	— 1.6	— 2.7	+ 0.5	— 1.0	— 1.5	+ 3.1
25	— 0.5	— 0.9	— 1.4	+ 3.0	+ 1.5	+ 1.0
26	+ 1.5	— **0.6**	0.0	+ 1.0	+ **2.0**	— 1.0
27	— 0.3	— 0.7	+ 1.6	+ 1.0	+ 0.9	— 1.4
28	— 1.2	— 0.6	+ 3.7	— 5.7	+ 0.8	+ 0.2
29	+ 0.6		+ 3.0	— **6.2**	— 0.3	+ 0.9
30	— 0.5		+ **4.4**	— 2.7	— 2.2	+ 1.2
31	— 0.2		+ 3.2		— 3.0	

lcolata sulle osservazioni di 9ʰ-21ʰ, massima e minima, ciascun giorno.

resse in gradi centigradi.

uglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Giorni
- 2°.4	— 0°.7	— 1°.2	— 2°.4	+ 1°.2	+ 2°.9	1
- 1.7	— 1.7	+ 0.4	— 2.8	+ 0.5	+ 3.7	2
- 1.6	— 2.8	+ 1.7	— 2.6	+ 1.7	+ 3.7	3
- 0.3	— 2.2	+ 2.2	— **4.0**	— 0.1	— 0.1	4
- 3.3	+ 0.1	+ 1.4	— 3.1	+ 0.5	— 1.1	5
- 5.4	+ 0.3	— 0.9	— 0.6	+ 1.3	— 0.4	6
- 2.9	+ 1.5	— 0.2	— 2.1	+ 1.0	— 0.8	7
- **6.2**	+ 0.1	+ 1.2	— 2.2	+ 2.6	— 0.8	8
- 6.0	+ 0.7	+ 1.3	— 1.0	+ 0.8	+ 0.4	9
- 3.3	— 1.5	+ **2.8**	— 0.3	+ 2.5	— 0.1	10
- 2.3	— 0.8	+ 2.1	+ 0.3	+ **2.7**	— **2.4**	11
- 0.4	— 3.5	+ 0.9	+ 1.6	+ 2.4	— 1.1	12
- 1.4	— **4.2**	+ 1.2	+ 1.8	+ 1.3	+ 0.2	13
- 1.3	— 3.3	— 2.6	+ **2.5**	— 0.2	+ 0.4	14
- 4.7	— 1.9	— 1.4	+ 1.8	+ 0.1	+ 0.1	15
- 1.0	— 0.8	— 0.2	+ 1.7	— 0.7	+ 1.4	16
- 0.9	+ 0.3	— 0.2	+ 1.4	— 2.2	+ 0.5	17
- 2.1	+ 1.1	+ 0.1	— 1.4	— 5.3	+ 7.7	18
- 1.2	+ 2.3	— 0.8	— 0.5	— 5.5	+ **9.8**	19
- 2.4	+ **2.5**	— 1.0	— 1.9	— 4.5	+ 3.5	20
- 2.6	+ 0.8	+ 0.6	— 0.8	— 4.8	+ 3.3	21
- 2.4	— 0.4	+ 0.2	— 0.9	— 3.6	+ 2.6	22
- **2.8**	— 0.3	— 2.9	— 0.7	— **7.2**	+ 0.9	23
- 2.2	+ 0.3	— 1.3	— 0.9	— 6.5	+ 0.6	24
- 1.5	— 0.1	— 2.1	— 1.3	— 5.1	— 0.3	25
- 0.5	— 1.7	— 2.4	— 1.0	— 4.1	+ 2.0	26
- 1.5	— 2.0	— 0.2	+ 0.3	— 2.9	+ 3.5	27
- 1.5	— 0.1	— 1.2	— 0.6	— 0.5	+ 0.6	28
- 1.3	0.0	— 1.6	+ 0.1	— 0.7	+ 2.2	29
- 0.8	+ 0.3	— **3.2**	+ 1.5	+ 1.1	+ 1.3	30
- 0.1	+ 0.7		+ 0.7		+ 2.1	31

TABELLA II. — ***Escursione diurna della temperatura osservata (E), e deviazione dall'escursione normale (E_n).***

Le differenze E-E_n sono espresse in gradi centigradi.

Giorni	Gennaio			Febbraio			Marzo		
	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n
1	5.4	7.0	+ 1.6	6.3	**0.7**	— **5.6**	7.2	5.8	— 1.4
2	5.4	3.9	— 1.5	6.3	**0.7**	— **5.6**	7.2	4.2	— 3.0
3	5.5	5.6	+ 0.1	6.3	3.4	— 2.9	7.3	6.4	— 0.9
4	5.5	5.5	**0.0**	6.3	1.6	— 4.7	7.3	7.1	— **0.2**
5	5.5	4.3	— 1.2	6.3	6.5	+ **0.2**	7.3	7.7	+ 0.4
6	5.5	5.7	+ 0.2	6.4	5.5	— 0.9	7.4	6.8	— 0.6
7	5.5	6.7	+ 1.2	6.4	2.6	— 3.8	7.4	6.4	— 1.0
8	5.5	5.3	— 0.2	6.5	3.8	— 2.7	7.4	7.5	+ 0.1
9	5.5	5.3	— 0.2	6.5	3.9	— 2.6	7.5	11.3	+ 3.8
10	5.5	6.2	+ 0.7	6.5	4.5	— 2.0	7.5	7.0	— 0.5
11	5.6	4.7	— 0.9	6.6	5.6	— 1.0	7.5	7.2	— 0.3
12	5.6	4.0	— 1.6	6.6	6.3	— 0.3	7.5	10.3	+ 2.8
13	5.6	4.5	— 1.1	6.7	3.7	— 3.0	7.6	7.2	— 0.4
14	5.6	5.6	0.0	6.7	**8.2**	+ 1.5	7.6	**1.6**	— 6.0
15	5.7	6.4	+ 0.7	6.7	2.7	— 4.0	7.6	2.1	— 5.5
16	5.7	4.4	— 1.3	6.8	2.1	— 4.7	7.6	7.9	+ 0.3
17	5.7	**8.9**	+ 3.2	6.8	3.4	— 3.4	7.6	10.4	+ 2.8
18	5.8	4.8	— 1.0	6.9	4.5	— 2.4	7.7	9.6	+ 1.9
19	5.8	4.1	— 1.7	6.9	4.9	— 2.0	7.7	10.7	+ 3.0
20	5.8	6.1	+ 0.3	6.9	2.7	— 4.2	7.7	9.4	+ 1.7
21	5.9	6.6	+ 0.7	7.0	4.8	— 2.2	7.7	3.6	— 4.1
22	5.9	2.8	— 3.1	7.0	4.2	— 2.8	7.7	2.0	— 5.7
23	5.9	2.2	— 3.7	7.0	5.8	— 1.2	7.7	5.2	— 2.5
24	6.0	3.6	— 2.4	7.1	5.2	— 1.9	7.7	8.2	+ 0.5
25	6.1	**1.1**	— **5.0**	7.1	3.5	— 3.6	7.7	6.8	— 0.9
26	6.1	7.8	+ 1.7	7.1	5.8	— 1.3	7.8	9.6	+ 1.8
27	6.2	4.6	— 1.6	7.2	3.5	— 3.7	7.8	8.2	+ 0.4
28	6.2	3.2	— 3.0	7.2	1.6	— **5.6**	7.8	**13.8**	+ **6.0**
29	6.2	5.5	— 0.7				7.9	10.7	+ 2.8
30	6.2	3.3	— 2.9				7.9	12.7	+ 4.8
31	6.3	2.2	— 4.1				7.9	13.1	+ 5.2
Media	5.8	4.9	— 0.9	6.7	4.0	— 2.7	7.6	7.8	+ 0.2

Segue TABELLA II.

Giorni	Aprile			Maggio			Giugno		
	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n
1	7.9	**9.9**	+ 2.0	8.3	10.0	+ 1.7	8.9	8.6	— 0.3
2	8.0	5.2	— 2.8	8.4	**12.3**	+ 3.9	8.9	8.3	— 0.6
3	8.0	2.6	— 5.4	8.4	8.3	— 0.1	8.9	10.6	+ 1.7
4	8.0	7.6	— 0.4	8.4	6.9	— 1.5	8.9	4.8	— 4.1
5	8.0	7.1	— 0.9	8.4	8.6	+ 0.2	8.9	6.4	— 2.5
6	8.0	5.9	— 2.1	8.4	9.9	+ 1.5	9.0	7.5	— 1.5
7	8.0	8.4	+ 0.4	8.4	7.2	— 1.2	9.0	8.4	— 0.6
8	8.0	6.4	— 1.6	8.4	**1.4**	— **7.0**	9.0	8.7	— 0.3
9	8.0	4.3	— 3.7	8.4	5.3	— 3.1	9.0	6.2	— 2.8
10	8.0	4.0	— 4.0	8.4	8.0	— 0.4	9.0	**1.9**	— **7.1**
11	8.0	4.2	— 3.8	8.5	6.0	— 2.5	9.0	4.1	— 4.9
12	8.0	3.3	— 4.7	8.5	8.0	— 0.5	9.0	8.4	— 0.6
13	8.1	7.9	— 0.2	8.5	7.7	— 0.8	9.1	6.0	— 3.1
14	8.1	9.7	+ 1.6	8.5	5.3	— 3.2	9.1	8.9	— 0.2
15	8.1	5.8	— 2.3	8.5	10.3	+ 1.8	9.1	6.0	— 3.1
16	8.1	7.0	— 1.1	8.6	10.1	+ 1.5	9.1	7.6	— 1.5
17	8.1	2.7	— 5.4	8.6	8.6	**0.0**	9.1	6.9	— 2.2
18	8.2	4.1	— 4.1	8.6	8.6	**0.0**	9.1	11.5	+ 2.4
19	8.2	4.9	— 3.3	8.6	7.0	— 1.6	9.1	10.6	+ 1.5
20	8.2	5.4	— 2.8	8.7	7.6	— 1.1	9.2	2.3	— 6.9
21	8.2	7.8	— 0.4	8.7	7.7	— 1.0	9.2	**13.2**	+ 4.0
22	8.2	8.1	— 0.1	8.7	10.6	+ 1.9	9.2	10.0	+ 0.8
23	8.2	2.6	— 5.6	8.7	7.0	— 1.7	9.2	7.9	— 1.3
24	8.2	**2.3**	— **5.9**	8.7	10.3	+ 1.6	9.2	10.5	+ 1.3
25	8.3	8.3	**0.0**	8.8	11.7	+ 2.9	9.2	4.8	— 4.4
26	8.3	5.7	— 2.6	8.8	10.0	+ 1.2	9.2	6.1	— 3.1
27	8.3	5.5	— 2.8	8.8	6.5	— 2.3	9.2	7.5	— 1.7
28	8.3	6.4	— 1.9	8.8	6.9	— 1.9	9.2	8.3	— 0.9
29	8.3	4.9	— 3.4	8.8	6.9	— 1.9	9.2	6.8	— 2.4
30	8.3	7.5	— 0.8	8.8	6.5	— 2.3	9.2	9.3	+ **0.1**
31				8.9	1.8	— 7.1			
Media	8.1	5.8	— 2.3	8.6	7.9	— 0.7	9.0	7.6	— 1.4

Segue TABELLA II.

Giorni	Luglio			Agosto			Settembre		
	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n
1	9.2	10.5	+ 1.3	9.1	6.4	— 2.7	8.3	2.8	— 5.5
2	9.2	8.1	— 1.1	9.0	6.1	— 2.9	8.2	9.0	+ 0.8
3	9.3	8.8	— 0.5	9.0	7.7	— 1.3	8.1	7.7	— 0.4
4	9.3	8.7	— 0.6	9.0	6.4	— 2.6	8.0	8.2	+ 0.2
5	9.3	12.4	+ 3.1	9.0	6.8	— 2.2	8.0	9.0	+ 1.0
6	9.3	12.2	+ 2.9	8.9	6.6	— 2.3	8.0	4.0	— 4.0
7	9.3	9.2	— 0.1	8.9	6.7	— 2.2	8.0	7.5	— 0.5
8	9.3	9.0	— 0.3	8.9	8.2	— 0.7	8.0	9.0	+ 1.0
9	9.3	8.6	— 0.7	8.9	7.9	— 1.0	8.0	9.7	+ 1.7
10	9.3	**5.2**	**— 4.1**	8.8	6.5	— 2.3	8.0	8.1	+ 0.1
11	9.3	9.4	+ 0.1	8.8	8.8	**0.0**	8.0	5.6	— 2.4
12	9.3	6.8	— 2.5	8.8	5.4	— 3.4	7.9	4.8	— 3.1
13	9.3	9.8	+ 0.5	8.8	8.8	0.0	7.8	**10.0**	+ 2.2
14	9.3	11.4	+ 2.1	8.8	**10.3**	+ 1.5	7.8	2.2	— 5.6
15	9.3	**13.3**	+ 4.0	8.7	8.8	+ 0.1	7.8	8.6	+ 0.8
16	9.3	7.5	— 1.8	8.7	7.4	— 1.7	7.7	9.4	+ 1.7
17	9.2	10.0	+ 0.8	8.7	6.8	— 1.9	7.7	7.8	**+ 0.1**
18	9.2	9.3	+ 0.1	8.7	8.6	— 0.1	7.7	7.6	**— 0.1**
19	9.2	6.8	— 2.4	8.7	7.5	— 2.2	7.7	5.0	— 2.7
20	9.2	6.7	— 2.5	8.6	6.8	— 1.8	7.7	5.7	— 2.0
21	9.2	6.6	— 2.6	8.6	7.9	— 0.7	7.7	8.9	+ 1.2
22	9.2	7.6	— 1.6	8.6	8.4	— 0.2	7.7	6.1	— 1.6
23	9.2	9.5	+ 0.3	8.6	7.4	— 1.2	7.6	**0.7**	**— 6.9**
24	9.2	6.1	— 3.1	8.5	6.8	— 1.7	7.6	4.4	— 3.2
25	9.2	9.2	**0.0**	8.5	4.7	— 3.8	7.6	6.3	— 1.3
26	9.1	7.7	— 1.4	8.5	**3.9**	**— 4.6**	7.5	8.4	+ 0.9
27	9.1	5.3	— 3.8	8.4	6.3	— 2.1	7.5	6.9	— 0.6
28	9.1	8.6	— 0.5	8.4	7.3	— 1.1	7.5	9.8	+ 2.3
29	9.1	7.4	— 1.7	8.4	4.6	— 3.8	7.5	3.8	— 3.7
30	9.1	6.3	— 2.8	8.4	7.0	— 1.4	7.4	2.4	— 5.0
31	9.1	6.3	— 2.8	8.3	7.7	— 0.6			
Media	9.2	8.5	— 0.7	8.7	7.1	— 1.6	7.8	6.7	— 1.1

Segue TABELLA II.

Giorni	Ottobre			Novembre			Dicembre		
	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n	E_n	E	E-E_n
1	7.4	5.8	— 1.6	6.4	6.3	**— 0.1**	5.5	3.6	— 1.9
2	7.4	5.3	— 2.1	6.3	**7.5**	+ 1.2	5.5	5.1	— 0.4
3	7.3	8.6	+ 1.3	6.3	6.9	+ 0.6	5.5	4.6	— 0.9
4	7.3	3.6	— 3.7	6.3	5.5	— 0.8	5.5	2.6	— 2.9
5	7.3	1.7	— 5.6	6.4	6.9	+ 0.5	5.5	5.0	— 0.6
6	7.3	4.7	— 2.6	6.2	1.7	— 4.5	5.5	3.9	— 1.5
7	7.2	4.6	— 2.6	6.2	**0.9**	**— 5.3**	5.4	1.4	— 4.0
8	7.2	6.9	— 0.3	6.2	3.8	— 2.4	5.4	2.4	— 3.0
9	7.2	6.8	— 0.4	6.1	4.4	— 1.7	5.4	3.9	— 1.5
10	7.1	2.4	— 4.7	6.1	4.8	— 1.3	5.4	4.8	— 0.6
11	7.1	**1.3**	**— 5.8**	6.1	5.0	— 1.1	5.4	2.6	— 2.8
12	7.1	5.2	— 1.9	6.1	5.5	— 0.6	5.4	4.0	— 1.4
13	7.0	6.2	— 0.8	6.1	2.6	— 3.5	5.4	4.0	— 1.4
14	7.0	3.4	— 3.6	6.1	4.3	— 1.8	5.4	5.2	— 0.2
15	7.0	7.8	+ 0.8	6.0	6.3	+ 0.3	5.4	4.8	— 0.6
16	6.9	4.7	— 2.2	6.0	6.9	+ 0.9	5.3	6.7	+ 1.4
17	6.9	5.1	— 1.8	5.9	4.0	— 1.9	5.3	5.4	**— 0.0**
18	6.9	**9.2**	+ 2.3	5.9	1.2	— 4.7	5.4	**15.4**	**+ 10.0**
19	6.9	7.4	+ 0.5	5.8	3.1	— 2.7	5.4	3.6	— 1.8
20	6.8	8.0	+ 1.2	5.8	3.3	— 2.5	5.4	5.5	**+ 0.1**
21	6.8	5.7	— 1.1	5.8	3.7	— 2.1	5.4	8.0	+ 2.6
22	6.8	4.7	— 2.1	5.7	3.8	— 1.9	5.4	6.4	+ 1.0
23	6.7	6.5	— 0.2	5.7	2.9	— 2.8	5.4	3.7	— 1.7
24	6.7	4.5	— 2.2	5.7	1.9	— 3.8	5.4	2.6	— 2.8
25	6.6	6.1	— 0.5	5.7	2.2	— 3.5	5.4	5.3	**— 0.1**
26	6.6	7.0	+ 0.4	5.6	2.1	— 3.5	5.4	7.5	+ 2.1
27	6.5	3.3	— 3.2	5.6	3.7	— 1.9	5.4	5.6	+ 0.2
28	6.5	7.9	+ 1.4	5.6	5.4	— 0.2	5.4	3.7	— 1.7
29	6.5	2.0	— 4.5	5.6	2.5	— 3.1	5.4	**1.2**	— 4.2
30	6.4	6.3	**— 0.1**	5.6	2.1	— 3.5	5.4	1.4	— 4.0
31	6.4	7.8	+ 1.4				5.4	4.1	— 1.3
Media	6.9	5.4	— 1.5	6.0	4.0	— 2.0	5.4	4.6	— 0.8

TABELLA III. — ***Deviazione della media pressione atmosferic dalla normale***

Le differenze $P - P_n$ so

Giorni	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugn
1	+ 4.56	— 6.36	— 4.17	— 0.15	— 4.94	+ 2.
2	— 4.20	— 2.23	+ 0.26	+ 0.74	— 3.47	+ 2.
3	— 4.76	— 1.69	+ 0.86	+ 1.93	+ 1.41	— 0.
4	+ 3.33	— 5.72	— 1.25	+ 1.01	— 1.19	+ 2.
5	— 0.90	— 1.27	+ 3.86	+ 0.95	— 1.34	+ 0.
6	+ 6.03	— 0.05	+ 6.15	— 0.54	+ 0.81	— 3.
7	+ 6.42	— 4.56	— 0.23	— 0.11	+ 1.12	— 6.
8	+ 10.27	**— 10.70**	— 6.92	+ 5.04	— 3.04	**— 11.**
9	+ 8.92	— 10.08	**— 9.22**	+ 5.18	— 8.01	— 6.
10	+ 6.71	— 10.61	— 6.33	+ 5.34	— 5.68	— 6.
11	+ 3.75	— 6.02	— 0.84	+ 3.52	— 2.57	— 5.
12	+ 4.53	— 3.80	— 0.54	+ 2.03	— 3.16	— 5.
13	+ 2.74	— 9.92	+ 5.70	— 0.34	— 3.91	— 5.
14	+ 3.55	— 9.75	**+ 11.08**	— 0.65	— 5.14	— 5.
15	**+ 11.63**	— 7.80	+ 7.56	— 0.69	— 3.09	— 4.
16	+ 5.05	— 6.70	+ 1.90	— 1.23	— 0.04	— 4.
17	+ 2.26	— 4.49	+ 2.77	+ 1.28	— 4.07	— 2.
18	+ 2.35	— 3.68	+ 5.79	+ 3.27	— 8.88	— 2.
19	+ 5.67	— 1.92	+ 4.49	+ 6.00	**— 10.71**	— 3.
20	+ 7.50	+ 2.32	+ 1.78	**+ 7.47**	— 5.28	— 4.
21	+ 5.07	+ 3.39	— 0.51	+ 5.91	+ 1.43	— 1.
22	+ 6.13	**+ 3.82**	— 6.95	+ 1.24	+ 3.41	+ 3.
23	+ 4.63	+ 2.82	— 9.13	+ 1.20	+ 2.52	+ 3.
24	+ 1.18	— 1.20	— 4.13	+ 4.46	**+ 6.49**	+ 0.
25	**— 12.51**	— 6.66	— 1.39	+ 3.17	+ 4.83	— 0.
26	— 9.00	— 7.06	+ 0.36	— 3.17	+ 3.12	+ 3
27	— 6.95	— 3.92	+ 1.75	**— 4.91**	+ 2.42	+ 6
28	— 7.25	— 3.38	— 1.24	— 2.12	+ 2.21	+ 7.
29	— 7.65		— 0.13	— 3.12	+ 2.74	+ 4
30	— 2.49		— 5.20	— 1.56	+ 2.95	+ 2
31	+ 0.69		— 3.29		+ 2.06	

rnaliera P calcolata sulle osservazioni di 9ʰ, 15ʰ, 21ʰ,
ciascun giorno.

resse in millimetri.

uglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Giorni
- 0.47	+ 2.39	+ 1.71	— 6.52	+ 1.20	— 5.71	1
- 2.31	— 0.82	+ 1.03	— 6.43	+ 1.59	— 6.59	2
- 2.19	— 3.57	+ 2.02	— 2.45	+ 5.28	— 4.87	3
- 5.76	+ 0.63	+ 2.62	+ 0.22	+ 4.52	— 4.87	4
- 3.48	+ 1.25	+ 0.49	— 2.91	+ 3.11	— 2.99	5
- 1.17	**+ 2.55**	— 1.06	— 5.07	+ 2.30	— 3.90	6
- 3.87	+ 1.05	+ 1.64	— 5.46	+ 1.25	— 0.25	7
- 2.36	— 1.50	+ 2.12	— 0.51	+ 2.99	— 0.04	8
- 0.36	— 2.20	+ 0.53	+ 0.58	+ 0.95	+ 0.10	9
- 4.71	— 0.02	— 0.66	— 2.16	+ 1.82	+ 5.06	10
- 4.43	**— 4.86**	— 2.15	— 6.51	+ 3.17	+ 8.78	11
- 2.60	— 2.68	— 6.63	— 4.21	+ 4.31	+ 9.75	12
- 5.69	— 0.50	**— 8.48**	+ 7.23	+ 6.45	+ 9.23	13
- 4.67	— 1.27	— 1.93	+ 3.60	+ 7.18	+ 9.74	14
- 0.55	+ 0.09	+ 0.31	+ 1.27	**+ 7.25**	+ 6.36	15
- 1.44	+ 1.36	+ 0.79	— 2.93	+ 0.84	+ 7.40	16
- 1.83	— 0.79	— 0.52	**— 8.32**	+ 2.51	+ 5.83	17
- 0.88	+ 1.26	— 0.05	— 3.18	+ 4.02	— 1.49	18
- 3.67	+ 1.52	+ 4.87	+ 0.33	+ 4.00	— 2.07	19
- 6.92	— 2.85	**+ 7.06**	+ 3.53	+ 1.36	+ 0.86	20
- 5.96	— 0.23	+ 3.58	+ 3.72	+ 0.84	— 2.97	21
- 0.90	+ 2.15	+ 3.79	+ 2.06	+ 5.63	+ 5.45	22
- 1.16	+ 2.34	+ 5.77	+ 5.17	+ 5.17	+ 9.98	23
+ 0.35	+ 0.41	+ 4.71	**+ 10.51**	+ 3.43	**+ 12.12**	24
+ 0.15	— 1.50	+ 5.75	+ 8.40	— 3.74	+ 7.30	25
+ 2.93	— 1.28	+ 5.63	+ 2.51	**— 10.67**	— 0.11	26
- 1.17	— 0.17	+ 3.84	— 1.70	— 6.35	+ 1.48	27
- 1.20	+ 1.00	— 4.30	— 1.89	— 3.75	+ 1.19	28
- 5.38	— 0.53	— 6.34	+ 0.65	— 4.46	— 6.88	29
- 4.73	— 2.28	— 6.23	+ 0.03	— 3.68	**— 18.05**	30
- 3.07	+ 0.79		— 2.31		— 15.10	31

TABELLA IV. — ***Deviazione della medi***
dalla rispettiva normal

Le differenze $T_m - T_n$ son

Giorni	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
1	— 0.6	+ 0.9	+ 1.4	+ 0.3	— 2.6	— 0.1
2	0.0	+ 1.0	+ 1.6	+ 1.9	— 2.8	+ 1.6
3	+ 0.5	+ 0.7	+ 1.6	+ 3.0	— 1.2	+ 0.6
4	+ 0.6	+ 1.1	+ 1.2	**+ 3.1**	— 0.3	+ 1.4
5	+ 0.5	**— 0.2**	+ 0.9	+ 2.5	— 4.2	+ 0.9
6	+ 0.2	0.0	+ 1.1	+ 2.5	— 5.7	+ 0.2
7	0.0	+ 0.7	+ 0.5	— 1.3	— 4.2	— 0.8
8	+ 0.4	+ 0.6	0.0	— 0.9	— 2.0	— 4.4
9	+ 0.4	+ 0.3	+ 0.3	— 0.5	— 2.9	— 2.8
10	+ 0.5	+ 0.5	+ 0.3	— 0.2	— 3.2	— 1.9
11	+ 0.6	+ 0.5	— 1.7	— 0.1	— 2.2	— 1.8
12	+ 0.5	+ 0.4	— 0.8	+ 0.7	— 2.4	— 1.2
13	+ 0.2	+ 0.9	— 0.1	+ 2.4	— 2.9	— 1.0
14	+ 0.2	+ 0.8	+ 0.8	+ 1.6	— 1.9	**— 8.2**
15	+ 0.5	+ 1.0	+ 1.0	+ 2.9	— 5.9	— 3.5
16	+ 0.2	+ 0.9	— 0.5	+ 1.8	— 2.1	— 4.0
17	+ 0.2	+ 1.3	— 1.7	+ 2.5	— 0.7	— 5.9
18	**+ 1.1**	+ 1.2	— 1.0	+ 2.1	**— 7.5**	— 6.5
19	+ 1.0	+ 0.8	— 0.6	+ 2.2	— 5.0	— 3.8
20	+ 1.0	+ 1.0	+ 0.4	+ 1.8	— 5.4	— 1.7
21	+ 0.8	+ 0.7	+ 1.2	+ 1.9	— 4.4	— 4.2
22	+ 0.5	+ 1.4	**+ 1.7**	+ 1.9	— 5.3	— 5.9
23	+ 0.4	+ 0.4	+ 0.8	+ 1.8	— 6.1	— 1.8
24	+ 0.6	0.0	**— 2.5**	+ 1.4	— 5.5	— 2.5
25	+ 0.8	+ 0.9	— 0.4	+ 0.8	— 4.5	— 2.8
26	— 1.2	+ 1.1	— 1.5	+ 1.0	— 2.9	— 4.0
27	**— 0.7**	+ 1.4	— 1.7	+ 0.7	— 1.7	— 2.4
28	+ 0.3	**+ 1.7**	— 1.3	— 1.2	**0.0**	— 2.4
29	+ 0.6		+ 1.5	— 2.1	— 1.3	— 1.4
30	+ 0.7		+ 0.1	**— 2.6**	— 2.2	— 2.3
31	**+ 1.1**		+ 0.1		— 0.1	

ensione quotidiana T_m del vapor acqueo
$_m$ di ciascun giorno.

presse in millimetri.

Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Giorni
— 1.1	— 1.0	+ 1.9	— 1.6	— 0.1	**+ 1.2**	1
— 0.6	+ 1.5	+ 2.1	— 2.0	0.0	0.0	2
— 4.8	— 0.6	+ 2.8	— 1.7	— 0.1	— 1.3	3
— 1.1	+ 0.7	+ 3.1	— 1.3	— 0.6	— 0.6	4
— 0.3	— 0.2	+ 1.9	— 0.2	— 0.4	— 0.7	5
+ 0.1	**+ 2.0**	+ 0.5	+ 0.2	+ 1.0	— 0.5	6
+ 3.8	+ 1.0	+ 0.4	— 1.1	**+ 1.1**	— 0.7	7
+ 4.0	+ 1.2	+ 0.5	— 0.9	**+ 1.1**	— 0.6	8
+ 0.4	— 2.5	+ 0.9	— 0.1	+ 0.9	— 0.3	9
— 0.5	— 2.8	+ 2.3	+ 0.9	+ 0.5	— 0.5	10
— 9.1	— 5.9	**+ 3.6**	+ 1.2	+ 0.6	— 0.6	11
— 6.8	— 4.0	+ 1.3	+ 1.5	+ 0.6	— 0.4	12
— 3.1	**— 6.4**	— 1.4	+ 1.3	+ 1.0	— 0.9	13
— 0.4	— 3.1	— 1.4	+ 1.2	+ 0.2	— 0.5	14
+ 0.8	— 1.2	— 1.1	+ 1.0	— 1.4	— 0.6	15
+ 1.0	— 0.2	— 0.8	**+ 1.8**	— 1.4	— 0.6	16
+ 0.1	+ 1.1	— 0.3	— 3.6	— 1.9	— 0.7	17
+ 1.0	**+ 2.0**	— 1.0	**— 4.0**	— 1.8	— 0.6	18
+ 1.6	+ 1.4	+ 0.2	— 2.9	— 1.9	**— 1.9**	19
0.0	+ 1.7	— 1.0	— 1.4	— 1.8	— 1.4	20
— 1.4	— 3.1	— 1.2	— 0.6	— 1.7	— 0.3	21
— 3.9	— 2.0	— 0.9	— 0.7	— 1.4	— 0.5	22
— 2.3	— 1.1	— 2.6	— 0.9	**— 2.2**	— 0.3	23
— 1.1	— 1.9	— 2.4	— 2.2	— 2.1	— 0.2	24
— 0.6	+ 0.2	— 2.5	— 1.9	— 1.7	— 0.5	25
+ 1.2	0.0	— 2.4	— 1.1	— 1.5	— 0.1	26
+ 3.7	— 0.4	**— 3.2**	— 0.3	— 1.0	+ 0.7	27
— 3.9	+ 0.5	— 2.9	— 1.1	— 0.1	+ 0.6	28
— 2.9	+ 1.9	— 2.6	— 0.6	— 0.6	+ 1.1	29
— 2.0	+ 1.7	— 1.1	— 0.2	+ 0.5	+ 0.6	30
— 0.3	+ 1.6		— 0.1		+ 0.7	31

TABELLA V. — ***Deviazione della media dalla rispettiva***

I valori di $U_m - U_n$ sono espressi in gradi

Giorni	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
1	— 6	+ 16	+ 13	— 11	— 17	— 2
2	— 5	+ 17	+ 11	+ 6	— 22	— 4
3	— 6	+ 12	+ 7	+ 11	— 2	— 15
4	— 8	+ 14	+ 2	+ 8	+ 3	+ 11
5	+ 1	+ 3	— 2	+ 5	— 29	+ 6
6	— 20	+ 3	+ 5	+ 10	— 40	— 6
7	— 19	+ 8	+ 4	**— 20**	— 22	— 6
8	— 9	+ 5	— 5	— 7	**+ 19**	— 27
9	— 4	+ 5	— 13	— 2	+ 9	— 1
10	— 1	— 2	— 15	+ 13	— 8	+ 22
11	+ 1	+ 3	— 31	+ 11	+ 3	+ 17
12	+ 2	**— 3**	— 21	+ 12	— 2	+ 3
13	— 1	+ 9	— 12	+ 12	— 8	+ 8
14	— 3	+ 6	+ 8	— 4	+ 4	**— 43**
15	— 1	+ 11	+ 14	+ 3	— 38	— 2
16	— 8	+ 17	— 16	— 4	— 3	— 5
17	— 31	+ 13	— 31	+ 18	— 1	— 9
18	0	+ 8	— 21	+ 12	**— 50**	— 32
19	+ 6	+ 2	— 21	+ 11	— 19	— 20
20	+ 3	+ 10	— 13	+ 5	— 26	**+ 24**
21	— 7	**— 3**	+ 10	— 4	— 15	— 16
22	+ 12	+ 10	**+ 25**	— 1	— 30	— 32
23	**+ 14**	+ 5	+ 3	**+ 25**	— 36	— 9
24	+ 13	— 1	— 35	+ 22	— 34	— 24
25	+ 11	+ 6	— 1	— 6	— 33	— 15
26	**— 40**	+ 6	— 18	+ 5	— 23	— 18
27	— 23	+ 14	— 26	+ 3	— 14	— 9
28	— 2	**+ 19**	— 28	+ 26	— 3	— 15
29	— 3		— 5	+ 7	— 7	— 10
30	+ 6		— 19	— 11	— 12	— 17
31	+ 13		— 15		+ 15	

umidità relativa U_m di ciascun giorno
normale quotidiana U_n.

entesimali, ossia in centesimi di saturazione.

Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Giorni
— 16	— 6	**+ 18**	0	0	+ 10	1
— 11	**+ 13**	+ 9	— 3	+ 4	— 3	2
— 30	+ 7	+ 3	— 2	— 4	— 28	3
— 7	+ 8	+ 1	+ 9	+ 1	+ 2	4
— 15	— 4	+ 1	**+ 19**	0	— 8	5
— 19	+ 5	+ 6	+ 6	+ 15	+ 5	6
+ 2	— 4	— 1	+ 4	**+ 19**	+ 5	7
— 7	0	— 6	+ 2	+ 10	+ 4	8
— 19	— 17	— 5	+ 4	+ 14	+ 2	9
— 11	— 13	— 3	+ 14	+ 3	+ 1	10
— 47	**— 27**	+ 8	+ 14	+ 1	**+ 13**	11
— 34	— 10	+ 2	+ 8	+ 4	+ 8	12
— 14	— 25	— 15	+ 3	+ 16	— 8	13
— 9	— 10	+ 2	+ 5	+ 14	— 6	14
— 15	— 2	— 4	+ 1	**— 10**	— 5	15
+ 6	— 2	— 7	+ 11	— 9	— 12	16
— 4	+ 3	— 3	— 20	— 5	— 9	17
— 5	+ 3	— 9	**— 30**	+ 16	— 38	18
+ 10	— 5	+ 4	— 23	+ 9	**— 55**	19
+ 7	— 3	— 7	— 2	+ 6	— 33	20
+ 1	— 20	— 11	+ 3	+ 10	— 19	21
— 14	— 12	— 8	+ 2	+ 8	— 17	22
— 4	— 7	— 6	— 1	+ 14	— 5	23
+ 1	— 14	— 12	— 12	+ 14	— 3	24
— 2	— 1	— 10	— 8	+ 13	— 5	25
+ 4	+ 6	— 8	— 1	+ 11	— 12	26
+ 9	+ 4	**— 22**	+ 3	+ 13	— 6	27
— 24	— 2	— 17	— 2	+ 11	+ 12	28
— 12	+ 11	— 12	+ 1	+ 13	+ 12	29
— 8	+ 5	+ 11	— 1	+ 14	+ 11	30
— 5	+ 2		+ 2		+ 1	31

TABELLA VI. — ***Riassunto delle Osservazion***
fatte nelle Stazioni Termo-Udometriche che trasmettono

Mesi	CASTELLAMONTE Osservatore: A. Derossi			CHIVASSO Oss.: Prof. Ramoino			CUORGNÈ Oss.: C. Cami			IVREA Oss.: Bisio Gerolan		
	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.
Gennaio	10°.7	— 2°.1	66.5	2°.5	—2°.7	51.0	5°.9	0°.1	—	5.6	—1°.2	217
Febbraio	8.7	— 1.4	135.3	3.2	— 1.9	145.9	4.5	0.3	165.7	5.6	0.0	317
Marzo	15.7	2.7	38.1	12.3	2.9	17.3	10.4	4.0	48.5	12.9	4.6	98
Aprile	17.8	8.8	152.8	16.9	9.7	123.3	14.2	9.0	145.9	16.9	10.1	305
Maggio	20.7	7.7	91.9	19.0	8.8	91.6	15.1	9.1	107.4	18.9	10.0	14[illegible]
Giugno	24.0	12.9	154.5	24.5	13.7	61.2	20.0	13.6	96.9	23.1	14.8	26[illegible]
Luglio	29.4	17.7	32.6	30.4	17.2	26.9	?	?	?	28.5	18.6	9[illegible]
Agosto	27.3	16.8	39.9	25.5	16.6	81.5	23.1	16.6	78.9	25.6	17.8	25[illegible]
Settembre	22.9	13.7	107.7	19.6	13.3	43.9	?	?	?	21.4	14.3	25[illegible]
Ottobre	?	?	114.0	13.2	7.2	73.9	13.0	10.0	188.4	14.7	8.3	35[illegible]
Novembre	9.1	1.7	53.8	5.7	1.4	47.4	9.9	1.0	70.4	7.1	2.0	13[illegible]
Dicembre	8.3	— 0.5	23.3	3.9	— 1.2	5.3	5.7	0.7	23.2	6.0	0.1	4[illegible]
Anno			1010.4	14.7	7.1	769.2				15.5	8.3	249[illegible]

eteorologiche dell'anno 1902

ro osservazioni all'Osservatorio Astronomico di Torino.

izza Monferrato Osservatorio di S. delle Grazie			Perrero Oss.: Santa Giuseppe			Fenestrelle Osservatore: Baroni Virgilio				Castelnuovo d'Asti Osserv.: Istituto Paterno		
massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.	Altezza della neve	Media delle massime giornaliere	Media delle minime giornaliere	Precipitazioni in mm.
.4	—4°.1	18.5	5°.8	—2°.6	83.6	10°.3	—3°.9	—	69	6°.1	—0°.4	3.0
.2	— 1.1	102.9	4.5	—3.3	147.3	9.1	—6.3	—	262	5.7	—0.7	270.5
.6	2.4	—	9.7	0.8	32.7	9.0	—2.7	—	15	15.2	4.2	22.5
.9	8.9	36.2	13.5	6.5	11.2	11.5	0.9	55.0	8	17.5	9.7	171.9
.0	7.7	17.0	15.9	8.7	149.6	11.2	1.3	15.0	35	20.0	9.5	147.5
.9	13.1	—	19.7	11.0	75.5	16.6	6.2	33.0		24.5	14.1	112.7
.4	16.8	14.8	24.8	15.1	33.5	25.3	13.0	—		31.2	18.3	—
.4	12.4	9.1	22.2	14.0	74.4	21.0	11.4	29.0		25.0	19.3	—
.3	10.5	14.2	18.1	11.2	180.9	17.3	7.6	156.0		21.4	15.1	3.2
.4	7.1	37.0	12.2	3.7	78.2	12.2	3.7	97.0		14.6	8.8	23.8
.1	— 0.8	12.0	6.8	—1.1	58.8	5.5	—1.4	22.0		5.6	3.6	70.5
.2	— 1.9	—	6.3	—1.6	29.0	4.2	—2.9	—	92	5.9	2.1	3.7
.8	5.9	261.7	13.3	5.6	1054.7	12.8	2.2	407.0	481	16.1	8.6	829.3

Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri.

Nota dell'Ing. CARLO JORIO.

(Con una tavola).

Il problema di raccordare due rette con una curva circolare a due centri può ricevere varie applicazioni, sia nella costruzione di grandi volte (*), sia, e più specialmente, nel tracciamento delle strade ferrate, strade ordinarie, canali, ecc., quando i punti di contatto non possono essere, per condizioni speciali, equidistanti dal punto di incontro delle due rette a raccordarsi. Questo problema venne trattato da molti autori (**), fra i quali merita special menzione il Prof. Hammer di Stuttgart (***), il quale volle applicare alle svolte stradali alcune belle proposizioni già enunciate dall'Ing. D'Ocagne (****). Egli è venuto alle notevoli conclusioni:

1° La linea dei centri dei due archi circolari di raccordo è sempre tangente ad un cerchio di raggio noto.

2° L'inviluppo delle tangenti ai due archi nel punto comune è pure un cerchio noto.

3° Il luogo dei punti di raccordo dei due archi circolari è ancora un cerchio di determinato raggio.

Ultimamente il Bückle (*****) volendo risolvere il problema

(*) Cfr. Résal, *Sur la forme de l'intrados des voûtes en anse de panier*, " Comptes rendus de l'Académie Française „, 1895. — Mannheim, *Sur le tracé de l'anse de panier*, " Nouvelles Annales de Mathématique „, 1897.

(**) Veggasi anche Jordan, *Korbbogen*, " Handbuch der Vermessungskunde „. Stuttgart, 1897. — Launhardt, *Theorie des Tracirens*, Hannover, 1888.

(***) Hammer, *Ueber den aus zwei kreisbögen bestehenden Korbbogen zur Verbindung zweier gegebener Tangentenpunkte*, " Zeitschrift für Vermessungswesen „, 1900. Di questo lavoro si ha una pubblicazione italiana fatta dal Prof. Baggi, " Rivista di Topografia e Catasto „, 1899.

(****) D'Ocagne, *Sur le raccordement par arc de cercle*, " Nouvelles Annales de Mathématique „, 1898.

(*****) Bückle, *Verbindung zweier konzentrischer Kreise durch einen aus zwei Kreisbögen bestehenden Korbbogen*, "Zeitsch. für Vermessungswesen„, 1902.

di aumentare la distanza fra gli assi di due binarii di ferrovia in curva quando si passi dal tratto di campagna a quello nelle stazioni risolve pure implicitamente il problema di raccordare con due archi circolari due cerchi di diverso raggio.

Il principio qui seguìto può venire con vantaggio applicato alla soluzione del problema che ci occupa, anzi ordinandolo e proseguendolo ulteriormente esso dà luogo a delle importanti conclusioni pratiche che assieme a quelle già note e più sopra riportate servono a completare questa interessante trattazione. Come si vedrà più sotto, alla soluzione analitica di questo problema di geometria pratica faccio pure seguire quella grafica, cosa che, per quanto a me consta, finora non fu fatta e che tuttavia, credo, può avere molta importanza specialmente nel campo pratico, a causa della sua semplicità, anzi può venire preferita per la sua speditezza quando specialmente si studi in linea di massima il tracciato della curva di raccordo. In questa trattazione ho evitato il tracciamento di rette tangenti a cerchi, ciò che in pratica dà sempre luogo a delle incertezze tanto più trattandosi di operare su disegni fatti per la maggior parte in piccola scala (*).

I.

(Fig. 1).

1. — Si abbiano i due rettifili MA ed NB da raccordarsi con una svolta circolare a due centri nei punti A e B: si immaginino prolungati i due rettifili fino al loro incontro in V e nei punti A e B innalzate le perpendicolari che si incontrano in O, diciamo ω l'angolo AOB ed R la lunghezza OB (la maggiore fra OA e OB), quantità che occorre conoscere *a priori*.

2. — *Determinazione di* ω. — L'angolo ω (od il suo supplemento in V) in pochi casi si ha direttamente: in generale si ricava misurando gli angoli VAB, VBA quando i punti A e B sono visibili fra loro

$$\omega = \widehat{VAB} + \widehat{VBA}$$

(*) Il presente studio non riguarda il tracciamento delle curve sul terreno, per il quale si adotteranno i metodi noti.

oppure mediante una poligonale che colleghi fra loro i punti A e B

$$\omega = \Sigma\alpha - (n-2)\pi$$

ove siano α gli angoli misurati della poligonale ed n il numero delle stazioni comprese quelle in A e B.

3. *Determinazione di* R. — Anche per ciò che riguarda la quantità OB essa difficilmente si può avere direttamente: in generale sono note le quantità $VA = t_1$, $VB = t_2$ (indicando con t_1 la lunghezza maggiore fra le VA e VB).

A partire da O nella direzione OA prendasi $OA' = OB$ e si tiri la $A'B$ che incontra in T la AV. Essendo per costruzione il triangolo $OA'B$ isoscele su $A'B$ sarà pure tale il triangolo VTB sopra TB, per cui, quando non si abbia il punto O, basterà prendere $AT = t_1 - t_2$, la retta che unisce B con T passerà per A'. Nel triangolo ABA' si ponga:

$$A'\widehat{B}A = v$$

$$AA' = R - \overline{AO} = d$$

dal triangolo ATA' si ha:

$$d = (t_1 - t_2)\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}. \tag{1}$$

Dal triangolo BAV si ricava:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} + v\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - v\right)}$$

da cui dividendo e componendo:

$$\operatorname{tang} v = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{d}{t_1 + t_2} \tag{2}$$

analogamente dal triangolo ABO si ricava:

$$\operatorname{tang} v = \frac{d}{2R - d}\operatorname{cotang}\frac{\omega}{2}. \tag{3}$$

Paragonando la (2) con la (3) e tenendo conto della (1) si ricava successivamente:

$$\operatorname{tang} v = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{d}{2R - d} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

$$2R - d = (t_1 + t_2) \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

$$R = \frac{t_1 + t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} + \frac{d}{2} \tag{4}$$

$$= \frac{t_1 + t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \tag{4'}$$

$$= \frac{t_1}{\operatorname{sen}\omega} + t_2 \operatorname{cotg}\omega \tag{4''}$$

si può per tal modo avere il valore numerico di R: la formola 4'') ci permette di aver facilmente la rappresentazione grafica di R nel modo seguente: si traccino (fig. 2) le direzioni Ox, Oy formanti fra loro l'angolo ω noto, si innalzino in O le OH, OK rispettivamente perpendicolari alle Ox ed Oy e si prenda $OH = t_1$, $OK = t_2$, le rette condotte dai punti H e K parallelamente alla Ox intercettano sulla direzione Oy il segmento $H'K' = R$: infatti dalla figura si ricava:

$$H'K' = H'O - K'O = \frac{t_1}{\operatorname{sen}\omega} - t_2 \operatorname{cotg}\omega \text{ (*)}.$$

È evidente che si avrà $H'K'$ con la stessa approssimazione con cui saranno riportati i segmenti t_1 e t_2. Questa soluzione grafica torna utile, quando non si voglia tracciare sulla planimetria il punto O.

4. *Determinazione dei raggi dei due cerchi.* — Riferendoci alla figura 1 supponiamo che la retta CO_1O_2 rappresenti una soluzione del problema, pongasi:

$$R_1 = AO_1 = CO_1 \qquad \alpha_1 = AO_1C$$
$$R_2 = BO_2 = CO_2 \qquad \alpha_2 = CO_2B$$

le quantità R_1, R_2, α_1, α_2 rappresentano le incognite del problema: fra le due ultime esiste però la relazione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \omega. \tag{5}$$

Assumiamo come nuove incognite le variazioni x ed y, da portare alla quantità nota R per ottenere i valori R_1, R_2, poniamo cioè:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R + x \\ R_2 &= R - y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) La formula (4'') è generale: nel nostro caso, essendo $\omega > \frac{\pi}{2}$ il secondo termine del secondo membro ha segno negativo.

Considerando il triangolo OO_1O_2 si ricava facilmente:

$$\left.\begin{aligned} OO_2 &= y \\ OO_1 &= x + d \\ O_1O_2 &= x + y \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sul lato O_2O_1 si prenda il segmento $O_2P = O_2O = y$, sarà $PO_1 = x$, e quindi dal triangolo OPO_1 si ha:

$$\frac{OO_1}{PO_1} = \frac{x+d}{x} = \frac{\operatorname{sen} OPO_1}{\operatorname{sen} POO_1}$$

$$\frac{x+d}{x} = \frac{\cos\dfrac{\omega - \alpha_1}{2}}{\cos\dfrac{\omega + \alpha_1}{2}}$$

da cui:

$$x = \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} - \frac{d}{2} \tag{8}$$

con procedimento analogo considerando il triangolo OPO_2, ove sia $O_1P' = O_1O$, si ha:

$$y = \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2} + \frac{d}{2}. \tag{8'}$$

Queste relazioni abbastanza semplici assieme alle (6) rappresentano la soluzione generale del problema. Si ha infatti:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R + \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} - \frac{d}{2} \\ R_2 &= R - \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2} - \frac{d}{2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

facciamo osservare che se nelle precedenti formole si introducono per R e d i valori dati dalla (1) e dalla (4') si ottengono le relazioni:

$$R_1 = \frac{t_1 + t_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2}$$

$$R_2 = \frac{t_1 + t_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2}$$

che sono quelle riportate dal Prof. Hammer (*).

(*) Vedi Hammer, l. c., pag. 238. — Baggi, l. c., pag. 89.

Noti numericamente R_1, R_2 si porteranno rispettivamente sulle normali in A e B alle MA ed NB, si avranno così i punti O_1, O_2 centri dei due archi e si potrà tracciare la svolta. In pratica però è difficile che si assuma come variabile indipendente uno dei due angoli α_1, α_2: generalmente si fissa uno dei raggi: in questo caso si otterrà il valore degli angoli mediante le relazioni seguenti che si ricavano dalle (9):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} &= \frac{2(R_1-R)+d}{d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}} = \frac{2(R_1-R)}{t_1-t_2} + \operatorname{tang}\frac{\omega}{2} \\ \operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2} &= \frac{2(R-R_2)-d}{d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}} = \frac{2(R-R_2)}{t_1-t_2} - \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

5. — Anzichè trovare i valori numerici di R_1 e R_2 e riportarli sul disegno può tornare alcune volte comodo di costruire direttamente il triangolo OO_1O_2: tenendo conto delle (7), (8), (8′) si possono avere facilmente le lunghezze dei lati, si ha infatti:

$$\left.\begin{aligned} OO_2 &= \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2} + \frac{d}{2} \\ OO_1 &= \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} + \frac{d}{2} \\ O_1O_2 &= \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\left[\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (10')$$

La considerazione del triangolo OO_1O_2 torna più utile, quando si voglia graficamente risolvere la questione con via più spedita, come succede per i progetti di massima. Si consideri il triangolo $AA'T$ (*): in questo si ha per costruzione $AA' = d$ e $A'\widehat{T}A = \frac{\omega}{2}$. Sarà quindi:

$$AT = d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$$

e quindi, essendo S il punto medio di AT:

$$AS = \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$$

(*) Per questa determinazione il triangolo $AA'T$ può essere disegnato a parte ed in scala maggiore.

si segnino a partire da A le rette AE, AF che facciano colla AO prolungata rispettivamente gli angoli $\frac{\alpha_1}{2}$, $\frac{\alpha_2}{2}$ (*), queste rette incontrano la normale in S alla AT in E, F che si proiettano normalmente in E', F' sulla AA': sia D il punto di mezzo della AA' e si prenda $AD' = AD$, $F'D'' = E'D$; si avrà:

$$E'D = x$$

$$F'D' = OO_2 = y$$

$$D''D' = O_1O_2 = x + y$$

$$E'D' = OO_1 = x + d.$$

Ciò risulta evidente osservando che per costruzione è:

$$SE = AE' = \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}$$

$$SF = AF' = \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

Sarà quindi facile costruire il triangolo OO_1O_2 ed avere la direzione O_1O_2 su cui deve trovarsi il punto C di raccordo dei due archi: prendendo $O_2C = O_2B$ si avrà senz'altro il punto C.

6. — Tutte le costruzioni finora viste sono applicabili ogni qualvolta si voglia o si possa operare sul foglio della planimetria, poichè occorre tracciare sopra di esso linee rette ed avere la posizione esatta del punto O. Quando l'angolo ω è piccolo, il punto O si porta lontano dai punti A e B e quindi riescono meno esatte le determinazioni grafiche sopra viste. In questo caso, poichè il punto C cade relativamente vicino alla AB torna più comodo ottenere detto punto mediante le coordinate riferite

---

(*) L'angolo $\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\omega}{2} - \frac{\alpha_1}{2}$ si può tracciare facilmente quando si sia segnato l'angolo $\frac{\alpha_1}{2}$. Si abbassi infatti da A la AQ normale alla $A'T$, sarà $\widehat{A'AQ} = \frac{\omega}{2}$. Si segni un arco di raggio arbitrario, per es. d, e si prenda $\widehat{A'\text{-}II} = \widehat{I\text{-}III}$. La retta $II\text{-}A$ farà colla AA' l'angolo $\frac{\alpha_2}{2}$.

per es. alla AB come asse delle x ed alla normale in A come asse dell'y. Si immaginino tirate le rette AC e CB, si ha:

$$AC = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}$$

$$BC = 2R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}.$$

Dalla figura si ricava:

$$Ac_1 = X_c = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right]$$

$$Cc_1 = Y_c = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right]$$

assumendo invece il punto B come origine degli assi si ha:

$$Bc_1 = X_c' = 2R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2} \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right]$$

$$Cc_1 = Y_c' = 2R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right]$$

da queste relazioni si ha:

$$\frac{X_c}{X_c'} = \frac{2R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}}{2R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right]}{\cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right]}.$$

Siccome però deve essere:

$$Y_c = Y_c'$$

sarà:

$$R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right] = R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right].$$

Da cui:

$$\frac{R_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}}{R_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right]}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \frac{\alpha_2}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \frac{\alpha_1}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}} \qquad (11)$$

che dà il rapporto dei raggi:

$$\frac{X_c}{X_c'} = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2}+v\right)-\frac{\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\left(\frac{\omega}{2}-v\right)-\frac{\alpha_1}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\omega}{2}-v\right)-\frac{\alpha_1}{2}\right]\cos\left[\left(\frac{\omega_2}{2}+v\right)-\frac{\alpha_2}{2}\right]}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\left[\left(\frac{\omega}{2}+v\right)-\frac{\alpha_2}{2}\right]}{\operatorname{tang}\left[\left(\frac{\omega}{2}-v\right)-\frac{\alpha_1}{2}\right]} \qquad (12)$$

che dà il rapporto dei segmenti in cui la AB è divisa dal punto C.

Componendo si ottiene:

$$\frac{X_c}{X_c+X'_c} = \frac{X_c}{AB} = \frac{\operatorname{sen}\left[2v+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]+\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}.$$

E poichè:

$$AB = (t_1 - t_2)\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen} v}$$

si ottiene (*):

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{t_1-t_2}{\operatorname{sen} v}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\cos\left[\frac{\omega}{2}-\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\right] \\ Y_c &= \frac{t_1-t_2}{\operatorname{sen} v}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\operatorname{sen}\left[\frac{\omega}{2}-\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

La determinazione del punto C mediante le coordinate qui scelte è più esatta, nel caso che consideriamo, di quella ottenuta assumendo il punto A come origine e la AV come asse della x, poichè queste ultime riescono di dimensioni maggiori delle prime e quindi il punto C determinato meno esattamente.

Nota la posizione del punto C, le curve di raccordo saranno gli archi che insistono rispettivamente sulle corde AC e CB e quindi sul disegno si possono, volendo, tracciare per punti questi archi riferiti alle corde (**) senza tracciare le rette AO, BO e senza conoscere la posizione del punto O.

(*) Si possono ottenere le quantità X_c ed Y_c con metodo più breve ricavando l'espressione del lato AC dal triangolo ABC. Il metodo seguìto ha il vantaggio di fornire le relazioni (11) e (12).

(**) Ricordo le relazioni che dànno la saetta s e le ordinate y di altri punti dell'arco rispetto alla corda come asse ed al suo punto medio come

7. — Se si immaginano tracciate le bisettrici degli angoli α_1 e α_2, queste si incontreranno in un punto I giacente pure sulla bisettrice dell'angolo in V. Il punto I dista egualmente dai tre punti A, B, C, cioè il punto C giace sopra la circonferenza che ha per centro il punto I e per raggio ρ, distanza comune dei tre punti A, B, C da I.

Le coordinate del punto I rispetto al punto A come origine ed alla AO come asse delle x sono rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{t_1+t_2}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \\ Y_i &= \frac{t_1-t_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

da cui:

$$\rho = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \frac{t_1-t_2}{2\operatorname{sen} v} = \frac{AB}{1-\cos\omega}. \tag{15}$$

Essendo X, Y indipendenti dall'angolo α_1 si deduce che la posizione del punto I non dipende da quella del punto C cioè *il cerchio di centro* I *e raggio* ρ (che indicheremo d'ora innanzi col simbolo (I, ρ)) *è il luogo geometrico dei punti* C (*).

Il punto I si può ottenere sul disegno mediante le sue coordinate X, Y o più facilmente conducendo dal punto S medio di AI la parallela alla AO fino ad incontrare la bisettrice dell'angolo V od ancora dividendo per metà il segmento mn intercetto su detta bisettrice dalle direzioni AO, BO.

La considerazione del cerchio (I, ρ) può avere qualche importanza, p. e. quando si voglia che il punto C cada in un punto

---

origine, in funzione della semicorda c, del raggio R e di una ascissa arbitraria x:

$$s = \frac{c^2}{2R} + \frac{c^4}{8R^3}$$

$$y = \frac{c^2-x^2}{2R} + \frac{c^4-x^4}{8R^3}.$$

Facendo x sottomultiplo di c la seconda si semplifica nei singoli casi: le formule riportate non sono rigorose, però in pratica quando sia c relativamente piccolo rispetto ad R si può anche trascurare il secondo termine dei secondi membri, tanto più trattandosi di riportare graficamente tale quantità sul disegno ed in piccola scala.

(*) Vedi Hammer e D'Ocagne, l. c.

assegnato compatibilmente colle condizioni geometriche del problema, il che può succedere quando il terreno su cui si ha da tracciare la curva sia tale da richiedere la svolta con curvatura maggiore o minore. Scelto in questo caso sul cerchio (I, ρ) il punto C si tireranno le rette AC, CB: le perpendicolari nei loro punti di mezzo daranno i punti O_1 ed O_2 e passeranno per I, oppure graficamente si ricaverà una delle coordinate X_c, Y_c e quindi mediante le relazioni (13) si ricaverà il valore di α_1.

8. — Per avere graficamente la retta dei centri, quando si sia fissato un determinato valore ad uno dei raggi si può procedere nel seguente modo: Sia fissato p. e. R_2, si riporti questa quantità nella scala del disegno sulla BO a partire da B, si avrà il punto O_2, si tiri la retta IO_2 e su di questa come diametro si descriva un semicerchio: con centro in I e raggio $\frac{t_1 - t_2}{2} = AS$, si segni un altro semicerchio, questo taglierà il primo nel punto Ω che starà sulla retta dei centri, la quale sarà tangente in Ω al cerchio descritto con centro in I: la $O_2\Omega$ prolungata darà sulla AO il punto O_1: la dimostrazione di questa costruzione si fonda sulla prima conclusione del prof. Hammer e riportata in principio di questo lavoro.

9. — Si segni la retta ZZ' normale alla CO_1O_2 e quindi tangente ai due archi di raccordo nel punto C. Essendo le rette OO_1, OO_2, O_1O_2 rispettivamente perpendicolari alle VZ, VZ' e ZZ' i due triangoli OO_1O_2 e VZZ' sono simili, per cui:

$$ZZ' = R_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} + R_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2}}.$$

$$VZ = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\omega} ZZ' = \frac{t_1 + t_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}}$$

$$VZ' = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\omega} ZZ' = \frac{t_1 + t_2}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_2}{2}}$$

$$\frac{VZ}{VZ'} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1}$$

Si ha poi:

$$AZ = R_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{t_1 - t_2}{2} \left[\operatorname{cotg} v \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} + 1 \right]$$

$$AZ' = R_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{t_1 - t_2}{2} \left[\operatorname{cotg} v \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} - 1 \right]$$

$$\frac{CZ}{CZ'} = \frac{R_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2}}{R_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{tang} v}{\operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} - \operatorname{tang} v} \tag{16}$$

che dà il rapporto dei segmenti secondo cui la tangente è divisa dal punto C.

II.

(Fig. 3).

10. — Le quantità R_1, R_2 date dalle relazioni (9) possono assumere valori massimi e minimi per determinati valori di α_1. Poichè in ogni caso è $R_1 > R_2$ si avranno i valori massimi quando sia:

$$R_1 = \infty.$$

Affinchè sia verificata questa condizione deve essere:

$$\alpha_1 = 0.$$

In questo caso il punto O va all'infinito e dicendo R'_2 il valore che assume R_2 per $\alpha_1 = 0$ si ha:

$$\alpha_2 = \omega$$

$$R_2' = R - \frac{d}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} - \frac{d}{2} = R - \frac{d}{2} \left[\operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} + 1 \right].$$

E per la (4''):

$$R_2' = t_2 \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \tag{17}$$

che ne rappresenta il valore *massimo*.

Si ricava pure:

$$Om = R - R_2' = \frac{t_1 - t_2}{\operatorname{sen} \omega}$$

cioè la parallela condotta dal punto T alla AO incontra la BO nel punto m per cui è appunto verificato:

$$Om = \frac{t_1 - t_2}{\operatorname{sen} \omega}$$

si conclude quindi che *il primo arco si riduce al segmento rettilineo* AT *ed il secondo è un arco di cerchio tangente in* T *ed in* B *alle direzioni* MA *ed* NB *avente il centro in* m *e per raggio* R'. Poichè i punti T e B sono equidistanti da m ne segue che il punto m si può ancora ottenere come intersezione colla BO della normale alla TB nel punto c di mezzo che passerà pure per V.

11. — L'altro caso limite si ha quando R_2 abbia il suo minimo valore cioè:

$$R_2 = 0.$$

Dalla seconda espressione delle (9) si ricava:

$$\frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} = R - \frac{d}{2}$$

$$t_1 + t_2 = d \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}$$

e tenendo conto della (1) e della (2) si trova:

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} = \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} v = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$$

cioè:

$$\alpha_2 = 2v$$

$$\alpha_1 = \omega - 2v.$$

In questo caso sarà:

$$\widehat{ABm'} = ABO + 2v = BAm'.$$

Il triangolo ABm' è isoscele sopra AB: essendo $R_2 = O$ il punto O_2 cade in B: si deduce che *il primo arco appartiene al cerchio di centro* m' *tangente in* A *alla* MA *e passante per* B: *il secondo arco si riduce ad un punto coincidente con* B. Si otterrà molto facilmente il punto m' come intersezione colla AO della normale alla AB nel punto d di mezzo che passerà pure per I (si osservi l'analogia dei due casi limiti).

Dal triangolo OBm' si ricava:

$$R_1' = R \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(\omega - 2v)} = \frac{t_1 + t_2 \cos\omega}{\operatorname{sen}(\omega - 2v)} \tag{18}$$

che ne rappresenta il valore *minimo*.

III.

(Fig. 4).

12. — Quando trattasi di strade o di canali è conveniente molte volte che R_1 riesca per quanto possibile poco diverso da R_2, affinchè i due archi che si susseguono non presentino un cambiamento di raggio troppo sentito e ciò sia per agevolare sulle strade il transito dei veicoli, sia per diminuire nei canali in curva il rigurgito prodotto dall'urto della massa liquida contro le pareti delle sponde. Sarà quindi necessario che si verifichi:

$$R_1 - R_2 = minimum$$

dalle relazioni (9) si ricava:

$$R_1 - R_2 = \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \left[\operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} \right].$$

Affinchè questa funzione sia minima dovrà essere (ricordando $\alpha_2 = \omega - \alpha_1$) (vedi nota a pag. 22):

$$\frac{\partial(R_1 - R_2)}{\partial \alpha_1} = 0,$$

cioè:

$$-\frac{d}{4} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\omega - \alpha_1}{2}} \right] = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\omega}{2}. \tag{19}$$

13. — In questa ipotesi si ottiene:

$$x = \frac{d}{2} \left[\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{4} - 1 \right] = \frac{d}{4} \left[\operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{4} - 3 \right] \tag{20}$$

$$y = \frac{d}{2} \left[\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cot \frac{\omega}{4} + 1 \right] = \frac{d}{4} \left[\cot^2 \frac{\omega}{4} + 1 \right] = \frac{d}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{4}}. \tag{21}$$

Le (9) diventano:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R + \frac{d}{4}\left[\operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{4} - 3\right] \\ R_2 &= R - \frac{d}{4}\left[\operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{4} + 1\right] \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Il valore minimo che può assumere la differenza dei due raggi sarà data dall'espressione:

$$R_1 - R_2 = (t_1 - t_2)\operatorname{cotg}\frac{\omega}{4}. \qquad (23)$$

Il procedimento per ottenere graficamente gli elementi del triangolo OO_1O_2 riesce in questo caso alquanto semplificato. Conducendo la AE bisettrice dell'angolo $A'AQ = \frac{\omega}{2}$ che incontra a normale SE alla AT nel suo punto di mezzo S si ha:

$$AE' = \frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{4}.$$

E, ove sia D il punto di mezzo della AA' ed $AD' = AD$ sarà:

$$ED' = OO_1 = OO_2$$

coi quali elementi si potrà avere i centri e quindi i raggi dei due archi di raccordo. Prendendo $D''E' = E'D$ il segmento $D'D''$ rappresenterà il minimo della differenza dei raggi.

14. — Poichè il punto I è intersezione delle bisettrici degli angoli in O_1 ed O_2 (vedi n° 7) la retta O_1O_2 sarà *normale alla* OI, *parallela alla bisettrice* VI *e ne disterà della quantità* $\frac{t_1 - t_2}{2}$. Di qui una seconda costruzione molto facile della retta O_1O_2. Si segni il punto C medio della TB, si prenda verso B il segmento $cc' = \frac{t_1 - t_2}{2} = AS$ e si innalzi in c' la perpendicolare alla TB, essa incontrerà le BO ed AO nei punti O_1 ed O_2.

15. — Qualora per non sciupare il disegno col tracciare le rette AO, BO ed O_1O_2 si volesse avere il punto C direttamente, si può procedere nel seguente modo. Si osservi che i

triangoli ART ed RCB sono isosceli rispettivamente sulle basi AR e BR, anzi sono simili, avendo gli angoli in A, R, B eguali ad $\frac{\omega}{4}$. Sarà perciò $TR = TA = t_1 - t_2$, $RC = CB$, e poichè per costruzione è:

$$c'B = t_2 \cos \frac{\omega}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2}$$

sarà:

$$Cc' = \left[t_2 \cos \frac{\omega}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2} \right] \operatorname{tang} \frac{\omega}{4} \tag{24}$$

preso sulla TB il segmento $cc' = \frac{t_1 - t_2}{2}$ si porti sulla normale alla TB in d la quantità Cc' data dalla (24), si otterrà il punto C, quindi le due curve di raccordo saranno gli archi che insistono sulle corde AC e CB, di cui si potrà avere altri punti mediante ascisse ed ordinate riferite alle rispettive corde.

16. — Volendo invece avere le coordinate del punto C riferite al punto A come origine ed alla AB come asse dell'X si potrà seguire il metodo tenuto al n° 6 per il caso generale, si arriva alle seguenti relazioni finali:

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v} \left[\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} + \operatorname{sen} 2v \right] = \frac{AB}{2} + (t_1 - t_2) \cos v \\ Y_c &= \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v} \left[\cos 2v - \cos \frac{\omega}{2} \right] = \frac{t_1 - t_2}{2} \cdot \frac{\cos 2v}{\operatorname{sen} v} - \frac{AB}{2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

17. — Graficamente si potrà avere il punto C anche nel seguente modo: si prenda $TR = TA$: la bisettrice dell'angolo VBT e la AR prolungata si incontreranno nel punto C voluto. La dimostrazione di questa costruzione appare evidente da quanto fu più sopra detto.

IV.

(Fig. 5).

18. — Talvolta si presenta la convenienza che R_2 assuma il valore massimo rispetto ad R_1 compatibilmente con le condizioni geometriche del problema, cioè sia minimo il rapporto $\frac{R_1}{R_2}$. Questo caso si verifica, quando, per esempio, si avesse a costruire una grande arcata a due centri, per la quale i piedritti

siano verticali ed il piano stradale faccia in certo modo angolo coll'orizzonte. Il problema si riduce quindi a trovare il valore di α_1 che renda minimo il rapporto $\frac{R_1}{R_2}$.

Dalle formole (8) si ricava:

$$H = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R + \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} - \frac{d}{2}}{R + \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} - \frac{d}{2}}.$$

Ponendo:

$$h = R - \frac{d}{2}$$

$$k = \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

si ha:

$$H = \frac{h + k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}}{h - k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}}.$$

Derivando si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = - \frac{k}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2} \left[h - k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} \right]}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = - \frac{h + k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}}{\left[h - k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} \right]^2} \cdot \frac{k}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_2}{2}}.$$

Poichè H deve essere minimo sarà:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2},$$

cioè:

$$\frac{h + k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_2}{2}} = \frac{h - k \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2}}. \tag{26}$$

Di qui si ricava:

$$\frac{k}{h} = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2}$$

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tang} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Sostituendo ad h, k le loro espressioni in funzione di R ed ω si trova:

$$\frac{d \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}}{2R - d} = \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right) = \operatorname{tang} v$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\omega}{2} - v \\ \alpha_2 &= \frac{\omega}{2} + v \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

che rappresentano i valori cercati.

Poichè

$$B\widehat{AO} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\omega}{2} - v\right)$$

si deduce che la O_1O_2 è perpendicolare alla AB ed il suo piede d' per le ragioni dette nel paragrafo precedente disterà dal punto d, medio di AB, della quantità $\frac{t_1 - t_2}{2}$, per cui graficamente riescirà facile segnare in questo caso la retta dei centri e quindi risolvere direttamente il problema. Si ha pure:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R + \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{4} - \frac{v}{2}\right) - \frac{d}{2} \\ R_2 &= R - \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{4} + \frac{v}{4}\right) - \frac{d}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

18. — Graficamente si potrà costruire il triangolo OO_1O_2 secondo quanto venne detto al n° 5. Si osservi però che in questo caso la retta AH normale alla AB farà colla AQ perpendicolare alla AT l'angolo v e quindi la retta AE sarà la bisettrice dell'angolo $A'AH$ e la AF bisettrice dell'angolo $A'AH'$ ove sia $QH' = QH$.

19. — La posizione del punto C gode pure in questo caso di un'altra proprietà: *esso sta sulla bisettrice dell'angolo V.* Infatti essendo le rette AC e CB rispettivamente bisettrici degli angoli VAB, VBA esse si incontreranno sulla terza bisettrice. La dimostrazione analitica di tale proprietà può farsi nel seguente modo (*):

(*) Un'altra dimostrazione di tale proprietà venne data dall'Ing. Daviso, *Le svolte stradali* (" Rivista di Topografia e Catasto ", 1902).

Si abbassino le perpendicolari CC_1, CC_2 dal punto C sulle VA e VB, si ha:

$$CC_1 = 2R_1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{v}{2}\right)$$

$$CC_2 = 2R_2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} + \frac{v}{2}\right).$$

Per cui:

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{v}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} + \frac{v}{2}\right)}.$$

Ma dalla (26) si ha:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} + \frac{v}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{4} - \frac{v}{2}\right)} = \frac{t_1 \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{4} + v\right)}{t_2 \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{4} - v\right)}, \tag{29}$$

quindi:

$$CC_1 = CC_2.$$

Si potrà ottenere graficamente il punto C dividendo per metà la retta AB nel punto d, prendere $dd' = \frac{t_1 - t_2}{2} = AS$ ed innalzare in d' la perpendicolare alla AB fino all'incontro della bisettrice dell'angolo in V. Analiticamente facendo $\alpha_1 = \frac{\omega}{2} - v$ nelle formole (11) e (12), si hanno i seguenti valori per le coordinate di C in questo caso:

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{t_1 - t_2}{2\operatorname{sen} v}\left[\operatorname{sen} v + \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right] = \frac{t_1 - t_2}{2} + \frac{AB}{2} \\ Y_c &= \frac{t_1 - t_2}{2\operatorname{sen} v}\left[\cos v - \cos\frac{\omega}{2}\right] = \frac{t_1 - t_2}{2\operatorname{tang} v} - \frac{AB}{2\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

La differenza dei raggi è data dalla relazione:

$$R_1 - R_2 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}{\cos v - \cos\frac{\omega}{2}}. \tag{31}$$

V.

(Fig. 6).

20. — Si sa che quando un tratto di ferrovia è in curva si dà alla rotaia esterna una sopraelevazione rispetto alla rotaia interna, affinchè la componente orizzontale del peso faccia equilibrio alla forza centrifuga; detta h questa sopraelevazione si ha:

$$h = k \cdot \frac{1}{R},$$

ove R è il raggio della curva e $k = \frac{sv^2}{g}$ essendo s lo scartamento del binario, v la velocità del treno al 1′ e g la gravità. Quando il raccordamento si fa con due archi si avrà una diversa sopraelevazione nei due tratti in curva e nel punto C di raccordo un passaggio brusco dall' una all' altra sopraelevazione. Nello studio quindi del nostro problema possiamo proporci la questione di trovare i valori che rendono minima questa differenza di sopraelevazione.

Per il primo tratto la sopraelevazione è data da:

$$h_1 = k \cdot \frac{1}{R_1};$$

pel secondo tratto:

$$h_2 = k \cdot \frac{1}{R_2},$$

quindi:

$$h_2 - h_1 = k \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = k \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

Potendosi nel nostro caso considerare k come una costante, dovremo trovare il valore di α_1 che rende minimo $\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$ cioè che soddisfa alla relazione (*):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} = 0.$$

(*) Venne assunta la lettera ∂ come segno differenziale per distinguerla dalla quantità d che entra nei calcoli.

Dalle relazioni (9) si ha:

$$R_1 - R_2 = \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \left[\cot \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{d}{2} \cot \frac{\omega}{2} \left[\operatorname{cogt} \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\cot \frac{\omega}{2} \cot \frac{\alpha_1}{2} + 1}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{4 \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \right)} \cdot \frac{2 d \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2}}. \tag{32}$$

Dalle relazioni (9) si ricava pure:

$$R_1 R_2 = \left[R + \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{1} - \frac{d}{2} \right] \times$$

$$\left[R - \frac{d}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right) - \frac{d}{2} \right].$$

Sviluppando ed ordinando:

$$R_1 R_2 = \frac{1}{4 \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} - \cot \frac{\omega}{2} \right)} \left\{ \begin{array}{l} \left(2R - d \operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} - d \right) \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha_1}{2} + \\ \left[(2R - d)^2 - (4R + d) d \operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} \right] \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} - \\ 2R(2R - d) \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}. \end{array} \right\} \tag{33}$$

Facendo il rapporto tra la (32) e la (33), ponendo:

$$A = 2R - d \operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} - d$$

$$B = \left[(2R - d)^2 - (4R + d) d \operatorname{cotg}^2 \frac{\omega}{2} \right] \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

$$C = 2R(2R - d)$$

$$D = A \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} + B \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} - C \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

si ottiene:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} = \frac{2d}{D},$$

da cui:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}=\frac{2d}{D^2}\left[2A\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}-B\left(\cos^2\frac{\alpha_1}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_1}{2}\right)+2C\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}\right]$$

$$=\frac{2d}{D^2}\left[(A+C)\operatorname{sen}\alpha_1-B\cos\alpha_1\right]. \qquad (34)$$

Questa espressione sarà nulla se:

$$\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{B}{A+C}.$$

Sostituendo ad A, B, C i valori più sopra riportati si ottiene:

$$\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{(2R-d)^2\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}-d(4R-d)\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}}{(2R+d)(2R-d)-d^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}}.$$

Il numeratore del 2° membro può essere scritto sotto questa forma:

$$(2R-d)^2\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}-d^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}-2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2},$$

od ancora:

$$\left[(2R-d)^2-d^2\operatorname{cotg}^2)\frac{\omega}{2}\right]\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}-2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2},$$

ed il denominatore:

$$\left[(2R-d)^2-d^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}\right]+2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

e dividendo entrambi i termini per la quantità [ ] si ha:

$$\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}-\dfrac{2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}}{(2R-d)^2-d^2\cot^2\frac{\omega}{2}}}{1+\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\,\dfrac{2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}}{(2R-d)^2-d^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Ma per la (3):

$$\frac{2R(2R-d)\,d\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}}{(2R-d)^2-d^2\operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2}}=\operatorname{tang}2v.$$

Quindi:

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} - \operatorname{tang}2v}{1 + \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}2v} = \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{2} - 2v\right)$$

e:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\omega}{2} - 2v \\ \alpha_2 &= \frac{\omega}{2} + 2v \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

che sono i valori cercati.

21. — Sarebbe facile esaminando la seconda derivata che, supposto $\omega < \pi$, il valore trovato per α_1 rende minima la funzione $\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$; sostituendo i suddetti valori di α_1 ed α_2 nelle espressioni (9) si ottengono le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{m^2 \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + n^2}{2\left[m \operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2} - n \operatorname{cotg}\frac{\omega}{4}\right]} \\ R_2 &= -\frac{m^2 \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + n^2}{2\left[m \operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2} + n \operatorname{cotg}\frac{\omega}{4}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

da cui:

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{2n \operatorname{cotg}\frac{\omega}{4}}{m^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\omega}{2} + n^2} \tag{37}$$

ove si sia posto per brevità:

$$m = t_1 + t_2$$
$$n = t_1 - t_2.$$

22. — Il triangolo OO_1O_2 può essere costruito col metodo generale spiegato al n° 5. Nella figura sono riportate le costruzioni necessarie: segnate le rette AH ed AH' che fanno colla AQ l'angolo $2v$ si sono tracciate le rette A-V-E, A-IV-F bisettrici degli angoli $A'AH$, $A'AH'$ ed avuti così i punti E, F, E', F' e gli elementi del triangolo OO_1O_2.

23. — Anche in questo caso il punto C gode di una proprietà che serve a determinarlo direttamente. Si ha infatti:

$$\widehat{CAB} = \left(\frac{\omega}{2} - v\right) - \left(\frac{\omega}{4} - v\right) = \frac{\omega}{4}$$

$$\widehat{CBA} = \left(\frac{\omega}{2} + v\right) - \left(\frac{\omega}{4} + v\right) = \frac{\omega}{4},$$

cioè il triangolo ACB è isoscele sopra AB. *Il punto* C *giace sulla normale alla* AB *innalzata nel suo punto medio* d. Si immagini prolungato l'arco $ATCB$ fino ad incontrare in T' la retta $T'B$ che faccia l'angolo $ABT' = v$ (basterà a questo scopo prendere arco AT' = arco AT), si divida per metà il segmento $T'B$ nel punto e, si prenda $ee' = \frac{t_1 - t_2}{2}$. La normale innalzata sulla $T'B$ nel punto e' incontrerà la dC nel punto C voluto. Qualora non si potesse avere il punto T' si osservi che il punto e è piede della perpendicolare abbassata da I sulla BH_1 ove sia $AH_1 = AH$ (AH perpendicolare alla AB).

Il punto e si può anche ottenere ricordando che *il luogo geometrico dei punti medii delle corde di un cerchio passanti per un suo punto è un cerchio avente per diametro il raggio del cerchio passante per quel punto,* quindi il cerchio costruito sulla BI come diametro taglierà la BT nel punto e.

24. — Per completare lo studio di questo caso occorrerà conoscere le coordinate di C rispetto al punto A come origine ed alla AB come asse dell'x, come fu detto precedentemente. Tenendo conto di quanto è più sopra detto si ricava facilmente:

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = \frac{AB}{2} \\ Y_c &= \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v}\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) => = \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v} - \frac{AB}{2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

VI. — Applicazioni.

A) *Metodo numerico.* — Si abbia a raccordare i due rettifili MA ed NB, per cui sia:

$$t_1 = 442{,}94 \qquad t_2 = 278{,}51$$

$$\omega = 102^\circ\, 56'\, 00''.$$

L'ordine dei calcoli è il seguente:

1° Determinazione di d, v, R (formole 1, 2, 4''):

	Logaritmi.			Logaritmi.	
$t_1 - t_2$	2.2159811		t_1	2.6463449	
tang $\frac{\omega}{2}$	0.0988763		senω	0.0111597	
			t_1 : senω	2.6575046	454,469
d	2.3148574	$d = 206,470$	t_2	2.4448408	
$t_1 + t_2$	7.1417938		cotω	9.3610531n	
tang$v$	9.4566512	$v = 15°58'14''$	$t_2$cotgω =	1.8058939n	— 63,958
					$R = 390,511$

2° Determinazione dei valori massimi e minimi di R_1 e R_2 (formole 17 e 18):

	Logaritmi.			Logaritmi.	
t_2	2.4448408		R_2	2.5916333	
cotg $\frac{\omega}{2}$	9.9011237	(mass. R_2)	senω	9.9888403	
			sen($\omega - 2v$)	0.0243502	(min. R_1)
	2.3459645	= 221,802		2.6048238	= 402,554

si assuma $R_2 = 150,00$

3° Determinazione di α_1 e R_1 (formole 10 e 9):

	Logaritmi.			Logaritmi.
$2(R - R_2) - d$	2.4386246		$\frac{d}{2}$ cot $\frac{\omega}{2}$	1.9149511
tang $\frac{\omega}{2}$	0.0988763		cot $\frac{\alpha_1}{2}$	0.4261273
d	7.6851426			
cot $\frac{\alpha_2}{2}$	0.2226435	$\alpha_2 = 61°50'06''$	$\frac{d}{2}$ cot $\frac{\omega}{2}$ cot $\frac{\alpha_1}{2}$	2.3410784
		$\alpha_1 = 41°05'54''$		$R_1 = 506,596$

4° Determinazione dei lati OO_1, OO_2, O_1O_2 (formole 10'):

$$OO_1 = 322,555$$

$$OO_2 = 240,511$$

$$O_1O_2 = 356,596.$$

5° Determinazione di R_1 ed R_2 nel caso di minima differenza $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\omega}{2}$:

	Logaritmi.	
$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}$	1.9149511	$R_1 = 457{,}852$
$\cot\frac{\omega}{4}$	0.3169672	$R_2 = 116{,}700.$
$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}\cot\frac{\omega}{4}$	2.2319183	

6° Determinazione di R_1 ed R_2 nel caso di minimo rapporto $\alpha_1 = \frac{\omega}{2} - v$, $\alpha_2 = \frac{\omega}{2} + v$:

	Logaritmi.		Logaritmi.
$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}$	1.9149511	$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}$	1.9149511
$\cot\frac{\alpha_1}{2}$	0.4951970	$\cot\frac{\alpha_2}{2}$	0.1756226
$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}\cot\frac{\alpha_1}{2}$	2.4101481	$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}\cot\frac{\alpha_2}{2}$	2.0905737
$R_1 = 544{,}403$		$R_2 = 164{,}086.$	

7° Determinazione di R_1 ed R_2 nel caso di minima variazione di curvatura $\alpha_1 = \frac{\omega}{2} - 2v$, $\alpha_2 = \frac{\omega}{2} + 2v$:

$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}$	1.9149511	$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}$	1.9149511
$\cot\frac{\alpha_1}{2}$	0.7643175	$\cot\frac{\alpha_2}{2}$	0.0500788
$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}\cot\frac{\alpha_1}{2}$	2.6792686	$\frac{d}{2}\cot\frac{\omega}{2}\mathrm{cotg}\frac{\alpha_2}{2}$	1.9650299
$R_1 = 765{,}101$		$R_2 = 195{,}012$	

8° Calcolo delle coordinate dei punti C nelle varie ipotesi (A origine, AB asse delle x, formole 13):

a) Caso generale $R_2 = 150{,}00$

$\alpha_1 = 41°05'54''$ $\quad \frac{\alpha_1}{2} + v = 36°31'11''$ $\quad \frac{\omega}{2} - \left(\frac{\alpha_1}{2} + v\right) = 14°56'49''$

	Logaritmi.			Logaritmi.	
$t_1 - t_2$	2.2159811		$t_1 - t_2$	2.2159811	
$\operatorname{sen} v$	0.5604410		$\operatorname{sen} v$	0.5604410	
$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)$	9.7745895		$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)$	9.7745895	
$\cos\left[\frac{\omega}{2}-\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\right]$	9.9850514		$\operatorname{sen}\left[\frac{\omega}{2}-\left(\frac{\alpha_1}{2}+v\right)\right]$	9.4414926	
X	2.5360630	343,608	Y	1.9615026	91,729

In modo analogo si trova:

b) Caso di minima differenza (formola 25):

$X = 391{,}825$ $\qquad$ $Y = 67{,}418.$

c) Caso di minimo rapporto (formola 30):

$X = 315{,}956$ $\qquad$ $Y = 101{,}127.$

d) Caso di minima variazione di curvatura (formola 38):

$X = 233{,}741$ $\qquad$ $Y = 112{,}660.$

Prospetto riassuntivo.

	R_1	R_2	$R_1 - R_2$	$\frac{R_1}{R_2}$	$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$	X	Y
1° Caso	506,596	150,000	356,596	3.38	0,0047	343,608	91,729
2° „	457,852	116,700	**341,152**	3.92	0,0064	391,825	67,418
3° „	544,403	164,086	380,317	**3.31**	0,0043	315,956	101,127
4° „	765,101	195,012	570,089	3.92	**0,0038**	233,741	112,660

B) *Metodo grafico.* — Questo metodo si vede applicato nella fig. 7 che corrisponde (1 : 5000) alla soluzione numerica. Si abbiano sul disegno segnati i due rettifili MA, NB da raccordarsi in A e B con una curva a due centri. Per maggior generalità supporremo che il vertice V cada fuori del foglio. Si innalzino in

A e B alle MA ed NB le perpendicolari che si incontrano in O, si prenda $OA' = OB$ e si tiri la $A'B$ che incontra la MA in T. Volendo risolvere il problema col fissare il valore di R_2 se ne determina il valore massimo. A questo scopo basta innalzare la perpendicolare nel punto C di mezzo della TB, essa dà sulla BO il punto m, $Bm = Tm$ sarà l'espressione grafica del massimo valore di R_2: qualora si volesse fissare R_1 si abbassi dal punto d medio di AB la perpendicolare che incontra la AO in m', $Am' = Bm'$ rappresenterà il minimo valore che può assumere R_1. Si prenda p. e. $R_2 = 150$ m. $= BO_2$: la retta cm prolungata dà il punto n, si divida mn per metà, si avrà il punto I, si descriva l'arco di cerchio di centro I e raggio $AS = \frac{AT}{2}$ ed il semicerchio sulla IO_2 come diametro, i due cerchi si incontreranno in Ω, la retta $O_2\Omega$ è la retta dei centri che prolungata dà il punto O_1, questa retta incontra il cerchio (I, ρ) nel punto C di raccordo.

Volendo la curva per cui sia minima la differenza dei raggi si procede in questo modo: si prenda $cc' = AS$, la normale in c' alla TB incontra il cerchio (I, ρ) in C', se non è segnato detto cerchio, il punto C' starà pure sulla AR prolungata ove sia $TR = TA$, la $C'c'$ prolungata dà i punti O'_1 O'_2.

Volendo la curva per cui è minimo il rapporto dei raggi si prenda $dd' = AS$ (d punto medio di AB), si innalzi la perpendicolare alla AB, essa incontra la perpendicolare alla TB in c nel punto C'', la $C''d'$ prolungata dà i punti $O''_1 O''_2$.

Volendo la curva per cui è minima la differenza di curvatura si innalzi in A la normale alla AB che incontra la $A'B$ in K, si prenda $AK' = AK$ e da I si abbassi la perpendicolare su AK', si avrà il punto e, prendasi $ee' = AS$, la normale in e' alla AK' incontra la normale in d alla AB nel punto C''', la $C'''e'$ prolungata dà i punti $O'''_1 O'''_2$. Volendo avere contemporaneamente i punti c, d, e, si descriva il semicerchio sulla IB come diametro: esso taglierà rispettivamente le rette BK_1, BA, BK nei punti cercati.

Per dimostrare l'importanza di tali costruzioni ne faremo un'altra applicazione ad un caso particolare che può verificarsi sovente nella pratica. Sia $\omega = 0$ cioè le direzioni MA ed NB siano parallele (caso p. e. degli archi rampanti). In queste ipo-

tesi i punti O ed A' vanno all'infinito, il punto T si troverà sulla normale in B alla BN: divisi per metà i segmenti TB ed AT in c ed S, le parallele rispettivamente alle AM e TB per i punti c ed S dànno il punto I che è pure punto di mezzo del segmento AB. Il valor minimo che può assumere R_1 è $m'B$, m' essendo l'incontro della normale in A alla AM colla normale alla AB in I, è segnata in figura la curva di raccordo in questo caso: è il cerchio che ha il centro in m' e passa per A e B. Il valore massimo di R_2 è dato da dB, la curva di raccordo in questo caso è costituita dal segmento rettilineo AT e dal semicerchio THB. In figura sono segnate quattro curve di raccordo seguendo il procedimento più sopra spiegato, la curva ACB corrisponde al caso di avere scelto per R_2 un valore arbitrario BO_2, le curve $AC'B$, $AC''B$, $AC'''B$ sono quelle che hanno rispettivamente minima differenza, minimo rapporto e minima differenza di curvatura.

Maggio 1903.

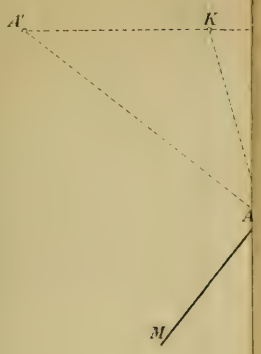


Fig. 5

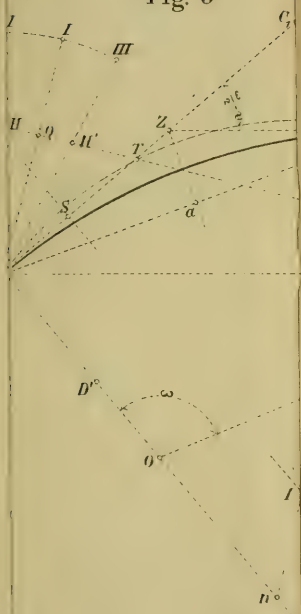


Fig. 1

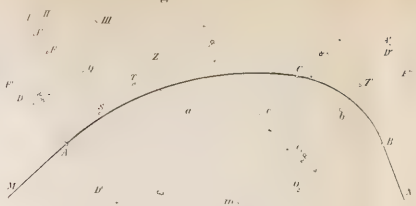


Fig. 4

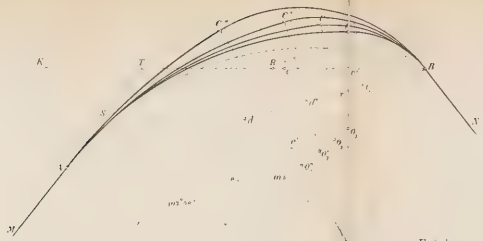


Fig. 7

Fig. 5

Fig. 2

Fig. 6

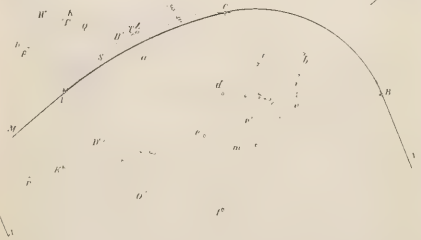


Fig. 3

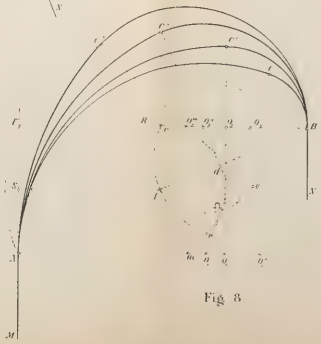


Fig. 8

Lit. Salussolia - Torino

Appunti di mineralogia piemontese.

Nota di GIOVANNI BOERIS.

Zircone e idocrasio di Comba Robert.

Ai minerali del giacimento di Comba Robert presso Avigliana, dei quali già ebbi occasione di dare qualche notizia in due Note comparse negli " Atti „ di questa Accademia (1), recenti osservazioni mi permettono di aggiungere lo zircone e l'idocrasio.

Lo zircone e l'idocrasio, a Comba Robert, sembrano essere rari: in fatti finora, sebbene abbia ripetutamente e minutamente esplorato il giacimento, una sola volta mi riuscì di vedere tanto l'uno che l'altro di questi minerali.

Riferisco allo zircone alcuni pochi e minuti cristalli, torbidi nella loro massa, di colore bruniccio, con lucentezza adamantina, i quali rigano il vetro e non sono punto attaccati dall'acido cloridrico. Mostrano le facce delle forme {110} e {111}, ma sempre poco perfette, e, misurandoli, si ebbero i risultati che qui di seguito vengono messi a confronto coi valori angolari calcolati dal rapporto parametrico di Kupffer (2).

Angoli	Mis.	Calc.
$(111):(1\bar{1}1)$	56° 45′	56 40
$(111):(\bar{1}\bar{1}1)$	84 3	84 20
$(111):(110)$	48 0	47 50.

(1) Vol. XXXII, p. 670 e vol. XXXIV, p. 609.

(2) *Preisschrift über genaue Messungen an Krystallen.* Berlin, 1825, p. 72.

Tali cristalli di zircone erano accompagnati da epidoto e da qualche cristallino di titanite bianca.

Per quello che riguarda l'idocrasio dirò che si tratta di una generazione di piccoli cristalli di color verde, in generale di una certa lunghezza nel senso dell'asse verticale, impiantati quasi tutti con questo asse molto inclinato sulla matrice, e fittamente cresciuti a formare una incrostazione limitata ad un solo tratto della superficie di un piccolo blocco d'idocrasio compatto.

Essendo poi parecchi dei detti cristalli terminati da un buon numero di facce assai brillanti e ordinariamente ben piane, mi parve conveniente sottoporli ad una indagine goniometrica che mi permise di constatare la presenza delle seguenti forme: }001{ }110{ }100{ }210{ }111{ }331{ }101{ }201{ }211{ }311{ }312{.

La base è costante e, nei diversi cristalli, diversamente sviluppata; ma solo per eccezione lo è tanto da predominare di molto sulle altre forme che le si accompagnano a terminarli.

I prismi }110{ e }100{ sono pure costantemente presenti e con facce più o meno striate secondo [001]; }110{ poi è di solito a facce largamente predominanti su quelle di }100{, e solo in casi eccezionali ambedue i prismi hanno le loro facce presso a poco della stessa estensione.

Il prisma ottagono }210{ fu determinabile con sicurezza solo in pochi cristalli a cagione della strettezza grande delle sue facce e per la forte striatura che abitualmente presentano: una sola volta ne osservai una faccia assai grande e pochissimo striata.

La bipiramide di primo ordine }111{ si riscontra su tutti i cristalli e con facce ovunque ben piane e di notevole estensione; estesa poi in special modo è nei cristalli più poveri.

Non molto frequente invece è l'altra delle bipiramidi di primo ordine osservate, cioè }331{, le cui facce variano molto di estensione fino ad essere, almeno alcune, in certi cristalli, assai larghe. Mutabile è pure il loro aspetto anche sullo stesso cristallo, mostrandosi alcune volte nette e lucenti, altre ruvide e opache.

La forma }101{ è abbastanza frequente e si trova sopratutto nei cristalli dove }111{ è più sviluppata che le altre forme contemporaneamente presenti, ma ha facce sempre ristrette che riflettono immagini scadenti.

La }201{ fu osservata sopra un solo cristallo, rappresentato a modello dalla figura 1, sul quale si presentava con un'unica faccetta di poca perfezione.

Forma piuttosto rara è la }211{ le cui facce lasciano sempre molto a desiderare, perchè poco piane, poco splendenti e ristrette.

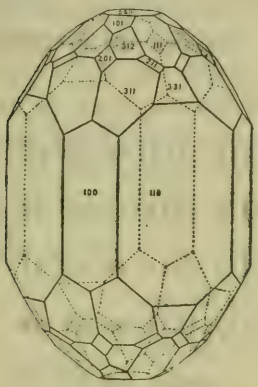


Fig. 1.

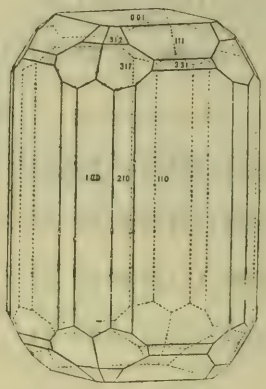


Fig. 2.

Frequentissime invece sono }311{ e }312{, con facce molto nette e lucenti: di queste due forme l'ultima è quella che ha facce d'ordinario meno estese.

Si trovano poi ancora, su diversi dei nostri cristalli, delle facce }hhl{ in cui $l > h$, lucenti ma ridottissime, tolti alcuni casi in cui raggiungono una certa estensione, ma hanno pochissimo splendore. La misura di queste facce sulle adiacenti viene sempre a dare pertanto risultati ben poco attendibili che stimo inutile di riportare.

I cristalli misurati sono in numero di dodici, terminati, come del resto tutti gli altri, ad una sola estremità. Dei quattro migliori riporto integralmente i valori ottenuti per i quattro angoli della base colle quattro facce della }111{, e per i quattro angoli che queste ultime intercettano tra loro, notando che di ogni spigolo fu fatta una sola lettura, e che detti valori si possono ritenere tutti dello stesso peso, perchè la perfezione delle immagini che le facce riflettono è prossimamente uguale.

Cristallo I.

$(001):(111) = 37^\circ\ 14'$	$(111):(1\bar{1}1) = 50^\circ\ 36'$
$(001):(1\bar{1}1) = 37\ \ 10$	$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1) = 50\ \ 38$
$(001):(\bar{1}\bar{1}1) = 37\ \ 10$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11) = 50\ \ 36$
$(001):(\bar{1}11) = 37\ \ 13$	$(\bar{1}11):(111) = 50\ \ 36$
media $= 37^\circ\ 11'\ 45''$	media $= 50^\circ\ 36'\ 30''$

Cristallo II.

$(001):(111) = 37^\circ\ 15'$	$(111):(1\bar{1}1) = 50^\circ\ 41'$
$(001):(1\bar{1}1) = 37\ \ 15$	$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1) = 50\ \ 36$
$(001):(\bar{1}\bar{1}1) = 37\ \ 16$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11) = 50\ \ 41$
$(001):(\bar{1}11) = 37\ \ 14$	$(\bar{1}11):(111) = 50\ \ 38$
media $= 37^\circ\ 15'$	media $= 50^\circ\ 39'$

Cristallo III.

$(001):(111) = 37^\circ\ 12'$	$(111):(1\bar{1}1) = 50^\circ\ 36'$
$(001):(1\bar{1}1) = 37\ \ 12$	$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1) = 50\ \ 39$
$(001):(\bar{1}\bar{1}1) = 37\ \ 13$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11) = 50\ \ 37$
$(001):(\bar{1}11) = 37\ \ 26$	$(\bar{1}11):(111) = 50\ \ 40$
media $= 37^\circ\ 15'\ 45''$	media $= 50^\circ\ 38'$

Cristallo IV.

$(001):(111) = 37^\circ\ 12'$	$(111):(1\bar{1}1) = 50^\circ\ 39'$
$(001):(1\bar{1}1) = 37\ \ 13$	$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1) = 50\ \ 31$
$(001):(\bar{1}\bar{1}1) = 36\ \ 58$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11) = 50\ \ 38$
$(001):(\bar{1}11) = 37\ \ 13$	$(\bar{1}11):(111) = 50\ \ 30$
media $= 37^\circ\ \ 9'$	media $= 50^\circ\ 34'\ 30''$

Se si scorrono i valori angolari riportati di sopra, che sono tutti assai buoni, e, come si disse già, di egual peso, si può osservare che il migliore accordo, per gli spigoli omologhi, lo si ha nel primo cristallo. Nel terzo e nel quarto uno degli spigoli fatti da una faccia di }111{ sulla base, varia notevolmente dagli altri tre, ciò che accenna ad uno spostamento della base stessa, nel caso nostro essendo invece abbastanza vicini i valori degli spigoli culminanti di }111{. Complessivamente poi si rileva che anche nell'idocrasio di Comba Robert si hanno differenze rimarchevoli tra gli angoli omologhi non solo dei diversi cristalli, ma anche di un medesimo cristallo, analogamente a quanto si conosce per l'idocrasio delle varie località note.

Se poi per ognuno dei quattro anzidetti cristalli, dal valore dell'angolo (001):(111) si deduce quello dell'angolo (111):($1\bar{1}1$), si ha che questo è

50°	36′	54″	nel	I°	cristallo
50	40	56	„	II°	„
50	41	53	„	III°	„
50	33	28	„	IV°	„

L'accordo per tanto più soddisfacente tra osservazione e calcolo ci è mostrato dal primo cristallo, in cui la differenza tra il valore trovato e il valore dedotto per lo spigolo (111):($1\bar{1}1$) è di 24′ mentre nel terzo arriva a 3′ 53″.

Nella tabella che segue sono riportati tutti i risultati delle letture fatte sui quattro cristalli di cui si tenne parola. Quelle dei primi otto spigoli, tutte di egual peso, servirono a determinare la costante più probabile del nostro idocrasio, la quale è:

$$a : c = 1 : 0{,}5369349.$$

Le forti divergenze tra i valori angolari, alle quali si accennò più sopra, rendono opportuna così fatta ricerca: calcolando poi in base a tale costante, tra osservazione e teoria si ha un errore medio di 1′ 9″.

Angoli	Limiti delle osservazioni	Osserv. media	Calcolato	N
(001) : (111)	36°58′ — 37°26′	37°12′52″	37°12′39″	16
(111) : ($1\bar{1}1$)	50 31 — 50 41	50 37 0	50 38 1	16
(111) : (311)	29 29 — 29 33	29 31 10	29 30 48	11
(312) : (001)	40 15 — 40 24	40 21 12	40 19 49	15
(312) : (311)	19 8 — 19 22	19 12 23	19 10 26	13
(312) : (111)	16 40 — 16 55	16 48 0	16 49 27	7
(311) : ($3\bar{1}1$)	31 36 — 31 40	31 38 0	31 37 27	5
(312) : ($3\bar{1}1$)	33 33 — 33 38	33 35 45	33 35 33	4
(331) : (111)	29 6 — 29 9	29 7 0	29 5 19	3
(331) : (110)		23 40 0	23 42 1	1
(331) : (311)	24 34 — 24 38	24 35 40	24 32 20	3
(331) : (100)		49 48 0	49 38 56	1
(311) : (001)		59 29 0	59 30 15	1
(001) : (101)		28 11 0	28 13 58	1
(101) : (201)		18 58 0	18 48 26	1
(201) : (100)		42 52 0	42 57 36	1
(311) : (100)		35 1 0	35 10 12	1
(311) : (211)		11 23 0	11 24 58	1
(211) : (111)		18 33 0	18 5 50	1
(111) : (100)	64 30 — 64 37	64 33 30	64 41 0	2
(111) : (101)	25 18 — 25 21	25 19 30	25 19 0	2
(331) : (211)		22 20 0	22 22 26	1
(211) : ($1\bar{1}1$)		49 3 0	48 57 21	1
(312) : ($3\bar{1}2$)	23 36 — 23 38	23 36 40	23 37 9	3
(311) : (131)	45 24 — 45 32	45 27 30	45 19 51	4
(312) : ($\bar{1}\bar{3}2$)		70 44 0	70 44 29	1
(311) : (110)	39 30 — 39 35	39 32 40	39 35 1	3
(311) : ($1\bar{1}0$)		67 21 0	67 20 5	1
(211) : (110)		43 21 0	43 12 4	1
(211) : (312)		11 15 0	11 25 40	1
(111) : ($3\bar{1}1$)		50 25 0	50 25 0	1
(111) : ($3\bar{1}2$)		38 34 0	38 32 27	1
(210) : (100)	26 32 — 26 38	26 35 30	26 33 54	4

Magnetite del monte Pian Real.

Anche nelle serpentine del monte Pian Real, in valle di Susa, si trovano, con una certa frequenza, cristalli di magnetite non di rado abbastanza grossi. Sono ordinariamente dei semplici rombododecaedri, ma non mancano esempi di cristalli con una certa ricchezza di forme; il che non è privo d'interesse, perchè malgrado la diffusione grande della magnetite nelle Alpi, i giacimenti con cristalli ricchi di forme, come è noto, sono nelle Alpi stesse relativamente rari.

Voglio qui pertanto ricordare in modo speciale alcuni cristalli di magnetite che mi occorse di raccogliere al Pian Real, i quali, oltre all'ottaedro sviluppato tanto da dare l'abito alla combinazione, al rombododecaedro con facce poco estese, presentano pure faccettine del cubo, dell'icositetraedro {311} e del triacisottaedro {331}, forma che, almeno finora, è da mettersi tra le rare della magnetite. Ecco i risultati delle misure:

Angoli	Mis.	Calc.
(331) : (111)	21° 57′	22° 0′
(311) : (100)	25 13	25 14
(311) : (111)	29 29	29 30 .

La forma {331}, tempo addietro, e cioè nel 1898, fu pure riscontrata sopra un cristallo di magnetite dei fossi di Acquacetosa presso Roma, e data come nuova, da F. Zambonini (1), perchè non indicata, così egli assevera, nel trattato del Dana. Ma veramente nella sesta edizione di questo trattato, comparsa nel 1892, tra le forme date per la magnetite vi è pure la {331}, che, del resto, già nel 1888, il Brugnatelli (2) per il primo aveva osservato sopra cristalli provenienti da Rothenkopf nella Zillerthal.

---

(1) *Magnetite dei fossi di Acquacetosa e del Tavolato,* " Rivista di min. e crist. „, XXI, 21.

(2) *Ueber flächenreiche Magnetitkrystalle aus den Alpen,* " Zeitschr. für Kryst. und Min. „, XIV, 237.

Titanite di Trana.

A breve distanza dall'abitato di Trana, in valle del Sangone, alle falde del monte Pietraborga, venne attivata da non molto tempo una cava di scisto serpentinoso, il quale è in contatto con una roccia prasinitica.

Nei rottami di detta cava rinvenni diversi massi di uno scisto cloritico, qua e là passante a prasinite cloritica, nei quali sono disseminati numerosissimi cristallini di pirite, e si hanno inoltre venette di epidoto, noduli di apatite addensati in qualche punto dei massi stessi, e molti cristalli di titanite, là dove lo scisto è nettamente cloritico.

I cristalli di quest'ultimo minerale che mi riuscì di mettere insieme, e sono parecchi, sono tutti, uno eccettuato, geminati ad asse normale a }100{; presentano poi tutti quanti la semplice combinazione }111{, }001{.

Per la massima parte sono discretamente grossi, raggiungendo i più i 15 millimetri in larghezza e i 12 in altezza.

Di completamente limpidi non se ne ebbe alcuno: solo pochissimi sono subtrasparenti e abbastanza vivamente colorati in giallo traente al verdognolo, mentre i rimanenti sono torbidi, o affatto opachi e tinti, o nello stesso colore, ma più pallido, o decisamente in verde per la molta clorite interclusa.

Solo per eccezione sono rotti in due o più pezzi, che rimangono tuttavia aderenti insieme, in generale senza che fra essi venga ad interporsi clorite od altro.

Per la paragenesi adunque non presenterebbero questi cristalli nulla di nuovo, e per la povertà loro di forme non sarebbero gran fatto rimarchevoli dal lato cristallografico, ma credo che meritino di essere menzionati per la costante presenza su di essi di interessanti facce di corrosione.

L'angolo tra le facce }111{ dei due individui dalla cui unione i nostri cristalli risultano, simmetriche rispetto al piano }010{, è ognora modificato da due facce quanto mai scabre e spesso anche incurvate. Per la posizione che queste facce hanno rispetto a quelle di }111{, si dovrebbero indicare col simbolo }$h\,l\,k${. Di solito ogni gruppo ne presenta precisamente quante ne richiede la simmetria della classe cristallina della titanite.

Nei gruppi più perfetti poi, dove le facce }111{ dei due individui sono egualmente estese, anche le facce di cui si discorre sono ampie ad un modo. Il loro limite colle facce }111{ in generale ha l'andamento ritratto dalla figura 3; qualche volta per altro è segnato da una curva poco marcata a convessità rivolta verso lo spigolo [111 : 1$\bar{1}\bar{1}$], e qualche altra volta ancora, nel tratto

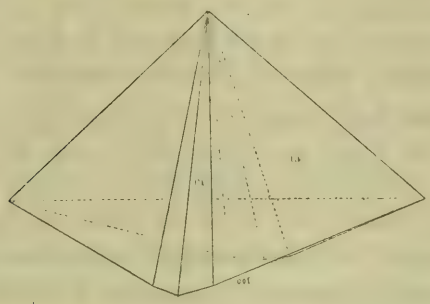


Fig. 3.

più vicino al vertice in cui concorrono le quattro facce }111{ dei due individui, si mantiene parallelo allo spigolo [111 : 1$\bar{1}\bar{1}$], almeno per quanto si può giudicare ad occhio, poi si incurva nel modo detto più sopra. Tali facce si tagliano fra loro con spigoli abbastanza netti: talora però si confondono in una superficie curva. Delle tante osservate una sola diede un riflesso abbastanza sicuramente centrabile, tenendo conto del quale si ebbero questi valori:

$$(hlk) : (111) = 7^\circ\, 49'$$

$$(hlk) : (1\bar{1}\bar{1}) = 36 \quad 6$$

Portandoli in calcolo si arriverebbe al simbolo }18 11 17{, ma di così fatto simbolo, in tal modo ricavato, non ho naturalmente tenuto conto se non per tratteggiare le facce }*h l k*{ sulla figura 3 il più esattamente possibile. Adottando il detto simbolo i valori calcolati per i due spigoli trascritti di sopra sarebbero rispettivamente 7°48′ e 36°4′. Una faccia poi di simbolo (323) farebbe con (111) un angolo di 6°54′.

Dai miei cristalli ottenni pure i seguenti valori:

Angoli	Mis.	Calc.
$(111):(1\bar{1}1)$	43° 48′	43° 49′
$(111):(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	110 6	109 53

È da notarsi ancora che le facce della }111{ sono di sovente molto corrose; quelle poi che non lo sono affatto, o soltanto poco, lasciano vedere delle fine e numerose strie che sono nell'angolo piano degli spigoli $[111:\bar{1}11]$, $[111:1\bar{1}1]$ e paiono sensibilmente inclinate su quest' ultimo, ma di quanto non è mai possibile determinare direttamente, perchè tale spigolo, come si disse, è sempre modificato da facce }*h l k*{. L'angolo che fanno sullo spigolo $[111:\bar{1}11]$ si può in più casi misurare con una certa approssimazione: ritenendolo di circa 40° non si è forse lontani dal vero.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Pezzi, Carle, Boselli, Brusa, Allievo, Chironi e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 3 maggio 1903.

Il Presidente annunzia la morte improvvisa del Vice presidente Peyron, seguìta il 9 maggio corrente e lo commemora con affettuose parole. Egli dà conto dei funerali e dei discorsi pronunciati sulla tomba del defunto. Quello tenuto dal Presidente stesso è inserito negli *Atti*. Quindi riferisce le condoglianze giunte dalle Autorità, dai Corpi scientifici, dalle Biblioteche, da singoli personaggi e prega il Socio Pezzi di redigere una commemorazione ufficiale del defunto e venerando uomo. Il Socio Pezzi accetta.

Dopo aver comunicato i ringraziamenti che per le loro recenti elezioni inviarono i Soci nazionali non residenti Nigra, Scialoja, Rajna e i Soci stranieri Bréal e Wundt, il Presidente propone che sia levata l'adunanza in segno di lutto. La Classe approva unanime.

Parole pronunziate ai funerali del Vice Presidente B. Peyron

dal Socio Presidente ENRICO D'OVIDIO.

Dopo appena sei mesi dalla morte del suo compianto presidente Alfonso Cossa, la Reale Accademia delle Scienze di Torino è ora colpita da nuova gravissima perdita: quella del venerato vice-presidente BERNARDINO PEYRON. Anch'egli è sparito inaspettatamente dal novero dei viventi!

Era giunto, è vero, alla grave età di poco meno che 85 anni; ma conservava tutta la limpidezza della mente, tutta l'arguzia del suo amabile conversare, tutta la innata cortesia del tratto, tutta quella benevola disposizione dell'animo, che rendeva gradita e desiderata la sua presenza anche in mezzo a coloro cui ancora sorridesse la gioventù. Con l'inoltrarsi negli anni egli non aveva perduta la gioventù del cuore.

Educato alla scuola del suo illustre zio Amedeo Peyron, il nostro rimpianto collega aveva di buon'ora date salde prove di ingegno sagacissimo, e si era affermato con poderosi lavori nel campo degli studî classici ed orientali. Profano come sono a cotali studî, non a me si addice di valutare i meriti scientifici di Bernardino Peyron; il che altri farà con la debita scienza e coscienza. Ma la ricca natura sua non era chiusa a nessuna manifestazione di dottrina e di bellezza; e perciò, com'egli era altamente stimato dai cultori degli studî da lui prediletti, così era riverito ed amato da tutti coloro che avessero consuetudine con lui.

E particolarmente careggiato era il dotto e simpatico vegliardo dai suoi colleghi dell'Accademia delle Scienze, i quali ammiravano in lui l'indole mite e gioconda non meno dell'ampia e profonda cultura. Egli era il nostro Nestore, e per l'anzianità

e pel savio consiglio. Ritrovandolo sempre alacre e sorridente, ci eravamo avvezzi a considerarlo come destinato a secolare longevità; ma codesta illusione del nostro cuore ci fa oggi più amaro il separarci per sempre da un così buono ed autorevole compagno. Dura legge, ma legge, cui è forza piegare il capo.

Addio, dunque, venerato Collega nostro, che hai nobilmente fornita la tua giornata. Ti sia lieve la terra, e la tua memoria duri sempre onorata fra noi, indissolubilmente congiunta a quella di Amedeo Peyron. Con esso tu formi ormai una stella doppia nel firmamento della scienza italiana.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza del 24 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Berruti, Naccari, Spezia, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e Grassi.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Rossi, Manno, Pezzi, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Pizzi e Renier Segretario. — Il Direttore della Classe Ferrero ed il Socio Carle, avendo dovuto allontanarsi da Torino, scusano le loro assenze.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 3 maggio 1903.

Il Presidente rammenta la perdita del Vice-Presidente Peyron, per cui furono tolte le ultime sedute d'entrambe le Classi, a manifestazione di lutto, e comunica che ha assunto l'incarico di commemorare l'estinto il Socio Pezzi.

Si addiviene quindi alla elezione del nuovo Vice-Presidente e riesce eletto, salva l'approvazione sovrana, il Socio Boselli.

Il Presidente si rallegra con lui.

Il Socio Boselli ringrazia, e le sue parole sono accolte da unanimi applausi.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano
Rodolfo Renier.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, Spezia, Jadanza, Guidi, Naccari, Foà, Fileti, Parona, Mattirolo, Guareschi, Segre, Morera, Grassi e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica la lettera d'invito del Comitato ad assistere all'inaugurazione del monumento a Kekulè in Bonn. La Classe dà mandato alla Presidenza di provvedere a che l'Accademia vi sia rappresentata.

Comunica quindi la scheda di sottoscrizione inviata dal Comitato per l'erezione di un ricordo nel Museo Mineralogico dell'Università di Pisa al compianto Prof. Antonio D'Acchiardi. — La scheda verrà depositata in Segreteria a disposizione dei Soci.

Il Socio Guareschi fa omaggio della sua commemorazione del compianto Presidente Alfonso Cossa.

La Società Toscana di Scienze Naturali di Pisa manda in dono la commemorazione del Prof. Antonio D'Acchiardi letta dal Prof. Giovanni Arcangeli.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le Note seguenti:

1° *Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali*, del Socio nazionale non residente Prof. Luigi Bianchi, presentata dal Socio Segre.

2° *Sulla differenza di potenziale tra liquidi e gaz*, del Dott. Adolfo Campetti, presentata dal Socio Naccari.

3° *Effemeridi del Sole e della Luna e dei principali pianeti per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1904*, del Dott. Vittorio Balbi, presentata dal Socio Jadanza.

4° *Acidi 1.2diidroftalici esasostituiti*, del Socio Guareschi.

5° *Metodo grafico di calcolo degli alberi a gomito con più di due appoggi*, dell'Ing. Elia Ovazza, presentata dal Socio Guidi.

Il Socio Segre a nome anche del Socio Morera legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. Francesco Severi intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* La Classe approva all'unanimità la relazione e con votazione segreta accoglie pure unanimemente la Memoria del Severi per la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Morera a nome anche del Socio Volterra legge la relazione sulla Memoria del Dott. Giulio Bisconcini intitolata: *Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri.* La relazione viene approvata all'unanimità, e così pure, dopo votazione segreta, la stampa del lavoro del Dott. Bisconcini nei volumi delle *Memorie* accademiche.

La Classe con votazione segreta approva unanimemente la stampa, nel volume delle *Memorie*, del lavoro del Socio Mosso intitolato: *L'apnea quale si produce nei cambiamenti di posizione del corpo — Ricerche sui movimenti respiratori del torace e del diaframma.*

Il Segretario comunica che dopo l'adunanza precedente, tolta in segno di lutto per la morte del compianto Vice-Presidente Bernardino Peyron, pervennero in dono all'Accademia le opere seguenti:

Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton. Nota III del Socio Morera.

Zeoliti dell'Isola del Principe Rodolfo, del Dott. Luigi Co-

LOMBA — *Cloromelaniti e Pirosseni cloromelanitoidi,* dello stesso, presentate dal Socio SPEZIA.

Il moto dei ioni nelle scariche elettriche, presentata dal Socio corrispondente Prof. A. RIGHI.

Separazione delle funzioni basica ed acida per mezzo della formaldeide, presentata dal Socio corrispondente Prof. Ugo SCHIFF, unitamente a quattro altre note di argomento chimico eseguite nel suo laboratorio.

Pervennero alla Segreteria per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sopra il calcolo della costante solare,* del Prof. G. B. RIZZO, presentata dal Socio NACCARI.

2° *Le condizioni climatiche di Torino durante l'anno 1902,* del Dott. Efisio FERRERO, presentata dal Socio NACCARI.

3° *Appunti di mineralogia piemontese,* del Dott. Giovanni BOERIS, presentata dal Socio SPEZIA.

4° *Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri,* dell'Ing. Carlo JORIO, presentata dal Socio JADANZA.

5° *Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi,* del Socio nazionale non residente Prof. Luigi BIANCHI, presentata dal Socio SEGRE.

Per l'inserzione nel volume delle *Memorie* furono presentati i lavori seguenti:

1° *L'apnea quale si produce nei cambiamenti di posizione del corpo — Ricerche sui movimenti respiratorii del torace e del diaframma,* del Socio MOSSO.

2° *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie,* del Dott. Francesco SEVERI, presentata dal Socio SEGRE.

LETTURE

Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali.

Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. — In una nota precedente inserita negli *Atti* di questa R. Accademia (*) ho studiato i gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi. Una estensione molto naturale di queste ricerche si riferisce al caso in cui ciascuna trasformazione del gruppo altera i volumi (le aree) in un rapporto costante, nel qual caso diremo per abbreviare che la trasformazione è *proporzionale*. La presente nota ha per iscopo di mostrare come la nuova ricerca si riconduce alla primitiva.

Una trasformazione:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

altera i volumi in un rapporto costante se ha un valore costante il determinante funzionale:

$$I = \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)};$$

questo valore è allora appunto il *modulo* d'alterazione dei volumi.

Siano ora:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

le equazioni finite di un gruppo G_r, con r parametri $a_1, a_2, \ldots, a_r$, di trasformazioni *proporzionali*. Cerchiamo le condizioni neces-

(*) Adunanza del 10 maggio 1903.

sarie e sufficienti cui debbono soddisfare i coefficienti $\xi_{ki}(x)$ delle r trasformazioni infinitesime generatrici di G_r:

$$(2) \qquad X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

Ricordiamo perciò che le (1) dànno gli integrali $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ delle equazioni differenziali fondamentali del gruppo:

$$(3) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x') \psi_{sk}(a)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, r,$$

definiti dalle condizioni iniziali:

$$x_i' = x_i \qquad \text{per} \qquad a_k = a_k^{(0)},$$

ove con $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_r^{(0)}$ si indicano i valori dei parametri a che corrispondono alla trasformazione identica.

Se si deriva il Jacobiano:

$$I = \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

rapporto ad a_k, coll'osservare le (3), si ottiene la formola:

$$(4) \qquad \frac{\partial \log I}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \left\{ \frac{\partial \xi_{s1}(x')}{\partial x_1'} + \frac{\partial \xi_{s2}(x')}{\partial x_2'} + \ldots + \frac{\partial \xi_{sn}(x')}{\partial x_n'} \right\} . \psi_{sk}(a),$$

che, ponendo per abbreviare:

$$(5) \qquad \Omega_s(x) = \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{si}(x)}{\partial x_i},$$

scriviamo:

$$(4^*) \qquad \frac{\partial \log I}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \Omega_s(x') \psi_{sk}(a).$$

Il secondo membro deve, per ipotesi, essere una funzione

delle sole a; e poichè il determinante ψ delle ψ_{sk} non è nullo, ne risulta che tutte le Ω_s debbono essere costanti, diciamo:

$$\Omega_s = \gamma_s.$$

Inversamente se tutte le Ω_s sono costanti, dalle (4*) segue integrando:

$$\log I = F(a_1, a_2, ..., a_r) + \Phi(x_1, x_2, ..., x_n);$$

e poichè per $a_k = a_k^{(0)}$, riducendosi le x' alle x, diventa $I = 1$, ne risulta:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = -F(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, ..., a_r^{(0)}),$$

cioè:

$$I = e^{F(a_1, a_2, ..., a_r) - F(a_1^{(0)} a_2^{(0)} ... a_r^{(0)})}$$

dipende dai soli parametri a ed il gruppo G_r consta di trasformazioni tutte proporzionali. Concludiamo adunque:

Affinchè il gruppo:

$$G_r \equiv (X_1 f, X_2 f, ..., X_r f)$$

sia un gruppo di trasformazioni proporzionali è necessario e sufficiente che per ogni sua trasformazione infinitesima:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

l'espressione:

$$\Omega = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}$$

sia una costante γ.

In particolare, quando tutte le costanti γ sono nulle il gruppo consta di trasformazioni equivalenti (cfr. n° 1, nota I).

2. — Alle equazioni (4*):

$$\frac{\partial \log I}{\partial a_k} = \sum_s^{1...r} \psi_{sk}(a) \cdot \gamma_s$$

possiamo dare un'altra forma introducendo le trasformazioni infinitesime:

$$A_j F = \sum_k^{1...r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k}$$

del primo gruppo parametrico Π_r di G_r, dove α_{jk} indica il complemento algebrico di ψ_{jk} nel determinante ψ, diviso per ψ stesso. Le (4*) si scrivono così infatti sotto la forma equivalente:

$$A_i(\log I) = \gamma_i \qquad (i=1, 2, ..., r).$$

Se si prendono due di queste formole:

$$A_i(\log I) = \gamma_i, \qquad A_k(\log I) = \gamma_k$$

e si ricorda che identicamente:

$$(A_i, A_k) F = \sum_s^{1...r} c_{iks} A_s F,$$

dove le c_{iks} sono le costanti di composizione di G_r (o di Π_r), ponendo in questa identità $F = \log I$, deduciamo che le costanti γ_s sono legate alle costanti di composizione dalle r^2 relazioni lineari omogenee:

$$(5^*) \qquad \sum_s^{1...r} c_{iks} \gamma_s = 0$$

$$i, k = 1, 2, ..., r.$$

Il numero k delle relazioni (5*) indipendenti fra le γ eguaglia la caratteristica della matrice delle costanti di composizione:

$$\| c_{ik1}, c_{ik2}, ..., c_{ikr} \|$$
$$i, k = 1, 2, ..., r$$

con r verticali ed r^2 orizzontali; questo numero k indica altresì il numero dei parametri del primo gruppo derivato di G_r (*).

Supponiamo ora che il gruppo G_r di trasformazioni proporzionali non si riduca a trasformazioni tutte equivalenti; allora non saranno nulle tutte le γ e perciò si deve avere $k < r$. Abbiamo dunque questo primo risultato:

(*) Si ricordi che le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo derivato sono le alternate:

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1...r} c_{iks} X_s f,$$

che sono appunto k indipendenti.

Un gruppo di trasformazioni proporzionali, che non siano tutte equivalenti, non può mai coincidere col suo gruppo derivato (non è mai un gruppo perfetto).

Ritorniamo ora alle equazioni (4*) che definiscono il modulo I d'alterazione dei volumi e trasformiamole nei parametri canonici:

$$\epsilon_1 = \lambda_1 t, \ \epsilon_2 = \lambda_2 t, \ \ldots, \ \epsilon_r = \lambda_r t.$$

I parametri a risultano, com'è noto, definiti in funzione dei parametri canonici ϵ dalle equazioni differenziali:

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_j^{1\ldots r} \lambda_j \alpha_{jk}(a)$$

colle condizioni iniziali:

$$a_k = a_k^{(0)} \quad \text{per } t = 0.$$

Dalle (4*) deduciamo:

$$\frac{d \log I}{dt} = \sum_k \frac{\partial \log I}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \lambda_s \gamma_s,$$

ed integrando:

$$I = e^{\gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_r \varepsilon_r},$$

poichè per $t = 0$ è $I = 1$. Otteniamo così la semplice proposizione:

In un gruppo $G_r \equiv (X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f)$ *di trasformazioni proporzionali il modulo* I *d'alterazione dei volumi per la trasformazione finita:*

$$\epsilon_1 X_1 f + \epsilon_2 X_2 f + \ldots + \epsilon_r X_r f$$

è dato da:

$$I = e^{\sum_s \gamma_s \varepsilon_s}.$$

Vediamo ora che saranno equivalenti tutte quelle trasformazioni di G_r che sono definite dalla relazione:

$$\gamma_1 \epsilon_1 + \gamma_2 \epsilon_2 + \ldots + \gamma_r \epsilon_r = 0;$$

esse costituiscono in G_r un sottogruppo G_{r-1} invariante (supposte le γ non tutte nulle) (*). Si ha quindi il teorema:

Un gruppo G_r *di trasformazioni proporzionali o consta di trasformazioni tutte equivalenti, ovvero contiene un sottogruppo* G_{r-1} *invariante di tali trasformazioni.*

Nell'ultimo caso diremo che G_r è un gruppo *proprio* di trasformazioni proporzionali.

3. — Deduciamo in altro modo i risultati superiori colle considerazioni seguenti.

Essendo:

$$Xf = \sum_{i}^{1\ldots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad Yf = \sum^{1\ldots n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

due trasformazioni infinitesime qualunque, pongasi:

$$\Omega_\xi = \sum_{i}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}, \qquad \Omega_\eta = \sum_{i}^{1\ldots n} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i}$$

e si calcoli l'espressione analoga:

$$\Omega_\zeta = \sum_{i}^{1\ldots n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_i}$$

per la trasformazione alternata:

$$Zf = (XY) = \sum_{i}^{1\ldots n} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Poichè si ha:

$$\zeta_i = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \left(\xi_\lambda \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\lambda} - \eta_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} \right),$$

(*) La stessa cosa segue anche dall'osservare che applicando le trasformazioni infinitesime:

$$E_i f = \sum_{j,s} c_{jis} \epsilon_j \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

del gruppo aggiunto alla funzione $U = \sum_s \epsilon_s \gamma_s$ si ottiene:

$$E_i U = \sum_{j,s} c_{ijs} \gamma_s \epsilon_j,$$

e a causa delle (5*) $E_i U = 0$. Dunque l'iperpiano $U = 0$ è trasformato in sè stesso da tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto e rappresenta perciò un sottogruppo G_{r-1} invariante di G_r.

derivando rispetto a x_i, indi sommando rispetto ad i, otteniamo:

$$\Omega_\zeta = \sum_{i,\lambda}^{1\ldots n} \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} \right) + X(\Omega_\eta) - Y(\Omega_\xi).$$

Ma la somma doppia è nulla perchè cangia segno permutando gli indici di sommazione i, λ; resta dunque la formola semplice:

$$\Omega_\zeta = X(\Omega_\eta) - Y(\Omega_\xi). \tag{6}$$

Ne risulta in particolare che se Ω_ξ, Ω_η sono costanti sarà $\Omega_\zeta = 0$, cioè se i gruppi ad un parametro $[Xf]$, $[Yf]$ sono di trasformazioni proporzionali, l'altro (XY) è di trasformazioni equivalenti. Ne deduciamo quindi il teorema:

Il gruppo derivato di un gruppo di trasformazioni proporzionali è formato da trasformazioni tutte equivalenti.

La stessa cosa segue anche da una proposizione di Killing (*) secondo la quale ogni trasformazione finita del gruppo derivato ha la forma:

$$STS^{-1}T^{-1},$$

essendo S, T due convenienti trasformazioni del gruppo primitivo. Se infatti I, I_1 sono i moduli d'alterazione dei volumi delle S, T rispettivamente, quello delle $STS^{-1}T^{-1}$ sarà $I \,.\, I_1 \,.\, I^{-1} . I_1^{-1} = 1$.

Supponiamo ora che il gruppo G_r sia un gruppo *proprio* di trasformazioni proporzionali e siano:

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$$

i valori costanti delle corrispondenti $\Omega_s = \sum_i \frac{\partial \xi_{si}}{\partial x_i}$. È facile vedere che, prendendo convenientemente le trasformazioni generatrici $X_k f$, si possono rendere nulle tutte le γ *tranne una*. Infatti finchè vi sono due γ non nulle, p. e. γ_1, γ_2, possiamo rendere nulla una di esse senza alterare le altre, sostituendo alla $X_1 f$ la $\overline{X}_1 f = X_1 f - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} X_2 f$. Supponiamo dunque già:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots \gamma_{r-1} = 0, \quad \gamma_r \neq 0.$$

(*) Lie-Engel, Bd. III, pag. 770.

Le relazioni (5*) fra le costanti γ dimostrano che sono nulle tutte le c_{ikr}, cioè:

$$X_1 f,\ X_2 f,\ \ldots,\ X_{r-1} f$$

generano un G_{r-1} invariante in G_r, che ne contiene tutte e sole le trasformazioni equivalenti. Così siamo pervenuti in altro modo al teorema finale del n° 2.

4. — Vogliamo ora invertire qui l'ultimo teorema, ciò che conduce a riconoscere le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un dato gruppo G_r sia traducibile in un gruppo di trasformazioni proporzionali. Dimostreremo per ciò che: *Un gruppo* G_r *è simile ad un gruppo di trasformazioni proporzionali se possiede un sottogruppo invariante* G_{r-1} *simile ad un gruppo di trasformazioni equivalenti.*

Supponiamo già eseguito un cangiamento di variabili tale che G_{r-1} consti di trasformazioni equivalenti e sia:

$$G_{r-1} \equiv (X_1 f,\ X_2 f,\ \ldots,\ X_{r-1} f)\,;$$

avremo:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_{r-1} = 0.$$

Ora, poichè ogni trasformazione alternata $(X_i X_r)$ per $i = 1, 2, \ldots, r-1$ appartiene a G_{r-1} e quindi la corrispondente Ω_ξ è nulla, risulta dalla (6) che si avrà:

$$X_1(\Omega_r) = 0\,,\ X_2(\Omega_r) = 0,\ \ldots,\ X_{r-1}(\Omega_r) = 0\,;$$

di qui risulta che Ω_r è una costante ovvero un invariante di G_{r-1}. Nel primo caso

$$G_r \equiv (X_1 f,\ X_2 f,\ \ldots,\ X_{r-1} f,\ X_r f)$$

è già un gruppo di trasformazioni proporzionali come è enunciato nel teorema.

Nel secondo caso dimostriamo che si raggiungerà lo scopo con una conveniente trasformazione di variabili:

$$x_i' = f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \tag{7}$$

Per ciò osserviamo che se per questa trasformazione la trasformazione infinitesima qualunque:

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

si cangia in:

$$X'f = \sum_i \xi_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

il calcolo eseguito al n° 2 della nota precedente dimostra che, posto:

$$\Omega_\xi = \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}, \quad \Omega_{\xi'} = \sum_i \frac{\partial \xi_i'}{\partial x_i'},$$

si avrà:

$$\Omega_{\xi'} = \Omega_\xi + X(\log I),$$

dove $I = \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ è il modulo della trasformazione (7). Se sarà adunque possibile determinare I in guisa che si abbia:

$$(8) \quad X_1(\log I) = 0,\ X_2(\log I) = 0, \ldots, X_{r-1}(\log I) = 0,\ X_r(\log I) = \gamma - \Omega_r,$$

con γ costante, il gruppo G_r per la trasformazione (7) di modulo I si tradurrà in un gruppo di trasformazioni proporzionali, restando il G_{r-1} costituito di trasformazioni equivalenti.

Ora nel caso attuale il gruppo G_{r-1}, possedendo un invariante effettivo Ω_r, è certamente intransitivo ed ha quindi un certo numero $s \geq 1$ di invarianti indipendenti:

$$u_1, u_2, \ldots, u_s$$

di cui Ω_r sarà una funzione. Affinchè $M = \log I$ soddisfi le prime $r - 1$ equazioni (8) è necessario e basta che sia una funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_s$, diciamo:

$$M = \psi(u_1, u_2, \ldots, u_s).$$

Dopo ciò l'ultima delle (8) diventa:

$$(9) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u_1} X_r(u_1) + \frac{\partial \psi}{\partial u_2} X_r(u_2) + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial u_s} X_r(u_s) = \gamma - \Omega_r;$$

e siccome G_{r-1} è invariante in G_r i coefficienti:

$$X_r(u_1),\ X_r(u_2),\ \ldots,\ X_r(u_s)$$

sono essi stessi invarianti di G_{r-1}, cioè funzioni di $u_1, u_2, \ldots, u_s$, come Ω_r. La (9) è adunque un'equazione lineare alle derivate parziali per ψ con s variabili $u_1, u_2, \ldots, u_s$ e può quindi sempre soddisfarsi, c. d. d.

5. — È chiaro come si possono applicare i risultati precedenti per ridurre la determinazione di tutti i possibili tipi di gruppi di trasformazioni proporzionali nello spazio a n dimensioni all'altra, supposta già risoluta, dei gruppi di trasformazioni equivalenti. Basterà per ciascuno di questi ultimi tipi cercare di ampliare il gruppo in guisa che il gruppo ampliato possegga un parametro di più e contenga il primitivo come sottogruppo invariante.

Applichiamo p. e. questo processo alla determinazione di tutti i possibili tipi di gruppi proprii di trasformazioni proporzionali nel piano, utilizzando la classificazione ottenuta nei n^{i} 7, 8 della nota precedente di gruppi di trasformazioni equivalenti nel piano.

Cominciamo dal ricercare se si possono ampliare i quattro tipi (α) (β) (γ) (δ) (n° 7, l. c.) dei gruppi primitivi equivalenti. Il tipo (α) è dato da:

$$(\alpha) \qquad \overline{|\, pq,\ xq,\ yp,\ xp - yq \,|}$$

ed è il gruppo lineare speciale. Se con:

$$Xf = \xi p + \eta q$$

indichiamo la sesta trasformazione di ampliamento, debbono in primo luogo le alternate:

$$(p,\ \xi p + \eta q), \qquad (q,\ \xi p + \eta q)$$

comporsi, con coefficienti costanti, colle 5 trasformazioni di (α); dovranno per ciò sussistere formole del tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = a + dy + ex, & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = b + cx - ey \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = a' + d'y + e'x, & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = b' + c'x - e'y \end{cases}$$

dove a, b, c, d, e; a', b', c', d', e' sono costanti. Intanto le condizioni d'integrabilità dànno:

$$e' = d, \qquad c' = -e$$

ed integrando risulta:

$$\xi = ax + a'y + dxy + e\frac{x^2}{2} + d'\frac{y^2}{2} + f$$

$$\eta = bx + b'y - exy + c\frac{x^2}{2} - d\frac{y^2}{2} + f',$$

con f, f' nuove costanti. Togliendo da Xf una conveniente combinazione lineare delle 5 trasformazioni (α) possiamo rendere, senza alterare la generalità:

$$a' = b = b' = f = f' = 0,$$

onde resta:

$$\begin{cases} \xi = ax + dxy + e\dfrac{x^2}{2} + d'\dfrac{y^2}{2} \\ \eta = -exy + c\dfrac{x^2}{2} - d\dfrac{y^2}{2}. \end{cases}$$

Ulteriormente dovendo anche le due trasformazioni:

$$(xq,\ \xi p + \eta q) = x\frac{\partial \xi}{\partial y}p + \left(x\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi\right)p =$$
$$= (dx + d'xy)p - \left(ax + 2dxy + \frac{3}{2}ex^2 + \frac{1}{2}d'y^2\right)q$$

$$(yp,\ \xi p + \eta q) = \left(y\frac{\partial \xi}{\partial x} - \eta\right)p + y\frac{\partial \eta}{\partial x}q =$$
$$= \left(ay + 2exy + \frac{3}{2}dy^2 - \frac{1}{2}cx^2\right)p + (cxy - ey^2)q$$

appartenere al gruppo (α), ne deduciamo:

$$c = d = d' = e = 0.$$

La trasformazione d'ampliamento resta così determinata nella $Xf = xp$ o, ciò che è lo stesso, nella $xp + yq$. Così per primo tipo di gruppi proprii di trasformazioni proporzionali nel piano otteniamo il:

Tipo (α') $\qquad \underline{|p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp - yq,\ xp + yq|}$,

che è il G_6 delle sostituzioni lineari intere ossia il gruppo delle affinità. Prendendo ora il secondo tipo (β) (l. c.):

$$(\beta) \qquad \overline{|p,\ q,\ xq-yp|},$$

che è il gruppo dei movimenti del piano, si vede subito, procedendo come sopra, che si può ampliare in un sol modo e si ottiene così il secondo tipo:

$$\text{Tipo } (\beta') \qquad \overline{|p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq|},$$

cioè il gruppo dei movimenti e delle similitudini.

Quanto agli altri due tipi (γ) (δ) di gruppi primitivi di trasformazioni equivalenti nel piano (l. c.) si vede subito che non sono suscettibili d'ampliamento perchè il gruppo ampliato sarebbe un G_4 primitivo e di tali gruppi nel piano vi ha il solo tipo (β′) già sopra considerato.

6. — Procediamo ora nel medesimo modo per l'ampliamento dei gruppi imprimitivi di trasformazioni equivalenti che si ripartiscono nei tipi da (A) a (H) del n° 8 (l. c.).

1° Per il tipo:

$$(A) \qquad \overline{|p,\ q,\ xq,\ x^2q,\ \ldots,\ x^rq,\ xp-yq|} \quad r>0$$

la trasformazione d'ampliamento:

$$Xf=\xi p+\eta q,$$

combinata dapprima con p, q, deve soddisfare in primo luogo alle condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x}=a+cx, & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}=b-cy+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_rx^r \\[2ex] \dfrac{\partial\xi}{\partial y}=a'+c'x, & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}=b'-c'y+c'_1x+c'_2x^2+\ldots+c_r'x^r, \end{cases}$$

dove $a, b, c, c_1, \ldots, c_r$ e le stesse lettere cogli accenti indicano costanti. Le condizioni d'integrabilità dànno intanto:

$$c'=c_2'=c'_3=\ldots=c_r'=0, \quad c'_1=-c$$

e togliendo da Xf una conveniente combinazione lineare delle (A), si può prendere:

$$\xi = \frac{c}{2} x^2 + a'y, \quad \eta = b'y + c_2 \frac{x^{r+1}}{r+1} - cxy.$$

Combinando ora colla $x^\alpha q$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$), viene:

$$(x^\alpha q, \xi p + \eta q) = a' x^\alpha p + \left\{ x^\alpha (b' - cx) - \alpha x^{\alpha-1} \left(\frac{c}{2} x^2 + a'y \right) \right\} q$$

e questa deve pure appartenere ad (A). Così pure deve appartenere ad (A) la:

$$xp - yq, \ \xi p + \eta q) = \left(\frac{c}{2} x^2 - 2a'y \right) p + \left(c_r \frac{r+2}{r+1} x^{r+1} - cxy \right) q,$$

onde deduciamo:

$$a' = c = c_r = 0.$$

Resta quindi semplicemente $Xf = yq$, che si può sostituire con $xp + yq$; si ha così come gruppo di trasformazioni proporzionali il tipo:

$$\text{(A')} \qquad \overline{|\, p, \ q, \ xq, \ x^2 q, \ \ldots, \ x^r q, \ xp - yq, \ xp + yq \,|}.$$

2° Prendendo ora l'altro tipo (B) di trasformazioni equivalenti:

$$\text{(B)} \qquad \overline{|\, q, \ xq, \ F_1(x)q, \ F_2(x)q, \ \ldots, \ F_r(x)q \,|}$$

vediamo che si può in ogni caso ampliare ad un gruppo di trasformazioni proporzionali coll'aggiunta della trasformazione:

$$Xf = yq;$$

si ha così il tipo:

$$\text{(B')} \qquad \overline{|\, q, \ xq, \ F_1(x)q, \ F_2(x)q, \ \ldots, \ F_r(x)q, \ yq \,|}$$

nel quale le funzioni $F_1, F_2, \ldots, F_r$ restano funzioni arbitrarie della x. Altri ampliamenti sono possibili soltanto quando si vincolino le $F_1, F_2, \ldots, F_r$ a soddisfare ad equazioni differenziali lineari di cui tralasciamo qui la considerazione.

3° Il tipo (C) è quello di un gruppo a tre parametri colle trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f = p,\ X_2 f = xp - yq,\ X_3 f = x^2 p - 2xy$$

di composizione:

$$(X_1 X_2) = X_1 f,\ (X_1 X_3) = 2X_2 f,\ (X_2 X_3) = X_3 f.$$

Se diciamo Xf la trasformazione d'ampliamento:

$$Xf = \xi p + \eta q$$

dovranno:

$$(X_1 X),\ (X_2 X),\ (X_3 X)$$

comporsi linearmente ed omogeneamente con X_1, X_2, X_3. Tenendo conto delle superiori formole di composizione e delle identità Jacobiane, si vede facilmente che deve essere:

$$(X_1 X) = aX_1 f + 2bX_2 f,\ (X_2 X) = cX_1 f + bX_3 f,\ (X_3 X) = 2cX_2 f - aX_3 f$$

con a, b, c costanti, onde si deduce integrando che vi ha in sostanza un unico modo d'ampliamento colla trasformazione $Xf = yq$. Si ha quindi il tipo di un gruppo di trasformazioni proporzionali:

$$\text{(C')} \qquad \boxed{|\, p,\ xp - yq,\ x^2 p - 2xyq,\ yq \,|}.$$

4° Il tipo (D):

$$\text{(D)} \qquad \boxed{|\, p,\ xp - yq,\ x^2 p + (1 - 2xy) q \,|}$$

possiede la medesima composizione superiore, e procedendo come sopra si trova che non è qui possibile l'ampliamento cercato.

5° I seguenti tipi (E), (F) si trovano ciascuna volta ampliabili in un solo modo e si hanno così i tipi di gruppi di trasformazioni proporzionali:

$$\text{(E')} \qquad \boxed{|\, p,\ q,\ xp - yq,\ xp + yq \,|}$$

$$\text{(F')} \qquad \boxed{\left|\, q,\ xp - yq,\ \left(y + \frac{c}{x}\right) q \,\right|} \quad c \text{ costante.}$$

Il tipo (G), gruppo delle traslazioni p, q, si amplia con una trasformazione della forma:

$$Xf = (\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q$$

(α, β, γ, δ costanti) nel gruppo:

$$(G') \qquad \overline{|\, p,\ q,\ (\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q \,|}\,,$$

che è un gruppo *proprio* di trasformazioni proporzionali se:

$$\alpha + \delta \neq 0.$$

In fine l'ultimo tipo (H) $\overline{|\, q \,|}$ si amplia nel tipo:

$$(H') \qquad \overline{|\, q,\ ap + yq \,|}.$$

Si osserverà che tutti i tipi di gruppi di trasformazioni proporzionali trovati nel presente numero sono imprimitivi, le rette $x =$ cost dando una divisione d'imprimitività. Fa eccezione solo il tipo (G') il quale è imprimitivo, dal punto di vista reale, nel solo caso che sia:

$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \geq 0$$

e nel caso contrario primitivo.

Sulla differenza di potenziale tra liquidi e gas.

Nota del Dott. ADOLFO CAMPETTI.

1. — Le presenti esperienze non riguardano un problema nuovo, ma si limitano a considerare un caso particolare di una questione già studiata da Lenard, J. J. Thomson, Lord Kelvin, e più recentemente, e con esperienze più numerose da Kenrik.

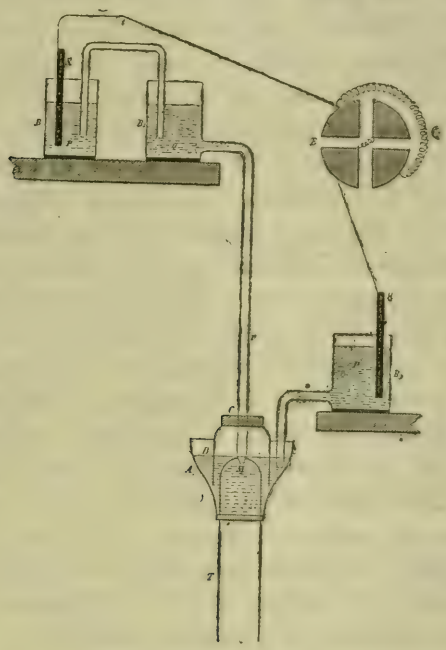
Il caso che io ho inteso di considerare è quello nel quale tra il gas ed il liquido esista un'azione chimica, vale a dire in cui il gas agisca chimicamente sul liquido o sopra una sostanza disciolta nel liquido stesso.

Che una differenza di potenziale possa esistere tra un liquido ed un gas risulta da molte delle esperienze sopra accennate ed in particolare Lord Kelvin (1) e Galt hanno osservato che se si fa gorgogliare un gas attraverso ad un liquido, il liquido stesso si porta ad un potenziale variabile specialmente a seconda della natura del liquido. Tali esperienze, se pure dimostrano la possibilità dell'esistenza di una differenza di potenziale tra un liquido ed un gas, non sono atte a dare in tutti i casi una misura di tale differenza di potenziale, anche perchè è molto probabile che l'elettricità dovuta all'attrito per il moto relativo del gas rispetto al liquido abbia una parte importante nel fenomeno osservato. Il Lenard (2) e posteriormente con esperienze analoghe l'Usener (3) e così pure J. J. Thomson (4) si occuparono pure della stessa questione, ma con metodo diverso e precisamente essi osservarono che se le goccie di un liquido, dopo avere attraversato l'aria od un altro gas, urtano contro un ostacolo, questo ostacolo e il gas attraversato si caricano a potenziali differenti, dipendenti dalla natura del liquido, del gas, ecc. È

(1) L. Kelvin e Galt, " Nature „, 51, 1895.
(2) Lenard, " Wied. Ann. „, 46.
(3) Usener, Dissertation Bonn, 1895.
(4) J. J. Thomson, " Philosophical Magaz. „, 1895.

tuttavia da osservare che anche in tal modo il fenomeno si presenta assai complicato, specialmente dal punto di vista della moltiplicità delle cause che possono produrre quella carica elettrica sul liquido gocciolante e nel gas.

Un metodo il quale evita, almeno in parte, tali obiezioni, per quanto le misure relative siano sempre assai difficili è quello



usato dal Kenrik (1) e derivato direttamente dal metodo adoperato da Bichat e Blondot (2) per determinare la differenza di potenziale tra due soluzioni. Ricordiamo che il Bichat e Blondot procedevano così (Vedasi la figura): I due bicchieri B_1 e B_3 contengano una delle due soluzioni P, e nel liquido siano immessi due elettrodi di platino H e K in comunicazione con le coppie opposte di quadranti dell'elettrometro E. Il liquido contenuto nel vaso B_3 per mezzo del tubo *s* si riversi nel recipiente A che attornia un largo tubo cilindrico T e scorra così

(1) Kenrik, " Zeitschrift für phys. Chemie „, 1896.

(2) Bichat e Blondot, " Journal de Physique „, 1883, 2.

lungo le pareti interne del cilindro stesso, bagnandole continuamente. Il liquido Q contenuto nel bicchiere B_2, posto in comunicazione col liquido in B_1 a mezzo del tubo ad U, *t*, passando per il tubo *r* terminato in apertura sottile al suo estremo inferiore M, formi qui un getto continuo per due o tre centimetri di lunghezza, getto che si divide poi in minute goccioline. Se allora facciamo astrazione dalle cariche elettriche che possono essere dovute all'attrito e supponiamo che si possa applicare il principio di Thomson, secondo il quale un liquido isolato che esce in forma di getto, che poi si spezza in goccioline, in una data regione finisce per assumere il potenziale che vi è in quella regione e se il potenziale in M è lo stesso di quello del liquido in A e nel tubo T, è evidente che l'unica differenza di potenziale esistente nel sistema è quella tra i due liquidi P e Q. Ma intanto il principio di Thomson, se è probabilmente applicabile in modo esatto al caso in cui il liquido gocciolante sia il mercurio nell'aria (sia perchè in tal caso non ha luogo alcun assorbimento di gas per parte del liquido, nè alcuna azione chimica, sia perchè le esperienze che lo suppongono verificato portano a risultati concordanti con quelli di esperienze fondate su diverso principio), non si può ammettere senz'altro come esatto in ogni caso, come d'altra parte il potenziale in M non è necessariamente lo stesso di quello del liquido in A e nel tubo T.

Tenendo conto di queste osservazioni e indicando, come si usa comunemente, col simbolo A | B la differenza di potenziale tra A e B, la differenza di potenziale esistente nel circuito indicato nella figura sarà data dalla somma:

$$\pi = \mathrm{Pt} \mid \mathrm{P} + \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} + \mathrm{Q} \mid \mathrm{Aria} + \mathrm{Aria} \mid \mathrm{P} + \mathrm{P} \mid \mathrm{Pt}$$

e poichè la prima ed ultima differenza di potenziale sono uguali e di segno contrario, se si determina con un metodo qualunque la differenza di potenziale P | Q risulta determinata pure la somma

$$\epsilon = \mathrm{Q} \mid \mathrm{Aria} + \mathrm{Aria} \mid \mathrm{P}. \tag{1}$$

Ed inoltre, se per qualche ragione particolare all'esperienza che si eseguisce, è nota, oppure si può considerare come nulla una delle due differenze di potenziale del secondo membro

della (1), l'altra risulta determinata; nel caso generale non si potranno determinare queste differenze di potenziali se non a coppie.

2. — Allorquando si vogliano eseguire esperienze con questo metodo, si nota subito che, se le comunicazioni con l'elettrometro sono stabilite mediante lastre o fili di platino immerse nei due bicchieri, i risultati non sono ben concordanti e si riscontra facilmente che ciò dipende dal fatto che la differenza di potenziale fra il platino ed il liquido assume valori un po' diversi a seconda dello stato della superficie della lastra, anche se si adopera la precauzione di ricoprire la lastra stessa di nero di platino e di togliere l'aria aderente alla superficie con ebollizione nell'acqua distillata. Per conseguenza, non potendosi ritenere che nella somma che ci dà π il primo ed ultimo termine si annullino, la disposizione dell'esperienza è un po' variata e diversa da quella della figura.

Il bicchiere B_1 è soppresso ed i liquidi contenuti in B_2 e B_3 sono posti in comunicazione (mediante tubi ad U capovolti e ripieni dei liquidi Q e P rispettivamente) con due bicchierini contenenti una soluzione normale di cloruro potassico: ed in questa soluzione pescano i tubi di due elettrodi normali di Ostwald, il mercurio dei quali è in comunicazione con i quadranti dell'elettrometro.

Il vantaggio di una tale disposizione consiste in questo che la differenza di potenziale corrispondente all'elettrodo normale di Ostwald si mantiene perfettamente costante durante tutto il corso delle esperienze. In questo modo la catena delle forze elettromotrici misurata dall'elettrometro è:

(2) El. Ostwald | soluzione KCl | liquido Q | gas
liquido P | soluzione KCl | El. Ostwald

ed in conseguenza, affinchè si possa conoscere la somma

liquido Q | gas | liquido P

è necessario determinare separatamente le due quantità:

(3)
$\pi_1 =$ El. Ostwald | soluzione KCl | liquido Q
$\pi_2 =$ El. Ostwald | soluzione KCl | liquido P

come verrà detto poi.

3. — Prima di passare alla descrizione delle esperienze, converrà fare un'osservazione di indole generale. Allorquando si parla di differenze di potenziale tra un liquido L ed un gas G, e che noi abbiamo riconosciuto che tra un punto posto nell'interno di L e un punto preso nell'interno di G esiste una differenza di potenziale e, si può ammettere che tale salto di potenziale abbia luogo alla superficie di separazione tra il liquido e il gas, oppure si può supporre che la differenza di potenziale si stabilisca tra lo stato superficiale del liquido e l'interno del liquido stesso, restando così la superficie esterna del liquido o il gas allo stesso potenziale, come anche si può fare una ipotesi intermedia fra le due.

L'osservazione ora fatta può valere del resto per la differenza di potenziale tra due corpi qualsiasi A e B: ma acquista nel caso nostro maggiore importanza per il fatto che nel caso di un liquido o un gas, questo sciogliendosi o reagendo col liquido, potrebbe esistere in quest'ultimo uno strato superficiale di composizione diversa dall'interno. Tuttavia data la rapidità con cui in un getto liquido e nelle goccie cui esso dà luogo si rinnova la superficie libera, vi è grande probabilità che le differenze di potenziale che noi misuriamo esistano effettivamente tra il liquido ed il gas ed alla superficie loro di separazione.

4. — Fatte queste osservazioni ritorniamo ad occuparci delle esperienze da eseguire: come si è detto, l'apparecchio adoperato corrisponde (colle modificazioni accennate) a quello della figura: il tubo r era lungo 80 cm., ma la sua lunghezza poteva essere variata; il tubo T aveva il diametro di circa 6 cm., e alla sua parte superiore si restringeva sino al diametro di 1 cm. e a quest'altezza terminava il tubo r; nel vaso A era capovolta una campanella di vetro B chiusa superiormente da un disco di ebanite paraffinata C, attraverso al quale passava il tubo r.

L'elettrometro adoperato era un comune elettrometro a quadranti; l'ago veniva caricato mediante una pila secca e tenendo questa in un'atmosfera ben asciutta si otteneva per l'elettrometro una sensibilità pressochè costante da un giorno all'altro e precisamente di 200 divisioni all'incirca per un Volt.

In tali condizioni di sensibilità assai elevata lo zero dello strumento si manteneva ben fisso, purchè i fili che pongono in

comunicazione l'elettrometro con il resto dell'apparecchio fossero circondati da un largo tubo metallico posto a terra; senza questa precauzione anche i movimenti di una persona in vicinanza del filo producevano deviazioni nell'elettrometro.

Per determinare le differenze di potenziali π_1 e π_2 trascritte nella (3) si ricorse all'uso dell'elettrodo a goccie, unito, come di solito, all'elettrometro Lippmann. Conosciuta con questo mezzo la differenza di potenziale Mercurio | liquido Q si formava la combinazione

Mercurio | liquido Q | soluzione KCl | El. Ostwald

e se ne misurava la forza elettromotrice: restava così determinato per differenza il valore di π_1 ed analogamente si procedeva per π_2.

Ciò essendo noto, ecco come si eseguiva l'esperienza. Misurata la deviazione data all'elettrometro da una pila Clark si mettevano in comunicazione coll'elettrometro i due elettrodi di Ostwald: allora si faceva scorrere il liquido P nel tubo T, che restava così, nella sua superficie interna, completamente bagnato da esso, e il liquido Q si faceva effluire dall'apertura inferiore del tubo r; quindi si osservava la deviazione ottenuta all'elettrometro; il rapporto delle due deviazioni ci dà il valore della forza elettromotrice totale in frazione di Clark.

È conveniente ripetere per la stessa coppia di liquidi P e Q diverse esperienze variando l'altezza della colonna liquida del tubo r (il che corrisponde a diminuire la lunghezza e la velocità del getto liquido che da esso sgorga), per assicurarsi se si ottengono sempre i medesimi valori per la differenza di potenziale, in guisa che si possa da questa ricavare effettivamente la somma delle forze elettromotrici alle superficie di contatto tra i liquidi ed il gas.

Poichè durante l'esperienza il liquido Q è in moto nel tubo r ed esce poi in getto sottile dalla apertura praticata alla sua estremità inferiore, era anche opportuno di ridurre al minimo l'elettricità svolta per attrito: per conseguenza, in luogo di affilare direttamente alla fiamma il tubo di efflusso r, lo si chiudeva in modo che terminasse con una superficie emisferica a parete sottile, nella quale si praticava un foro di circa due decimi di millimetro di diametro.

5. — Daremo qui la descrizione dettagliata di una prima esperienza che ci servirà per intendere tutte le altre. In questa i liquidi adoperati sono: una soluzione normale di solfato di ammonio (L_1) e una soluzione normale di solfato di ammonio, cui è stata aggiunta una soluzione di ammoniaca; e precisamente a 300 centimetri cubi di soluzione di solfato ammonico sono stati aggiunti 60 centimetri cubi di soluzione ammoniacale contenente il 24 % di ammoniaca: questa soluzione la chiamerò L_2. Allora trovo col mezzo dell'elettrodo a goccie ed esprimendo sempre le forze elettromotrici in frazione di Clark:

$$Hg \mid L_1 = 0{,}4098 \qquad Hg \mid L = 0{,}1732$$

e di qui deduco:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid L_1 = 0{,}318$$
$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid L_2 = 0{,}297.$$

Riferendoci allora alla figura per il significato delle lettere P e Q si eseguiscono queste esperienze:

$$\text{liquido } Q = L_1 \qquad \text{liquido } P = L_1 \qquad V_1 = 0{,}014$$
$$\text{liquido } Q = L_1 \qquad \text{liquido } P = L_2 \qquad V_2 = 0{,}078$$

essendo V_1 e V_2 le differenze di potenziale misurate coll'elettrometro nei due casi e nel senso che verrà poi indicato.

Ora nella prima esperienza la differenza di potenziale esistente nel circuito può essere dovuta in parte alla non perfetta uguaglianza delle forze elettromotrici alle superficie di separazione di due elettroliti teoricamente in identiche condizioni ed in parte all'attrito del liquido nel tubo r; indicandola con x, poichè nella combinazione

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid L_1 \mid \text{Aria} \mid L_1 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} + x = 0{,}014$$

le altre forze elettromotrici sono, per coppie, uguali o di segno contrario, risulta

$$x = 0{,}014.$$

Nella seconda esperienza si ha:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid L_1 \mid \text{Gas} \mid L_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} + x = 0{,}078$$

e perciò

$$L_1 \mid \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}043$$

ossia

$$L_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}062 \text{ Volt.}$$

Ora la differenza di potenziale Gas | L_2 è molto probabilmente nulla, giacchè, una volta che lo spazio nel tubo T attorno al getto liquido sia, in quelle condizioni, saturo di vapore di ammoniaca proveniente dal liquido L_2, da questo non avviene più emissione, nè assorbimento di gas, potendosi ritenere trascurabile la quantità di gas ammoniaco assorbita dal getto liquido: in tale ipotesi sarebbe:

$$L_1 \mid \text{Gas} = 0{,}062 \text{ Volt.}$$

Una seconda esperienza dette il valore 0,054, sicchè come media, secondo ogni probabilità:

$$L_1 \mid \text{Gas} = 0{,}058 \text{ Volt.}$$

Esperienza 2ª. — Adopero come liquidi una soluzione normale di acido solforico, che indicherò semplicemente con H_2SO_4, la soluzione L_1 e la soluzione L_2. Trovo prima, col metodo già indicato nell'esperienza precedente:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid H_2SO_4 = 0{,}239$$

ed eseguisco le due esperienze:

$$\text{liquido } Q = H_2SO_4 \quad \text{liquido } P = L_1 \quad V_1 = 0{,}015$$
$$\text{liquido } Q = H_2SO_4 \quad \text{liquido } P = L_2 \quad V_2 = 0{,}112.$$

Queste due esperienze corrispondono agli schemi seguenti

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid H_2SO_4 \mid \text{Aria} \mid L_1 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}015$$

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid H_2SO_4 \mid \text{Gas} \mid L_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}112$$

in cui non si è tenuto conto dell'elettricità che potrebbe essere dovuta all'attrito del liquido. Di qui segue:

$$H_2SO_4 \mid \text{Aria} + \text{Aria} \mid L_1 = 0{,}072 = 0{,}104 \text{ Volt}$$
$$H_2SO_4 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}170 = 0{,}245 \text{ Volt.}$$

Una seconda esperienza dette:

$$H_2SO_4 \mid \text{Aria} + \text{Aria} \mid L_1 = 0{,}120 \text{ Volt}$$
$$H_2SO_4 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}243 \text{ Volt.}$$

Esperienza 3ª. — Adopero come liquidi una soluzione normale di HCl, che indico semplicemente con HCl, la soluzione L_1 e la soluzione L_2. Come nel caso precedente eseguisco due esperienze, che corrispondono agli schemi seguenti:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid HCl \mid \text{Aria} \mid L_1 \mid KCl \mid \text{El. Ostwald} = 0{,}034$$
$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid HCl \mid \text{Gas} \mid L_2 \mid KCl \mid \text{El. Ostwald} = 0{,}109.$$

Avendo trovato prima:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid HCl = 0{,}397$$

ricavo dalle precedenti:

$$HCl \mid \text{Aria}+\text{Aria} \mid L_1 = -0{,}037 = -0{,}054 \text{ Volt}$$
$$HCl \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = -0{,}010 = 0{,}014 \text{ Volt.}$$

Una seconda esperienza dette:

$$HCl \mid \text{Aria} + \text{Aria} \mid L_1 = -0{,}057 \text{ Volt}$$
$$HCl \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}010 \text{ Volt.}$$

Esperienza 4ª. — I liquidi sono in questo caso una soluzione normale di $CuSO_4$, che indico semplicemente con $CuSO_4$, e al solito le due soluzioni L_1 e L_2. Essendo le esperienze eseguite nel modo stesso che per l'acido solforico, esse corrispondono ai seguenti schemi:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid CuSO_4 \mid \text{Aria} \mid L_1 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = -0{,}015$$
$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid CuSO_4 \mid \text{Gas} \mid L_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}056.$$

In questo caso però le esperienze dirette a ricavare la differenza di potenziale corrispondente al sistema:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid CuSO_4$$

non dànno risultati ben concordanti ed in conseguenza il calcolo non può eseguirsi come nel caso precedente: solo si può ottenere questo che, indicando tale differenza di potenziale con e, restano determinate le somme

$$e + CuSO_4 \mid Aria + Aria \mid L_1 = 0{,}433 \text{ Volt}$$
$$e + CuSO_4 \mid Gas + Gas \mid L_2 = 0{,}494 \text{ Volt.}$$

6. — Dopo le esperienze ora riportate se ne eseguì un'altra serie con metodo un poco diverso. In queste il liquido P rimaneva sempre il medesimo ed era costituito da una soluzione acida capace di dare vapori (acido cloridrico e acido acetico) e si adoperava successivamente come liquido Q una soluzione neutra (cloruro di ammonio o cloruro di potassio) e una soluzione alcalina (soluzione ammoniacale o soluzione di idrato potassico). Seguendo tale procedimento si ha il vantaggio che nel calcolo definitivo figura tra le differenze di potenziale un' incognita di meno: si avrebbe d'altra parte l'inconveniente che, cambiandosi dall'una all'altra esperienza il liquido nel tubo r, potrebbe anche variare lo sviluppo di elettricità per attrito nel tubo stesso. Se non che esperienze apposite eseguite adoperando la medesima soluzione come liquido P e liquido Q, mostrarono che gli errori portati da questa causa rientrano (almeno per le soluzioni ora adoperate) nei limiti degli errori sperimentali.

Non resta quindi che riferire i risultati delle esperienze eseguite.

Esperienza 5ª. — Adopero come liquido Q una soluzione normale di cloruro d'ammonio (soluzione S_1) e una soluzione normale di cloruro d'ammonio mescolata con una soluzione normale di ammoniaca nella proporzione di $^7/_{10}$ della prima e $^3/_{10}$ della seconda (soluzione S_2): il liquido P è una soluzione normale di acido cloridrico, che indicherò senz'altro con HCl.

Determino intanto col mezzo dell'elettrodo a goccie e l'elettrometro Lippmann le differenze di potenziale

$$El.\ Ostwald \mid KCl \mid S_1 = 0{,}368$$
$$El.\ Ostwald \mid KCl \mid S_2 = 0{,}386$$
$$El.\ Ostwald \mid KCl \mid HCl = 0{,}397$$

quindi l'esperienza coll'elettrometro mi dà, corrispondentemente agli schemi sottosegnati, i resultati seguenti;

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid S_1 \mid \text{Gas} \mid HCl \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = -0{,}040$$

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid S_2 \mid \text{Gas} \mid HCl \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = -0{,}032.$$

Di qui si deduce:

$$S_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid HCl = -0{,}011 = -0{,}016 \text{ Volt}$$
$$S_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid HCl = -0{,}020 = -0{,}029 \text{ Volt.}$$

Se si ammettesse che Gas | HCl = 0 le differenze di potenziale scritte nei secondi membri ci rappresenterebbero le forze elettromotrici ai contatti S_1 | Gas e S_2 | Gas: altrimenti dalle due precedenti uguaglianze si può ricavare la differenza:

$$S_2 \mid \text{Gas} - S_1 \mid \text{Gas} = -0{,}013 \text{ Volt.}$$

Ripeto l'esperienza e trovo:

$$S_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid HCl = -0{,}014 \text{ Volt}$$
$$S_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid HCl = -0{,}030 \text{ Volt.}$$

Esperienza 6ª. — Le condizioni dell'esperienza sono:

liquido P = soluzione trinormale di HCl = 3HCl
liquido Q = soluzione S_1 e quindi = soluzione S_2.

Qui non ho nemmeno determinato la differenza di potenziale della combinazione:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid 3HCl = -e$$

e per conseguenza dalle due esperienze eseguite ricavo:

$$e + S_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3HCl = -0{,}443$$
$$e + S_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3HCl = -0{,}492$$

e quindi infine:

$$S_2 \mid \text{Gas} - S_1 \mid \text{Gas} = -0{,}049 = -0{,}071 \text{ Volt.}$$

Ripeto l'esperienza e trovo:

$$S_2 \mid \text{Gas} - S_1 \mid \text{Gas} = -0{,}051 = -0{,}073 \text{ Volt.}$$

Esperienza 7ª. — In questa esperienza e nelle seguenti adopero come liquido P una soluzione trinormale di acido acetico e una normale di acido cloridrico, quindi una soluzione sei volte la normale di acido acetico e una trinormale di acido cloridrico. Come liquido Q adopero una soluzione normale di cloruro potassico (soluzione T_1) e una soluzione normale di idrato potassico (soluzione T_2).

Riferisco, come al solito, i risultati della prima esperienza eseguita con queste soluzioni:

liquido P = HCl . liquido Q = soluzione T_1 e soluzione T_2.

Determinate prima le differenze di potenziale

El. Ostwald | KCl | T_1 = 0,370
El. Ostwald | KCl | T_2 = 0,313

ed avendo trovato:

El. Ostwald | KCl | T_1 | Gas | HCl | KCl
El. Ostwald = — 0,026

El. Ostwald | KCl | T_2 | Gas | HCl | KCl
El. Ostwald = — 0,041

ricavo:

T_1 | Gas + Gas | HCl = 0,001 = 0,001 Volt
T_2 | Gas + Gas | HCl = 0,041 = 0,050 Volt

e di qui:

T_2 | Gas — T_1 | Gas = 0,049 Volt.

Ripetendo l'esperienza, trovo:

T_2 | Gas—T_1 | Gas = 0,055 Volt.

Esperienza 8ª. — Liquido P = soluzione trinormale di HCl = 3HCl. Liquido Q = soluzione T_1 e soluzione T_2.

L'esperienza dà i risultati seguenti:

El. Ostwald | KCl | T_1 | Gas | 3HCl | KCl
El. Ostwald = — 0,077

El. Ostwald | KCl | T_2 | Gas | 3HCl | KCl
El. Ostwald = — 0,112.

Senza determinare a parte la differenza di potenziale

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid 3HCl = -e$$

ricavo:

$$e + T_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3HCl = -0{,}447$$

$$e + T_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3HCl = -0{,}425$$

e di qui:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \mid \text{Gas} = 0{,}022 = 0{,}032 \text{ Volt.}$$

Una seconda esperienza dette:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \text{ Gas} = 0{,}023 = 0{,}033 \text{ Volt.}$$

Esperienza 9ª. — Liquido P = soluzione trinormale di acido acetico = $3C_2H_4O_2$. Liquido Q = soluzione T_1 e soluzione T_2.

I risultati delle esperienze sono:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid T_1 \mid \text{Gas} \mid 3C_2H_4O_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}166$$

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid T_2 \mid \text{Gas} \mid 3C_2H_4O_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}123$$

e ponendo al solito:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid 3C_4H_4O_2 = -e$$

si ottiene:

$$e + T_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3C_2H_4O_2 = -0{,}204$$

$$e + T_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 3C_2H_4O_2 = -0{,}189$$

e di qui:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \mid \text{Gas} = 0{,}075 = 0{,}022 \text{ Volt.}$$

In una seconda esperienza trovo:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \mid \text{Gas} = 0{,}023 \text{ Volt.}$$

Esperienza 10ª. — Liquido P = soluzione 6-normale di acido acetico = $6C_2H_4O_2$. Liquido Q = soluzione T_1 e soluzione T_2.

L'esperienza dette:

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid T_1 \mid \text{Gas} \mid 6C_2H_4O_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}138$$

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid T_2 \mid \text{Gas} \mid 6C_2H_4O_2 \mid KCl$$
$$\text{El. Ostwald} = 0{,}111$$

e indicando con e la differenza di potenziale

$$\text{El. Ostwald} \mid KCl \mid 6C_2H_4O_2$$

si ottiene:

$$e + T_1 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 6C_2H_4O_2 = -0{,}231$$
$$e + T_2 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid 6C_2H_4O_2 = -0{,}201$$

e di qui:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \mid \text{Gas} = 0{,}031 = 0{,}045 \text{ Volt.}$$

In una seconda esperienza trovo:

$$T_2 \mid \text{Gas} - T_1 \mid \text{Gas} = 0{,}043 \text{ Volt.}$$

7. — Se ora diamo uno sguardo alle esperienze eseguite, si vede come in generale le forze elettromotrici che si cercano non restino determinate isolatamente, ma a coppie, e cioè siano determinate o la somma o la differenza di due di tali forze elettromotrici.

Solo ammettendo, in alcuni casi, che una delle due differenze di potenziale sia, per le particolari condizioni dell'esperienza, nulla o trascurabile rispetto all'altra, quest'ultima resta isolatamente determinata. Ad esempio, nell'esperienza eseguita con soluzione normale di acido solforico (Esperienza 2ª) in cui si è trovato (come media di due esperienze):

$$H_2SO_4 \mid \text{Aria} + \text{Aria} \mid L_1 = 0{,}112 \text{ Volt}$$
$$H_2SO_4 \mid \text{Gas} + \text{Gas} \mid L_2 = 0{,}244 \text{ Volt}$$

le differenze di potenziale scritte nel secondo membro sono, secondo ogni probabilità da attribuire (per gran parte) al primo termine del primo membro dell' uguaglianza; cosicchè, se non una misura esatta, abbiamo almeno un'idea del valore di tali forze elettromotrici. È anche notevole il valore elevato di tali differenze di potenziale per la soluzione di acido solforico, mentre le altre esperienze dànno somme o differenze dell' ordine di grandezza di centesimi di Volt.

Com'era facilmente prevedibile, la differenza di potenziale che, secondo ogni probabilità, sussiste tra la soluzione normale di solfato di ammonio (soluzione L_1) e i vapori ammoniacali

emanati dalla soluzione L_2, non equivale nè in grandezza, nè in segno alla differenza di potenziale $L_1 \mid L_2$ tra le due soluzioni, che fu misurata con esperienza apposita e risultò:

$$L_1 \mid L_2 = -0{,}046 \text{ Volt};$$

e un fatto analogo si verificherebbe per i casi corrispondenti; tal fatto non deve meravigliarci, giacchè, mentre la differenza di potenziale tra due soluzioni dipende specialmente dalla concentrazione e dalla mobilità degli ioni nelle soluzioni stesse, non è possibile di spiegare la differenza di potenziale tra una soluzione ed un gas con un modello così semplice.

Ad ogni modo è interessante l'avere, anche con queste esperienze, constatato che tale differenza di potenziale può, nei casi qui considerati, assumere qualche volta anche valori abbastanza elevati: e non è inutile l'osservare che queste differenze di potenziale devono di frequente presentarsi ed avere probabilmente un'influenza non trascurabile in alcuni fenomeni naturali.

Torino. Istituto di Fisica della R. Università. Maggio 1903.

EFFEMERIDI

del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1904

calcolate dal Dottore VITTORIO BALBI
Astronomo aggiunto all'Osservatorio della R. Università di Torino.

Avvertenza

Queste effemeridi furono calcolate valendosi dei dati della *Connaissance des Temps* di Parigi, del *Nautical Almanac* di Greenwich e del *Berliner Astronomisches Jahrbuch:* delle norme contenute nelle *Istruzioni e tavole numeriche per la compilazione del calendario* del Dott. Michele Rajna (Milano, Hoepli, 1887): e finalmente delle tavole ausiliarie contenute nelle *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1889* del Prof. Francesco Porro (Torino, Loescher, 1888).

Le ore, i minuti ed i secondi sono espressi in tempo medio civile del meridiano di 15° all'Est di quello passante per Greenwich, cioè in *tempo medio civile dell'Europa centrale.*

Posizione Geografica del R. Osservatorio Astronomico di Torino.

Latitudine boreale	45° 4′ 7″.9		
Longitudine da Greenwich	7° 41′ 48″.2	Est	$= 0^h\ 30^m\ 47^s.21$ E
„ da Berlino	5° 41′ 54″.9	Ovest	$= 0^h\ 22^m\ 47^s.66$ W
„ da Parigi	5° 21′ 33″.1	Est	$= 0^h\ 21^m\ 26^s.21$ E
„ da Roma (Coll. Romano)	4° 47′ 5″.3	Ovest	$= 0^h\ 19^m\ 8^s.35$ W
„ da Milano	1° 29′ 41″.1	Ovest	$= 0^h\ 5^m\ 58^s.74$ W
„ dal meridiano dell' Europa centrale . . .	7° 18′ 11″.8	Ovest	$= 0^h\ 29^m\ 12^s.79$ W

Altitudine sul livello del mare (al pozzetto del barometro) $276^m,4$.

PRINCIPALI ARTICOLI DEL CALENDARIO
PER L'ANNO BISESTILE 1904

Relazioni cronologiche.

L'anno 1904, del calendario Gregoriano, stabilito nell'Ottobre 1582, incomincia Venerdì 1° Gennaio e corrisponde all'anno:

6617, del periodo Giuliano;

2680, delle olimpiadi (od al IV anno della 670ª olimpiade) comincia in Luglio 1904, essendo assunta l'êra delle olimpiadi 775,5 anni a. G. C.; ovvero il 1° Luglio dell'anno 3938 del periodo Giuliano;

2657, della fondazione di Roma secondo Varrone;
2651, dell'êra di Nabonassar, fissata il mercoledì 26 Febbraio dell'anno 3967, del periodo Giuliano, o 747 anni avanti G. C. secondo i cronologisti, o 746, secondo gli astronomi;
1904, del calendario Giuliano o russo, il quale comincia 13 giorni più tardi, il 14 Gennaio;
112, del calendario Repubblicano francese, comincia Giovedì 24 Settembre 1903, e l'anno 113, comincia Venerdì 23 Settembre 1904;
5664, dell'êra Israelitica, il quale incomincia Martedì 22 Settembre 1903, e l'anno 5665 comincia il Sabato 10 Settembre 1904;
1321, dell'êra Maomettana (Egira), il quale comincia Lunedì 30 Marzo 1903, e l'anno 1322 comincia Venerdì 18 Marzo 1904, seguendo l'uso di Costantinopoli;
40, del 76° ciclo del calendario Chinese, il quale comincia Giovedì 29 Gennaio 1903, e l'anno 41 comincia Martedì 16 Febbraio 1904.

Computo Ecclesiastico.

Numero d'Oro	5
Epatta	13
Ciclo Solare	9
Indizione Romana	2
Lettera Domenicale	CB

Quattro Tempora.

Di primavera	24, 26 e 27 Febbraio
D'estate	25, 27 e 28 Maggio
D'autunno	21, 23 e 24 Settembre
D'inverno	14, 16 e 17 Dicembre

Feste Mobili.

Settuagesima	31 Gennaio
Le Ceneri	17 Febbraio
Pasqua di Risurrezione	3 Aprile
Rogazioni	9, 10 e 11 Maggio
Ascensione	12 Maggio
Pentecoste	22 Maggio
SS. Trinità	29 Maggio
Corpus Domini	2 Giugno
1ª Domenica dell'Avvento	27 Novembre

ECLISSI

Nell'anno 1904 avranno luogo due Eclissi di Sole, nessuno di Luna.

I. *Eclisse anulare di* Sole: *17 Marzo 1904 invisibile in Italia.*

L'Eclisse sarà visibile nella parte orientale dell'Africa, nel Sud-Est dell'Asia, nell'Oceano Indiano, e nella parte Occidentale del Grande Oceano.

II. *Eclisse totale di* Sole: *9 Settembre 1904 invisibile in Italia.*

L'eclisse sarà visibile nel Grande Oceano e nella parte occidentale dell'America del Sud.

Gennaio 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
1	1	V	8 10	12 32 23,31	16 56	15 44	23 14,6	5 44	14
2	2	S	10	32 51,78	57	16 42	——	6 47	15
3	3	**D**	10	33 19,93	58	17 49	0 15,4	7 46	16
4	4	L	9	33 47,73	59	19 00	1 16,7	8 39	17
5	5	M	9	34 15,16	17 0	20 14	2 16,9	9 25	18
6	6	M	9	34 42,19	1	21 29	3 14,9	10 6	19
7	7	G	9	35 8,80	2	22 41	4 10,1	10 42	20
8	8	V	9	35 34,96	3	23 51	5 3,0	11 14	21
9	9	S	9	36 0,65	4	——	5 54,0	11 47	22
10	10	**D**	8	36 25,85	6	1 0	6 43,9	12 20	23
11	11	L	8	36 50,52	7	2 6	7 33,2	12 54	24
12	12	M	7	37 14,65	8	3 10	8 22,3	13 30	25
13	13	M	7	37 38,18	9	4 11	9 12,0	14 9	26
14	14	G	6	38 1,14	10	5 9	10 1,6	14 52	27
15	15	V	6	38 23,46	12	6 1	10 51,0	15 41	28
16	16	S	5	38 45,14	13	6 49	11 39,7	16 32	29
17	17	**D**	5	39 6,16	14	7 32	12 27,4	17 26	30
18	18	L	4	39 26,47	16	8 9	13 13,8	18 23	1
19	19	M	3	39 46,08	17	8 43	13 58,9	19 20	2
20	20	M	3	40 4,95	18	9 14	14 42,7	20 18	3
21	21	G	2	40 23,09	20	9 42	15 25,6	21 15	4
22	22	V	1	40 40,46	21	10 10	16 8,2	22 14	5
23	23	S	0	40 57,06	22	10 37	16 51,1	23 14	6
24	24	**D**	7 59	41 12,84	24	11 4	17 35,0	——	7
25	25	L	58	41 27,84	25	11 34	18 30,9	0 15	8
26	26	M	57	41 42,02	27	12 8	19 9,2	1 16	9
27	27	M	57	41 55,38	28	12 46	20 1,0	2 19	10
28	28	G	56	42 7,92	29	13 30	20 56,0	3 23	11
29	29	V	54	42 19,44	31	14 22	21 54,3	4 27	12
30	30	S	53	42 30,52	32	15 23	22 54,8	5 27	13
31	31	**D**	52	42 40,56	34	16 32	23 55,9	6 23	14

Fasi della Luna.

3 Luna piena alle $6^h\ 47^m$
9 Ultimo quarto „ $22^h\ 10^m$
17 Luna nuova „ $16^h\ 47^m$
25 Primo quarto „ $21^h\ 41^m$

Il giorno nel mese cresce di $0^h\ 56^m$

4 La Luna è in Perigeo alle 14^h
20 Id. Apogeo „ 0^h

Il Sole entra nel segno *Acquario* il giorno 21 alle ore 11 min. 58.

Febbraio 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
32	1	L	7 51	12 42 49,79	17 35	17 46	——	7 13	15
33	2	M	50	42 58,19	37	19 2	0 56,2	7 57	16
34	3	M	49	43 5,78	38	20 18	1 54,7	8 37	17
35	4	G	47	43 12,54	39	21 33	2 50,9	9 13	18
36	5	V	46	43 18,51	41	22 45	3 45,0	9 48	19
37	6	S	45	43 23,69	42	23 54	4 37,4	10 21	20
38	7	**D**	44	43 28,07	44	——	5 28,6	10 56	21
39	8	L	42	43 31,66	45	1 1	6 19,1	11 31	22
40	9	M	41	43 34,48	47	2 4	7 9,2	12 10	23
41	10	M	39	43 36,51	48	3 3	7 58,9	12 52	24
42	11	G	38	43 37,78	49	3 57	8 48,2	13 38	25
43	12	V	37	43 38,28	51	4 46	9 37,0	14 28	26
44	13	S	35	43 38,02	52	5 31	10 24,7	15 21	27
45	14	**D**	33	43 37,02	54	6 10	11 11,3	16 16	28
46	15	L	32	43 35,27	55	6 45	11 56,6	17 13	29
47	16	M	30	43 32,78	57	7 16	12 40,9	18 11	30
48	17	M	29	43 29,57	58	7 46	13 24,2	19 9	1
49	18	G	27	43 25,63	59	8 14	14 7,0	20 8	2
50	19	V	26	43 20,99	18 1	8 41	14 49,9	21 7	3
51	20	S	24	43 15,66	2	9 8	15 33,3	22 6	4
52	21	**D**	23	43 9,62	4	9 37	16 17,9	23 7	5
53	22	L	21	43 2,91	5	10 9	17 4,4	——	6
54	23	M	20	42 55,53	6	10 44	17 53,3	0 8	7
55	24	M	18	42 47,52	8	11 24	18 45,2	1 10	8
56	25	G	17	42 38,86	9	12 11	19 39,9	2 12	9
57	26	V	15	42 29,59	10	13 5	20 37,0	3 11	10
58	27	S	13	42 19,73	11	14 8	21 36,0	4 7	11
59	28	**D**	12	42 9,27	13	15 17	22 35,3	4 59	12
60	29	L	10	41 58,26	14	16 32	23 34,3	5 45	13

Fasi della Luna.

1 Luna piena alle $17^h\ 33^m$
8 Ultimo quarto „ $10^h\ 56^m$
16 Luna nuova „ $12^h\ 5^m$
24 Primo quarto „ $12^h\ 9^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h\ 22^m$

2 La Luna è in Perigeo alle 1^h
16 Id. Apogeo „ 1^h

Il Sole entra nel segno *Pesci* il giorno 20 alle ore 2 min. 25.

Marzo 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
61	1	M	7 9	12 41 46,71	18 15	17 48	——	6 28	14
62	2	M	7	41 34,64	17	19 4	0 31,9	7 5	15
63	3	G	5	41 22,08	18	20 20	1 28,1	7 41	16
64	4	V	3	41 9,06	19	21 33	2 22,9	8 16	17
65	5	S	1	40 55,59	21	22 44	3 16,6	8 52	18
66	6	**D**	0	40 41,70	22	23 51	4 9,2	9 28	19
67	7	L	6 58	40 27,41	23	——	5 1,6	10 7	20
68	8	M	56	40 11,75	24	0 54	5 52,9	10 50	21
69	9	M	54	39 57,72	26	1 51	6 43,5	11 35	22
70	10	G	52	39 41,34	27	2 42	7 33,1	12 24	23
71	11	V	51	39 26,65	28	3 29	8 21,5	13 16	24
72	12	S	49	39 10,66	30	4 10	9 8,5	14 11	25
73	13	**D**	47	38 54,37	31	4 46	9 54,1	15 7	26
74	14	L	45	38 37,82	32	5 19	10 38,7	16 4	27
75	15	M	43	38 21,01	34	5 49	11 22,3	17 2	28
76	16	M	41	38 3,99	35	6 17	12 5,3	18 1	29
77	17	G	39	37 46,74	36	6 44	12 48,4	18 59	1
78	18	V	37	37 29,30	38	7 12	13 32,0	20 0	2
79	19	S	36	37 11,67	39	7 41	14 16,4	21 1	3
80	20	**D**	34	36 53,88	40	8 11	15 2,5	22 2	4
81	21	L	32	36 35,94	41	8 45	15 50,5	23 4	5
82	22	M	30	36 17,89	43	9 24	16 40,9	——	6
83	23	M	29	35 59,71	44	10 7	17 33,6	0 4	7
84	24	G	26	35 41,44	45	10 58	18 28,3	1 3	8
85	25	V	24	35 23,10	46	11 55	19 24,5	1 59	9
86	26	S	22	35 4,71	48	12 59	20 21,5	2 51	10
87	27	**D**	21	34 46,29	49	14 9	21 18,4	3 47	11
88	28	L	19	34 27,85	50	15 21	22 14,8	4 19	12
89	29	M	17	34 9,43	52	16 36	23 10,5	4 58	13
90	30	M	15	33 51,04	53	17 52	——	5 35	14
91	31	G	13	33 31,72	54	19 6	0 5,5	6 9	15

Fasi della Luna.

2	Luna piena	alle	$3^h\ 48^m$
9	Ultimo quarto	„	$2^h\ 1^m$
17	Luna nuova	„	$6^h\ 39^m$
24	Primo quarto	„	$22^h\ 37^m$
31	Luna piena	„	$13^h\ 44^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h\ 37^m$

1	La Luna è in	Perigeo alle	14^h
14	Id.	Apogeo „	7^h
29	Id.	Perigeo „	23^h

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 21 alle ore 1 min. 59.

Aprile 1904.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE							Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA				
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta		
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m		
92	1	V	6 11	12 33 14,48	18 55	20 19	0 59,9	6 45		16
93	2	S	9	32 56,35	57	21 30	1 54,0	7 22		17
94	3	D	7	32 38,34	58	22 37	2 47,9	8 0		18
95	4	L	6	32 20,49	59	23 38	3 41,3	8 42		19
96	5	M	4	32 2,73	19 0	——	4 33,9	9 27		20
97	6	M	2	31 45,35	2	0 34	5 25,3	10 16		21
98	7	G	0	31 28,10	3	1 24	6 15,3	11 8		22
99	8	V	5 58	31 11,07	4	2 7	7 3,5	12 2		23
100	9	S	56	30 54,30	6	2 46	7 50,0	12 59		24
101	10	D	55	30 37,79	7	3 20	8 35,0	13 56		25
102	11	L	53	30 21,56	8	3 51	9 19,0	14 54		26
103	12	M	51	30 5,64	9	4 19	10 2,2	15 52		27
104	13	M	49	29 50,03	11	4 48	10 45,2	16 50		28
105	14	G	47	29 34,73	12	5 15	11 28,8	17 51		29
106	15	V	46	29 19,79	13	5 43	12 13,2	18 52		30
107	16	S	44	29 5,19	14	6 13	12 59,3	19 53		1
108	17	D	42	28 50,95	16	6 46	13 47,3	20 56		2
109	18	L	41	28 37,09	17	7 23	14 37,6	21 58		3
110	19	M	39	28 23,61	18	8 7	15 30,1	22 59		4
111	20	M	37	28 10,53	19	8 54	16 24,3	23 56		5
112	21	G	35	27 57,85	21	9 49	17 19,7	——		6
113	22	V	34	27 45,59	22	10 50	18 15,5	0 48		7
114	23	S	32	27 33,75	23	11 49	19 11,0	1 36		8
115	24	D	31	27 22,35	24	13 5	20 5,7	2 18		9
116	25	L	29	27 11,41	26	14 18	20 59,7	2 56		10
117	26	M	27	27 0.92	27	15 30	21 53,1	3 32		11
118	27	M	26	26 50,91	28	16 43	22 46,3	4 6		12
119	28	G	24	26 41,39	29	17 56	23 39,5	4 40		13
120	29	V	23	26 32,38	30	19 7	——	5 15		14
121	30	S	21	26 23,89	32	20 17	0 33,1	5 52		15

Fasi della Luna.

7 Ultimo quarto alle 18^h 53^m
15 Luna nuova „ 22^h 53^m
23 Primo quarto „ 5^h 55^m
29 Luna piena „ 23^h 36^m

Il giorno nel mese cresce di 1^h 30^m

10 La Luna è in Apogeo alle 23^h
26 Id. Perigeo „ 20^h

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 20 alle ore 13 min. 42.

Maggio 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
122	1	D	5 20	12 26 15,91	19 33	21 22	1 26,7	6 32	16
123	2	L	18	26 8,49	34	22 22	2 20,6	7 17	17
124	3	M	17	26 1,62	35	23 15	3 13,7	8 4	18
125	4	M	15	25 55,32	37	——	4 5,5	8 56	19
126	5	G	14	25 49,59	38	0 3	4 55,6	9 51	20
127	6	V	12	25 44,42	39	0 44	5 43,6	10 47	21
128	7	S	11	25 39,84	40	1 19	6 29,7	11 45	22
129	8	D	10	25 35,85	42	1 52	7 14,3	12 43	23
130	9	L	9	25 32,45	43	2 21	7 57,7	13 40	24
131	10	M	7	25 29,62	44	2 50	8 40,6	14 39	25
132	11	M	6	25 27,40	45	3 17	9 23,7	15 39	26
133	12	G	5	25 25,76	46	3 44	10 7,6	16 40	27
134	13	V	3	25 24,71	48	4 13	10 53,2	17 41	28
135	14	S	2	25 24,23	49	4 45	11 40,8	18 45	29
136	15	D	1	25 24,33	50	5 21	12 30,9	19 48	1
137	16	L	0	25 25,00	51	6 2	13 23,6	20 50	2
138	17	M	4 59	25 26,24	52	6 49	14 18,5	21 51	3
139	18	M	58	25 28,03	53	7 42	15 14,8	22 46	4
140	19	G	57	25 30,35	54	8 43	16 11,4	23 35	5
141	20	V	56	25 33,21	55	9 48	17 7,4	——	6
142	21	S	55	25 36,59	56	10 56	18 2,3	0 20	7
143	22	D	54	25 40,50	58	12 7	18 55,7	0 59	8
144	23	L	53	25 44,91	59	13 17	19 47,9	1 35	9
145	24	M	52	25 49,81	20 0	14 29	20 39,6	2 8	10
146	25	M	51	25 55,21	1	15 40	21 31,1	2 41	11
147	26	G	51	26 1,10	2	16 50	22 23,1	3 14	12
148	27	V	50	26 7,46	3	17 59	23 15,6	3 48	13
149	28	S	49	26 14,28	3	19 5	——	4 26	14
150	29	D	49	26 21,56	4	20 8	0 8,7	5 5	15
151	30	L	48	26 29,29	5	21 5	1 2,0	5 54	16
152	31	M	47	26 37,46	6	21 55	1 54,6	6 44	17

Fasi della Luna.

7 Ultimo quarto alle $12^h\ 50^m$
15 Luna nuova „ $11^h\ 58^m$
22 Primo quarto „ $11^h\ 19^m$
29 Luna piena „ $9^h\ 55^m$

Il giorno nel mese cresce di $1^h\ 8^m$

8 La Luna è in Apogeo alle 17^h
23 Id. Perigeo „ 0^h

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 21 ad ore 13 min. 29.

Giugno 1904.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE										Età della Luna
			Il SOLE				La LUNA						
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano		tramonta	nasce		passa al meridiano		tramonta		
			h m	h m	s	h m	h	m	h	m	h	m	
153	1	M	4 47	12 26	46,06	20 7	22	40	2	46,0	7	38	18
154	2	G	46	26	55,08	8	23	19	3	35,6	8	34	19
155	3	V	46	27	4,50	9	23	52	4	23,1	9	32	20
156	4	S	45	27	14,31	9	—	—	5	8,7	10	30	21
157	5	D	45	27	24,48	10	0	23	5	52,7	11	29	22
158	6	L	44	27	35,01	11	0	51	6	35,7	12	27	23
159	7	M	44	27	46,87	11	1	19	7	18,4	13	26	24
160	8	M	44	27	57,05	12	1	46	8	1,5	14	26	25
161	9	G	43	28	8,51	13	2	13	8	45,7	15	26	26
162	10	V	43	28	20,25	13	2	44	9	32,0	16	29	27
163	11	S	43	28	32,23	14	3	18	10	20,8	17	33	28
164	12	D	43	28	44,45	14	3	56	11	12,8	18	36	29
165	13	L	43	28	56,85	15	4	40	12	7,5	19	39	30
166	14	M	43	29	9,43	15	5	32	13	4,5	20	37	1
167	15	M	43	29	22,15	16	6	31	14	2,7	21	31	2
168	16	G	43	29	34,98	16	7	36	15	0,7	22	19	3
169	17	V	43	29	47,89	17	8	45	15	57,4	23	0	4
170	18	S	43	30	0,86	17	9	57	16	52,4	23	38	5
171	19	D	43	30	13,87	17	11	9	17	45,5	—	—	6
172	20	L	43	30	26,89	18	12	20	18	37,2	0	12	7
173	21	M	43	30	39,88	18	13	31	19	28,1	0	45	8
174	22	M	44	30	52,84	18	14	50	20	19,0	1	17	9
175	23	G	44	31	5,74	18	15	48	21	10,1	1	50	10
176	24	V	44	31	18,55	18	16	54	22	1,9	2	26	11
177	25	S	44	31	31,26	18	17	57	22	54,0	3	5	12
178	26	D	45	31	43,84	18	18	55	23	46,2	3	48	13
179	27	L	45	31	56,29	18	19	48	—	—	4	36	14
180	28	M	46	32	8,56	18	20	36	0	37,8	5	28	15
181	29	M	46	32	20,66	18	21	17	1	28,0	6	23	16
182	30	G	47	32	32,57	18	21	53	2	16,6	7	20	17

Fasi della Luna.

6 Ultimo quarto alle $6^h\ 53^m$
13 Luna nuova „ $22^h\ 11^m$
20 Primo quarto „ $16^h\ 11^m$
27 Luna piena „ $21^h\ 23^m$

Il giorno nel mese cresce di $0^h\ 12^m$

5 La Luna è in Apogeo alle 12^h
17 Id. Perigeo „ 13^h

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 21 ad ore 21 min. 51.

Luglio 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
183	1	V	4 47	12 32 44,25	20 18	22 24	3 3,2	8 19	18
184	2	S	48	32 55,71	18	22 54	3 48,1	9 17	19
185	3	D	48	33 6,90	17	23 22	4 31,4	10 15	20
186	4	L	49	33 17,82	17	23 48	5 14,0	11 14	21
187	5	M	50	33 28,25	17	——	5 56,5	12 13	22
188	6	M	50	33 38,76	16	0 15	6 39,6	13 12	23
189	7	G	51	33 48,75	16	0 43	7 24,0	14 13	24
190	8	V	52	33 58,38	16	1 10	8 10,8	15 15	25
191	9	S	52	34 7,65	15	1 50	9 0,4	16 18	26
192	10	D	53	34 16,52	15	2 31	9 53,3	17 21	27
193	11	L	54	34 24,98	14	3 19	10 49,3	18 22	28
194	12	M	55	34 33,02	13	4 14	11 47,5	19 19	29
195	13	M	56	34 40,60	13	5 18	12 46,9	20 11	1
196	14	G	57	34 47,71	12	6 27	13 45,9	20 57	2
197	15	V	58	34 54,33	11	7 40	14 43,6	21 35	3
198	16	S	59	35 0,45	11	8 54	15 39,2	22 14	4
199	17	D	59	35 6,04	10	10 8	16 33,0	22 48	5
200	18	L	5 0	35 11,08	9	11 21	17 25,3	23 21	6
201	19	M	1	35 15,57	8	12 31	18 16,6	23 54	7
202	20	M	2	35 19,50	7	13 39	19 7,7	——	8
203	21	G	3	35 22,85	6	14 46	19 58,9	0 29	9
204	22	V	4	35 25,60	5	15 49	20 50,3	1 7	10
205	23	S	5	35 27,82	4	16 49	21 41,7	1 47	11
206	24	D	6	35 29,41	3	17 43	22 32,7	2 32	12
207	25	L	8	35 30,41	2	18 32	23 22,9	3 22	13
208	26	M	9	35 30,83	1	19 14	——	4 16	14
209	27	M	10	35 30,64	0	19 53	0 11,8	5 12	15
210	28	G	11	35 29,85	19 59	20 27	0 58,9	6 9	16
211	29	V	12	35 28,48	58	20 55	1 44,3	7 8	17
212	30	S	13	35 26,50	57	21 25	2 28,3	8 6	18
213	31	D	14	35 23,92	55	21 52	3 11,1	9 4	19

Fasi della Luna.

5 Ultimo quarto alle $23^h\ 54^m$
13 Luna nuova „ $6^h\ 27^m$
19 Primo quarto „ $21^h\ 49^m$
27 Luna piena „ $10^h\ 42^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $0^h\ 50^m$.

3 La Luna è in Apogeo alle 6^h
15 Id. Perigeo „ 5^h
30 Id. Apogeo „ 21^h

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 22 alle ore 8 min. 50.

Agosto 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
214	1	L	5 15	12 35 20,76	19 54	22 19	3 53,4	10 3	20
215	2	M	16	35 17,01	53	22 46	4 35,9	11 1	21
216	3	M	17	35 12,67	52	23 15	5 19,1	12 0	22
217	4	G	18	35 7,75	50	23 48	6 4,0	13 1	23
218	5	V	20	35 2,24	49	——	6 51,1	14 2	24
219	6	S	21	34 56,16	48	0 25	7 41,0	15 3	25
220	7	**D**	22	34 49,50	46	1 8	8 34,2	16 4	26
221	8	L	23	34 42,26	45	1 48	9 30,4	17 3	27
222	9	M	25	34 34,45	43	2 57	10 28,8	17 57	28
223	10	M	26	34 26,09	42	4 4	11 28,1	18 46	29
224	11	G	27	34 17,15	40	5 16	12 27,3	19 30	30
225	12	V	28	34 7,64	39	6 30	13 25,4	20 10	1
226	13	S	29	33 57,57	37	7 46	14 21,8	20 46	2
227	14	**D**	31	33 46,94	36	9 3	15 16,6	21 20	3
228	15	L	32	33 35,71	34	10 17	16 10,2	21 55	4
229	16	M	33	33 24,04	32	11 28	17 2,9	22 30	5
230	17	M	34	33 11,76	31	12 37	17 55,1	23 7	6
231	18	G	35	32 58,96	29	13 41	18 47,1	23 48	7
232	19	V	37	32 45,63	28	14 43	19 38,7	——	8
233	20	S	38	32 31,80	26	15 39	20 29,7	0 32	9
234	21	**D**	39	32 17,47	24	16 29	21 19,8	1 19	10
235	22	L	40	32 2,67	22	17 14	22 8,7	2 11	11
236	23	M	41	31 47,40	21	17 51	22 56,0	3 6	12
237	24	M	43	31 31,70	19	18 28	23 41,9	4 3	13
238	25	G	44	31 15,56	17	18 59	——	5 1	14
239	26	V	45	30 59,01	16	19 28	0 26,2	5 59	15
240	27	S	46	30 42,07	14	19 55	1 9,4	6 57	16
241	28	**D**	47	30 24,74	12	20 23	1 51,8	7 55	17
242	29	L	49	30 7,06	10	20 50	2 34,1	8 53	18
243	30	M	50	29 49,05	8	21 18	3 16,9	9 52	19
244	31	M	51	29 30,72	6	21 49	4 0,7	10 52	20

Fasi della Luna.

4 Ultimo quarto alle 15^h 3^m
11 Luna nuova „ 13^h 58^m
18 Primo quarto „ 5^h 27^m
26 Luna piena „ 2^h 2^m

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 26^m.

12 La Luna è in Perigeo alle 10^h
27 Id. Apogeo „ 5^h

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 23 alle ore 15 min. 37.

Settembre 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
245	1	G	5 52	12 29 12,07	19 5	22 23	4 46,2	11 52	21
246	2	V	53	28 53,16	3	23 3	5 34,0	12 52	22
247	3	S	55	28 33,97	1	23 48	6 24,3	13 51	23
248	4	D	56	28 14,54	18 59	——	7 17,3	14 49	24
249	5	L	57	27 54,87	57	0 41	8 12,9	15 43	25
250	6	M	58	27 35,00	55	1 43	9 10,3	16 33	26
251	7	M	59	27 14,93	54	2 50	10 8,5	17 19	27
252	8	G	6 1	26 54,68	52	4 3	11 6,7	18 0	28
253	9	V	2	26 34,26	50	5 18	12 4,2	18 39	29
254	10	S	3	26 13,68	48	6 38	13 0,7	19 15	1
255	11	D	4	25 52,96	46	7 52	13 56,4	19 51	2
256	12	L	5	25 32,12	44	9 7	14 51,3	20 27	3
257	13	M	6	25 11,16	42	10 20	15 45,7	21 4	4
258	14	M	8	24 50,11	40	11 29	16 39,7	21 45	5
259	15	G	9	24 28,99	39	12 35	17 32,9	22 29	6
260	16	V	10	24 7,80	37	13 34	18 25,2	23 16	7
261	17	S	11	23 46,57	35	14 26	19 16,3	——	8
262	18	D	12	23 25,33	33	15 13	20 5,9	0 7	9
263	19	L	14	23 4,09	31	15 54	20 53,6	1 2	10
264	20	M	15	22 42,87	29	16 29	21 39,7	1 57	11
265	21	M	16	22 21,71	27	17 2	22 24,4	2 55	12
266	22	G	17	22 0,62	25	17 32	23 7,8	3 53	13
267	23	V	19	21 39,62	23	18 0	23 50,5	4 50	14
268	24	S	20	21 18,74	21	18 26	——	5 48	15
269	25	D	21	20 57,99	19	18 53	0 32,9	6 47	16
270	26	L	22	20 37,42	18	19 21	1 15,7	7 46	17
271	27	M	23	20 17,02	16	19 51	1 59,3	8 46	18
272	28	M	25	19 56,84	14	20 24	2 44,2	9 45	19
273	29	G	26	19 36,90	12	21 1	3 31,0	10 45	20
274	30	V	27	19 17,23	10	21 44	4 19,8	11 44	21

Fasi della Luna.

3 Ultimo quarto alle 3^h 59^m

9 Luna nuova „ 21^h 43^m

16 Primo quarto „ 16^h 13^m

24 Luna piena „ 18^h 50^m

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 32^m.

9 La Luna è in Perigeo alle 20^h
23 Id. Apogeo „ 7^h

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 23 alle ore 12 min. 40.

Ottobre 1904.

GIORNO dell'Anno	del Mese	della Settimana	TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
275	1	S	6 28	12 18 57,82	18 8	22 33	5 11,0	12 41	22
276	2	**D**	30	18 38,72	6	23 29	6 4,1	13 35	23
277	3	L	31	18 19,95	4	——	6 58,8	14 26	24
278	4	M	32	18 1,52	2	0 32	7 54,6	15 11	25
279	5	M	33	17 43,45	1	1 40	8 50,8	15 53	26
280	6	G	35	17 25,76	17 59	2 52	9 46,9	16 32	27
281	7	V	36	17 8,48	57	4 7	10 42,8	17 9	28
282	8	S	37	16 51,62	55	5 24	11 38,5	17 43	29
283	9	**D**	38	16 35,18	53	6 40	12 34,1	18 19	1
284	10	L	40	16 19,18	52	7 55	13 29,7	18 57	2
285	11	M	41	16 3,64	50	9 8	14 25,4	19 36	3
286	12	M	42	15 48,57	48	10 17	15 20,8	20 20	4
287	13	G	44	15 33,99	46	11 21	16 15,4	21 7	5
288	14	V	45	15 19,91	44	12 18	17 8,7	21 58	6
289	15	S	46	15 6,35	43	13 9	18 0,0	22 53	7
290	16	**D**	47	14 53,33	41	13 52	18 49,3	23 49	8
291	17	L	49	14 40,87	39	14 31	19 36,4	——	9
292	18	M	50	14 28,98	38	15 4	20 21,6	0 46	10
293	19	M	52	14 17,68	36	15 35	21 5,4	1 44	11
294	20	G	53	14 6,99	34	16 3	21 48,3	2 42	12
295	21	V	54	13 57,54	32	16 30	22 30,7	3 41	13
296	22	S	56	13 47,53	31	16 56	23 13,4	4 40	14
297	23	**D**	57	13 38,79	29	17 24	23 57,0	5 39	15
298	24	L	58	13 30,73	27	17 53	——	6 38	16
299	25	M	7 0	13 23,38	26	18 26	0 41,8	7 38	17
300	26	M	1	13 16,73	24	19 2	1 28,4	8 39	18
301	27	G	2	13 10,83	23	19 42	2 17,0	9 39	19
302	28	V	4	13 5,68	21	20 29	3 7,8	10 37	20
303	29	S	5	13 1,30	20	21 22	4 0,3	11 33	21
304	30	**D**	7	12 57,71	18	22 22	4 53,9	12 23	22
305	31	L	8	12 54,91	17	23 27	5 48,3	13 9	23

Fasi della Luna.

2 Ultimo quarto alle $14^h\ 52^m$
9 Luna nuova „ $6^h\ 25^m$
16 Primo quarto „ $6^h\ 54^m$
24 Luna piena „ $11^h\ 56^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h\ 34^m$.

8 La Luna è in Perigeo alle 7^h
20 Id. Apogeo „ 15^h

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 23 alle ore 21 min. 19.

Novembre 1904.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE								Età della Luna
			Il SOLE				La LUNA				
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano		tramonta	nasce	passa al meridiano		tramonta	
			h m	h m	s	h m	h m	h m		h m	
306	1	M	7 9	12 12	52,91	17 16	——	6	42,7	13 51	24
307	2	M	11	12	51,74	14	0 35	7	36,8	14 30	25
308	3	G	12	12	51,39	13	1 46	8	30,7	15 5	26
309	4	V	13	12	51,87	11	2 59	9	24,4	15 39	27
310	5	S	15	12	53,18	10	4 14	10	18,2	16 13	28
311	6	D	16	12	55,35	9	5 29	11	12,8	16 49	29
312	7	L	18	12	58,34	7	6 43	12	8,1	17 27	30
313	8	M	19	13	2,17	6	7 54	13	4,1	18 8	1
314	9	M	20	13	6,85	5	9 3	14	0,2	18 45	2
315	10	G	22	13	12,36	4	10 4	14	55,5	19 45	3
316	11	V	23	13	18,71	3	11 0	15	49,4	20 39	4
317	12	S	25	13	25,90	1	11 48	16	40,9	21 47	5
318	13	D	26	13	33,91	0	12 29	17	30,1	22 35	6
319	14	L	27	13	42,75	16 59	13 5	18	16,7	23 34	7
320	15	M	29	13	52,43	58	13 37	19	1,5	——	8
321	16	M	30	14	2,94	57	14 5	19	44,7	0 33	9
322	17	G	31	14	14,26	56	14 33	20	27,1	1 31	10
323	18	V	33	14	26,40	56	14 59	21	9,5	2 29	11
324	19	S	34	14	39,35	55	15 26	21	52,6	3 27	12
325	20	D	35	14	53,13	54	15 54	22	36,9	4 27	13
326	21	L	37	15	7,70	53	16 25	23	23,2	5 28	14
327	22	M	38	15	23,07	52	17 0	——		6 29	15
328	23	M	39	15	39,24	52	17 40	0	11,7	7 31	16
329	24	G	41	15	56,18	51	18 25	1	2,6	8 31	17
330	25	V	42	16	13,90	50	19 17	1	55,6	9 28	18
331	26	S	43	16	32,39	50	20 15	2	49,8	10 22	19
332	27	D	44	16	51,69	49	21 18	3	44,8	11 10	20
333	28	L	46	17	11,60	49	22 25	4	39,4	11 53	21
334	29	M	47	17	32,32	48	23 35	5	33,3	12 32	22
335	30	M	48	17	53,73	48	——	6	26,2	13 7	23

Fasi della Luna.

1 Ultimo quarto alle $0^h\ 13^m$
7 Luna nuova „ $16^h\ 37^m$
15 Primo quarto „ $1^h\ 36^m$
23 Luna piena „ $4^h\ 12^m$
30 Ultimo quarto „ $8^h\ 38^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $1^h\ 9^m$.

5 La Luna è in Perigeo alle 13^h
17 Id. Apogeo „ 8^h

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 22 ad ore 18 min. 16.

Dicembre 1904.

GIORNO			TEMPO MEDIO DELL'EUROPA CENTRALE							Età della Luna
			Il SOLE			La LUNA				
dell'Anno	del Mese	della Settimana	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta		
			h m	h m s	h m	h m	h m	h m		
336	1	G	7 49	12 18 15,84	16 47	0 46	7 18,3	13 41		24
337	2	V	50	18 38,62	47	2 8	8 10,2	14 14		25
338	3	S	51	19 2,04	47	3 10	9 2,5	14 46		26
339	4	**D**	52	19 26,09	46	4 22	9 55,6	15 22		27
340	5	L	53	19 50,73	46	5 33	10 49,8	16 0		28
341	6	M	55	20 15,93	46	6 42	11 45,0	16 43		29
342	7	M	56	20 41,65	46	7 48	12 40,5	17 31		1
343	8	G	57	21 7,88	46	8 47	13 34,5	18 25		2
344	9	V	58	21 34,58	46	9 39	14 29,1	19 21		3
345	10	S	59	22 1,72	46	10 24	15 20,3	20 20		4
346	11	**D**	59	22 29,27	46	11 4	16 9,1	21 19		5
347	12	L	8 0	22 57,17	46	11 38	16 55,3	22 19		6
348	13	M	1	23 25,42	46	12 8	17 39,6	23 18		7
349	14	M	2	23 53,98	46	12 38	18 22,4	——		8
350	15	G	3	24 22,80	46	13 2	19 4,6	0 17		9
351	16	V	3	24 51,87	46	13 28	19 47,0	1 15		10
352	17	S	4	25 21,14	47	13 56	20 30,4	2 14		11
353	18	**D**	5	25 50,60	47	14 25	21 15,3	3 14		12
354	19	L	5	26 20,21	47	14 57	22 2,7	4 15		13
355	20	M	6	26 49,91	48	15 34	22 52,7	5 16		14
356	21	M	6	27 19,70	48	16 18	23 45,5	6 18		15
357	22	G	7	27 49,54	49	17 7	——	7 18		16
358	23	V	7	28 19,41	49	18 4	0 40,5	8 14		17
359	24	S	8	28 49,27	50	19 7	1 36,8	9 6		18
360	25	**D**	8	29 19,08	50	20 16	2 33,3	9 53		19
361	26	L	9	29 48,83	51	21 26	3 28,9	10 34		20
362	27	M	9	30 19,50	51	22 37	4 23,2	11 11		21
363	28	M	9	30 48,02	52	23 48	5 16,0	11 45		22
364	29	G	9	31 17,38	53	——	6 7,8	12 18		23
365	30	V	9	31 46,57	54	1 0	6 59,1	12 50		24
366	31	S	9	32 15,52	55	2 10	7 50,6	13 23		25

Fasi della Luna.

7 Luna nuova alle $4^h\ 46^m$

14 Primo quarto „ $23^h\ 7^m$

22 Luna piena „ $19^h\ 1^m$

29 Ultimo quarto „ $16^h\ 46^m$

Il giorno nel mese diminuisce di $0^h\ 14^m$.

3 La Luna è in Perigeo alle 1^h
15 Id. Apogeo „ 5^h
27 Id. Perigeo „ 18^h

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 22 alle ore 7 min. 14.

Effemeridi d

calcolate per l'orizzonte di Torino in tem

dal dr. VITTORIO BAL

GIORNO		Mercurio ☿			Venere ♀			Marte ♂		
		Nasce	Passa al meridiano	Tramonta	Nasce	Passa al meridiano	Tramonta	Nasce	Passa al meridiano	Tramonta
		h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h
Gennaio	1	10 26	14 57	19 28	4 34	9 27	14 20	10 14	15 4	19
	11	8 42	13 27	18 12	4 54	9 35	14 16	9 54	14 56	19
	21	7 16	12 0	16 44	5 14	9 46	14 18	9 33	14 47	20
Febbraio	1	6 27	11 4	15 41	5 31	9 59	14 27	9 3	14 36	20
	11	6 23	10 58	15 33	5 43	10 12	14 41	8 44	14 25	20
	21	6 29	11 11	15 54	5 47	10 24	15 1	8 21	14 14	20
Marzo	1	6 32	11 29	16 27	5 48	10 35	15 22	8 8	14 4	20
	11	6 31	11 52	17 14	5 44	10 45	15 47	7 36	13 53	20
	21	6 28	12 20	18 14	5 36	10 53	16 10	7 11	13 41	20
Aprile	1	6 27	12 56	19 27	5 24	11 1	16 38	6 46	13 29	20
	11	6 21	13 28	20 36	5 11	11 7	17 3	6 23	13 17	20
	21	6 12	13 44	21 17	4 58	11 13	17 28	6 1	13 6	20
Maggio	1	5 50	13 27	21 4	4 45	11 19	17 54	5 40	12 56	20
	11	5 16	12 38	19 59	4 32	11 26	18 21	5 20	12 45	20
	21	4 39	11 41	18 43	4 23	11 34	18 46	5 2	12 35	20
Giugno	1	4 1	11 1	18 1	4 17	11 45	19 14	4 45	12 25	20
	11	3 40	10 53	18 7	4 16	11 56	19 37	4 30	12 15	20
	21	3 35	11 8	18 43	4 23	12 10	19 57	4 16	12 5	19
Luglio	1	3 58	11 49	19 40	4 37	12 25	20 13	4 4	11 55	19
	11	4 54	12 43	20 32	4 55	12 39	20 23	3 56	11 45	19
	21	6 1	13 29	20 55	5 18	12 52	20 25	3 51	11 35	19
Agosto	1	7 5	14 0	20 53	5 46	13 4	20 21	3 41	11 23	19
	11	7 45	14 12	20 38	6 12	13 13	20 13	3 34	11 11	18
	21	8 8	14 11	20 13	6 41	13 21	20 0	3 29	10 59	18
Settembre . . .	1	8 1	13 47	19 32	7 [illegible]	13 27	19 44	3 22	10 44	18
	11	7 2	12 53	18 45	7 34	13 32	19 29	3 17	10 30	17
	21	5 26	11 43	18 1	8 2	13 39	19 15	3 11	10 16	17
Ottobre	1	4 52	11 15	17 37	8 28	13 45	19 1	3 5	10 0	16
	11	5 25	11 28	17 30	8 55	13 53	18 50	2 58	9 44	16
	21	6 17	11 51	17 24	9 23	14 3	18 43	2 51	9 28	16
Novembre . . .	1	7 14	12 16	17 17	9 52	14 16	18 40	2 44	9 10	15
	11	8 0	12 39	17 17	10 15	14 30	18 46	2 35	8 52	15
	21	8 44	13 4	17 24	10 33	14 44	18 55	2 27	8 34	15
Dicembre	1	9 20	13 30	17 40	10 44	14 59	19 14	2 18	8 16	14
	11	9 40	13 51	18 2	10 46	15 11	19 36	2 9	7 58	13
	21	9 22	13 45	18 8	10 43	15 22	20 1	1 58	7 39	13

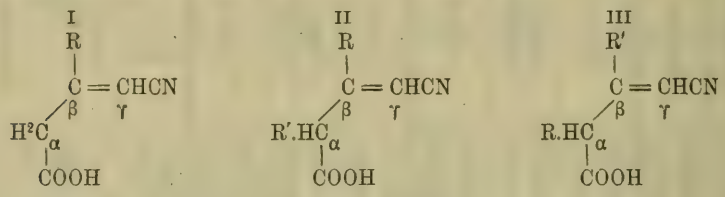
neti principali
dio dell' Europa centrale, per l'anno 1904.
ronomo aggiunto.

Giove ♃			Saturno ♄			Urano ♅			Nettuno ♆		
sce	Passa al meridiano	Tramonta	Nasce	Passa al meridiano	Tramonta	Nasce	Passa al meridiano	Tramonta	Nasce	Passa al meridiano	Tramonta
m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
29	17 7	22 45	9 50	14 33	19 16	7 17	11 36	16 55	16 23	0 12	7 52
53	16 34	22 15	9 14	13 58	18 42	6 40	10 59	15 18	15 47	23 27	7 10
17	16 1	21 45	8 38	13 23	18 8	6 3	10 22	14 41	15 7	22 47	6 31
38	15 26	21 14	8 0	12 46	17 33	5 22	9 41	14 0	14 22	22 2	5 46
4	14 55	20 46	7 22	12 11	17 0	4 45	9 4	13 23	13 42	21 22	5 6
28	14 23	20 18	6 46	11 36	16 26	4 7	8 26	12 45	13 2	20 42	4 26
58	13 56	19 54	6 14	11 5	15 56	3 33	7 52	12 11	12 26	20 6	3 50
23	13 25	19 27	5 37	10 30	15 23	2 55	7 14	11 33	11 47	19 27	3 11
49	12 55	19 1	5 1	9 55	14 49	2 16	6 35	10 54	11 8	18 48	2 32
11	12 21	18 31	4 17	9 12	14 7	1 34	5 53	10 12	10 25	18 5	1 49
37	11 51	18 5	3 44	8 40	13 36	0 54	5 13	9 32	9 45	17 26	1 10
2	11 20	17 38	3 6	8 3	13 0	0 14	4 33	8 52	9 7	16 48	0 32
28	10 49	17 10	2 28	7 26	12 24	23 30	3 53	8 12	8 28	16 9	23 50
53	10 18	16 43	1 49	6 48	11 47	22 50	3 13	7 32	7 50	15 31	23 12
19	9 47	16 15	1 11	6 10	11 9	22 9	2 32	6 51	7 12	14 53	22 34
41	9 12	15 43	0 28	5 27	10 26	21 24	1 47	6 6	6 31	14 11	21 51
6	8 40	15 14	23 46	4 47	9 45	20 43	1 6	5 25	5 53	13 33	21 13
30	8 7	14 44	23 5	4 7	9 5	20 2	0 25	4 44	5 16	12 56	20 36
54	7 33	14 12	22 25	3 27	8 24	19 21	23 40	4 2	4 38	12 18	19 58
18	6 59	13 40	21 45	2 45	7 41	18 40	22 59	3 22	4 0	11 40	19 20
38	6 24	13 6	21 4	2 3	6 58	17 59	22 18	2 41	3 22	11 2	18 42
57	5 44	12 27	20 19	1 17	6 11	17 15	21 34	1 57	2 37	10 17	17 57
19	5 6	11 50	19 38	0 35	5 28	16 34	20 53	1 16	2 3	9 43	17 22
41	4 28	11 11	18 57	23 49	4 45	15 54	20 13	0 36	1 25	9 5	16 45
56	3 44	10 27	18 11	23 2	3 57	15 11	19 30	23 49	0 43	8 23	16 3
16	3 2	9 44	17 31	22 21	3 15	14 31	18 50	23 9	0 4	7 44	15 24
34	2 20	9 1	16 50	21 39	2 32	13 52	18 11	22 30	23 21	7 5	14 45
53	1 36	8 15	16 9	20 58	1 51	13 14	17 33	21 52	22 42	6 26	14 6
1	0 52	7 29	15 29	20 18	1 11	12 36	16 55	21 14	22 3	5 47	13 27
8	0 8	6 43	14 50	19 39	0 32	11 58	16 17	20 35	21 24	5 8	12 48
2	23 15	5 51	14 6	18 55	23 44	11 17	15 36	19 55	20 40	4 24	12 4
0	22 31	5 6	13 29	18 18	23 7	10 39	14 58	19 17	20 0	3 44	11 24
8	21 48	4 22	12 51	17 41	22 31	10 2	14 21	18 40	19 20	3 4	10 44
7	21 6	3 40	12 13	17 4	21 55	9 25	13 44	18 3	18 40	2 24	10 4
7	20 26	2 59	11 35	16 27	21 19	8 49	13 8	17 27	17 59	1 43	9 23
8	19 47	2 19	10 59	15 52	20 45	8 12	12 31	16 50	17 19	1 3	8 43

Acidi 1.2 diidroftalici esasostituiti.

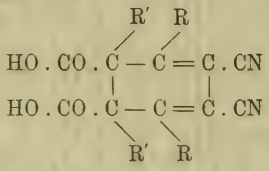
Nota preliminare del Socio ICILIO GUARESCHI.

Già da alcuni anni io ho preparato una serie di nuovi acidi γcianvinilacetici mono e bialchilici della forma:

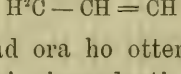


che descriverò in una prossima memoria.

Gli acidi βmonoalchilici (I) per l'azione del $FeCl^3$ si colorano in violetto o in azzurro, ecc.; invece gli acidi αβdialchilici si colorano fugacemente col cloruro ferrico, poi dànno un precipitato bianco cristallino, ed il sale ferrico rimane ridotto allo stato di sale ferroso. I nuovi acidi che si formano, stabilissimi, hanno la composizione:



Si possono denominare *acidi 1.2.3.6.tetraalchil-4.5.dicianortodiidroftalici*; e corrispondono ad un nucleo *ortodiidroftalico* o meglio ad un *ortodiidrobenzene* o *cicloessadiene*:



Gli acidi che sino ad ora ho ottenuto derivano dagli acidi αβdialchilγcianvinilacetici rispondenti alla forma (II) in cui $R = CH^3$ ed $R' = CH^3$, C^2H^5, C^3H^7, ecc.

È questo un elegante e semplice metodo di sintesi di composti ortodiidroaromatici sul quale mi intratterrò quando in un'altra nota descriverò i composti che qui ora ho voluto solamente accennare, per prender data, essendo occupato anche in altre ricerche.

Torino, 23 maggio 1903. R. Università.

Metodo grafico di calcolo degli alberi a gomito con più di due appoggi.

Nota dell'Ing. Prof. ELIA OVAZZA.

(Con una Tavola).

1. — La sconoscenza di un metodo comodo per il calcolo di stabilità degli alberi a gomito con più di due appoggi porta sovente ad assumere ipotesi troppo lontane dalla realtà ovvero ad operare a buon senso, onde è dubbio se sieno soddisfatte le condizioni di sicurezza contro eccessivi sforzi, contro eccessive deformazioni e contro riscaldi eccessivi, condizioni che con quella della economia sono tutte essenziali quando si tratta di organi resistenti in movimento. Per altro è dimostrato mercè faticosi calcoli (*) che non lievi errori si commettono non solo quando per semplificare si suppone sciolta sopra i sopporti la continuità dell'albero, per modo che vi si annulli la resistenza a flessione, ma pure quando, sobbarcandosi all'onere di calcoli non semplici, si parte dalla equazione dei tre momenti per travi rettilinee, come consiglia taluno, illuso circa la applicabilità di questa equazione.

Avendo dovuto, per la risoluzione in linea tecnica di certa controversia, valutare la deformazione di alberi a gomito staticamente determinati, chi scrive ebbe pôrta l'occasione d'immaginare un metodo grafico facile per il calcolo della stabilità degli alberi a gomito con più di due appoggi, estendendo il noto procedimento Culmann-Ritter per lo studio delle travi continue, che qui supponesi noto al lettore (**). La esposizione di tal metodo di calcolo e la sua applicazione, fatta per modo da mettere in risalto l'entità degli errori che con esso senza difficoltà si evitano di commettere, è l'argomento della presente nota.

(*) Cfr. Max Enssling, *Mehrmals gelagerte Kurbelwellen mit einfacher und doppelter Kröpfung.* Stuttgart, Kröner, 1902.

(**) Al riguardo qui seguiamo tutte le notazioni e denominazioni adottate dal Prof. C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, Parte 2ª. Torino, Camilla e Bertolero.

Deformazioni di alberi a gomito con due soli sopporti.

2. — Consideriamo anzitutto un albero con due soli sopporti ed un solo gomito con braccia rettilinee normali all'asse di rotazione, comunque carico da *forze agenti normalmente al piano* π *della fibra media* $A_1C_1D_1D_2C_2A_2$.

Per concretare le idee, il piano π suppongasi normale al piano del foglio, paralleli al quale sieno i carichi e perciò le reazioni d'appoggio.

Per le varie sezioni dei tronchi A_1C_1, D_1D_2, C_2A_2 (fig. 1ª), aventi assi nella direzione dell'asse di rotazione, i momenti flettenti come gli sforzi di taglio hanno quei medesimi valori che avrebbero qualora il tronco D_1D_2 fosse in C_1C_2 a formare coi tronchi A_1C_1 e C_2A_2 un albero ad asse rettilineo — *trave diritta* — ed i carichi fossero trasportati sulle loro proiezioni sopra il piano del foglio. I diagrammi di tali sollecitazioni si tracciano in modo noto, o per integrazioni successive ovvero mediante funicolari.

Detti T_1 ed M_1 lo sforzo di taglio ed il momento flettente per la sezione C_1 di tale *trave diritta*, sarà T_1 sforzo di taglio ed M_1 momento torcente per tutte le sezioni trasversali del braccio C_1D_1 del gomito; analogamente sforzo di taglio T_2 e momento flettente M_2 per la sezione C_2 della trave diritta immaginata sono sforzo di taglio e momento torcente per tutte le sezioni del braccio C_2D_2.

Si determinino gli angoli Φ_1' e Φ_2' di cui per torsione ruotano la sezione D_1 rispetto alla C_1 del braccio C_1D_1 e la sezione C_2 rispetto alla D_2 del braccio C_2D_2; si tracci della trave diritta $A_1C_1C_2A_2$ la linea elastica l. Spezzata questa linea l in C_1 e C_2, se ne girino di Φ_1' e di Φ_2' attorno a C_1 e C_2 rispettivamente i tronchi A_1A_1 ed A_2C_2, portando i centri di appoggio, B_1, B_2, al dislivello voluto; evidentemente la linea spezzata l' che così risulta è proiezione, sopra il piano del foglio, della fibra media deformata dell'albero a gomito, con la quale proiezione si confonde per gli archi estremi A_1C_1 ed A_2C_2.

3. — Per ottenere direttamente la linea l' coi suoi punti angolosi, C_1 e C_2, basterà nello applicare il metodo di Mohr

per tracciare la linea elastica l, oltre i carichi elastici ripartiti di cui la linea l è funicolare, immaginare *concentrati* in C_1 e C_2 *due carichi elastici* P_1' e P_2' che misurino le forze $H\Phi_1'$ ed $H\Phi_2'$ rispettivamente, quando H sia la tensione orizzontale del *secondo poligono funicolare* e Φ_1', Φ_2' si misurino nella scala in cui risultano rappresentate le *inclinazioni* della l dietro la scelta fatta delle singole basi di operazione.

Le rotazioni Φ_1' e Φ_2' hanno per effetto di produrre in C_1 e C_2 nella curva l' angoli la cui concavità è rivolta nel verso stesso della concavità che la linea l piglia ivi per i momenti flettenti M_1 ed M_2; quindi *i carichi elastici* P_1' *e* P_2' *dovranno avere i medesimi versi dei carichi elastici infinitesimi* misuranti le aree delle *adiacenti* striscie infinitesime del diagramma delle curvature; con ciò non si lascia adito ad ambiguità, perchè se segni opposti corrispondessero alle striscie infinitesime adiacenti da parti opposte di C_1, per es., sarebbe nullo M_1 e quindi Φ_1' e perciò anche P_1'.

Se, com' è o può supporsi sovente, le braccia della manovella a gomito sono prismatiche (*) ed abbastanza corte per rispetto alle loro dimensioni trasversali, sicchè sia ammissibile che per torsione non se ne ingobbino le sezioni trasversali, detta R la lunghezza comune dei due bracci (raggio della manovella a gomito), G il modulo di elasticità tangenziale, J_1 il momento d'inerzia polare della sezione trasversale rispetto al proprio baricentro, si ha:

$$\Phi_1' = \frac{M_1 R}{G J_1}, \qquad \Phi_2' = \frac{M_2 R}{G J_1}. \tag{1}$$

Detto E il modulo di elasticità normale, I_0 il momento d'inerzia di riferimento pel tracciamento della linea elastica l, dette λ la base di riduzione dei momenti, q_1 e q_2 le misure dei momenti M_1 ed M_2 in unità di forza, posto

$$G = \beta E \tag{2}$$

$$J_1 = \theta I_0 = \theta abc \Sigma z_0''', \tag{3}$$

è:

$$M_1 = q_1 \lambda \qquad M_2 = q_2 \lambda, \tag{4}$$

(*) È ovvia la modificazione da introdursi in caso diverso.

e quindi dovrà essere:

$$(5) \qquad P_1 = H\Phi_1' = H\frac{\lambda q_1 R}{\beta Eabc\theta\Sigma z_0'''}, \qquad P_2 = H\frac{\lambda q_2 R}{\beta Eabc\theta\Sigma z_0'''}.$$

Assunte per basi:

$$(6) \qquad \lambda = \frac{c\Sigma z_0'''}{1^m};$$

$$(7) \qquad H = Eab$$

per ottenere le ordinate della linea elastica nella stessa scala delle ascisse, fatto:

$$(8) \qquad \beta\theta = \alpha_1,$$

dovrà essere:

$$(9) \qquad P_1' = q_1\frac{R}{\alpha_1 . 1^m}, \qquad P_2' = q_2\frac{R}{\alpha_1 . 1^m}.$$

Ne segue che, comunque siensi scelte le basi di operazione per esagerare le ordinate rispetto alle ascisse, basterà immaginare sul diagramma dei momenti flettenti sovraposto un rettangolo lungo R ed alto la ordinata misurante q_1, ridurne l'altezza nel rapporto α_1 come se se ne volesse dedurre un tratto di diagramma delle curvature; la misura del rettangolo così risultante, *concentrata* sulla verticale di C_1, sarà il carico elastico P_1'; analogamente dicasi per P_2'.

4. — Supponiamo ora che *le forze esterne* caricanti l'albero *sieno parallele al piano* π *della fibra media*, coincidente col piano del foglio (fig. 2ª).

Ancora non variano gli sforzi di taglio ed i momenti flettenti delle singole sezioni dei tronchi A_1C_1, D_1D_2, C_2A_2 (i cui assi han la direzione dell'asse di rotazione), quando il tronco D_1D_2 si sposti in C_1C_2 a formare con gli altri tronchi A_1C_1 e C_2A_2 una trave rettilinea — la *trave diritta* — ed i carichi si trasportino sulle loro proiezioni sopra il piano del foglio; invece lo sforzo di taglio T_1 per la sezione C_1 di tale trave diritta è sforzo normale per tutte le sezioni trasversali del braccio C_1D_1 (di tensione o di pressione secondo che il gomito è dall'una ovvero dall'altra parte dell'asse A_1A_2), ed il momento flettente

M_1 per la stessa sezione C_1 è momento flettente per tutte le sezioni del braccio C_1D_1; analogamente sforzo tagliante T_2 e momento flettente M_2 della sezione C_2 della trave diritta sono sforzo normale e momento flettente per tutte le sezioni del braccio C_2D_2.

5. — Tracciata la linea elastica l per la trave diritta $A_1C_1C_2A_2$, si calcolino gli angoli Φ_1'' e Φ_2'' di cui ruotano una rispetto all'altra le sezioni estreme dei bracci C_1D_1 e C_2D_2; spezzata la linea l in C_1 e C_2, se ne girino i tronchi esterni A_1C_1 ed A_2C_2 attorno a C_1 e C_2 di Φ_1'' e Φ_2'' rispettivamente, riportando ad un tempo i centri di appoggio B_1 e B_2 ai dovuti livelli; la linea l' che risulta si confonderà per gli archi suoi esterni A_1C_1 e C_2A_2 con la linea elastica dell'albero a gomito.

Nelle fatte ipotesi, detto I_1 il momento d'inerzia della sezione trasversale dei bracci rispetto all'asse baricentrico normale al piano π (qui piano del foglio), sarà

$$\Phi_1'' = \frac{M_1 R}{EI_1}, \quad \Phi_2'' = \frac{M_2 R}{EI_2}. \tag{10}$$

Se ora osservasi che, comunque si trovi il gomito rispetto all'asse di rotazione (al di sopra o al di sotto in figura), le rotazioni Φ_1'' e Φ_2'' hanno per effetto di produrre in C_1 e C_2 nella curva l' angoli con la concavità rivolta nel verso stesso della concavità che la linea elastica l soffre in C_1 e C_2 pei momenti flettenti M_1 ed M_2, concludesi, come già a numero 3, che per ottenere direttamente la curva l' basta, procedendo col metodo Mohr come per ottenere la linea elastica l, aggiungere in C_1 e C_2 *due carichi elastici concentrati* P_1'' e P_2'' che misurino rispettivamente i prodotti $H\Phi_1''$ ed $H\Phi_2''$ (quando H sia la tensione orizzontale della seconda funicolare e Φ_1'' e Φ_2'' si misurino nella scala delle *inclinazioni*, dipendente dalla scelta fatta delle basi di operazione), dando ai carichi elastici P_1'' e P_2'' *i versi dei carichi elastici infinitesimi* misuranti le aree delle striscie infinitesime del diagramma delle *curvature* della trave diritta. *adiacenti* alle ordinate corrispondenti alle sezioni C_1 e C_2 rispettivamente. Con ciò non lasciamo ambiguità di verso per le ragioni dette a numero 3.

Fatto:

$$I_1 = \alpha_2 I_0 \tag{11}$$

con le notazioni e posizioni a numero 3, si ha:

$$P_1'' = q_1 \frac{R}{\alpha_2 . 1^m}, \quad P_2'' = q_2 \frac{R}{\alpha_2 . 1^m}. \tag{12}$$

6. — Più in generale, supposte le forze esterne ancora parallele al piano del foglio, e su questo piano l'asse A_1A_2, *il piano* π *della fibra media* dell'albero a gomito *sia inclinato* dell'angolo Ψ *al piano del foglio.*

Il momento flettente M_1 per la sezione C_1 *della trave diritta*, ottenuta trasportando il tronco D_1D_2 in C_1C_2, equivale al complesso del momento torcente $M_1 \operatorname{sen} \Psi$ e del momento flettente $M_1 \cos \Psi$, costanti per tutte le sezioni trasversali del braccio C_1D_1, essendo per quest'ultimo momento asse di flessione la baricentrica normale al piano π. Il momento torcente per la sezione C_1 della *trave diritta* contribuisce a costituire momento flettente per dette sezioni del braccio C_1D_1 con asse di flessione parallelo all'asse di rotazione; questo momento flettente va variando da sezione a sezione del braccio, ma a noi non occorre di considerarlo, perchè dei tronchi A_1C_1, D_1D_2, C_2A_2 non produce che rotazioni attorno ai loro assi, che non influiscono sulla forma delle loro linee elastiche.

Applicando il principio della sovraposizione degli effetti, troviamo che i momenti $M_1 \operatorname{sen} \Psi$ ed $M_1 \cos \Psi$ producono rotazioni misurate rispettivamente da

$$\Phi_1' \operatorname{sen} \Psi \quad \text{e} \quad \Phi_1'' \cos \Psi$$

attorno all'asse del braccio C_1D_1 ed alla normale per C_1 al piano π; onde risulta una rotazione attorno all'asse in C_1 normale al piano del foglio:

$$\Phi_1 = \Phi_1' \operatorname{sen} \Psi + \Phi_1'' \cos \Psi = \frac{M_1 R}{E I_0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \Psi}{\alpha_1} + \frac{\cos^2 \Psi}{\alpha_2} \right). \tag{13}$$

Attorno all'asse in C_2 normale al piano del foglio avrassi un'analoga rotazione

$$\Phi_2 = \frac{M_2 R}{E I_0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \Psi}{\alpha_1} + \frac{\cos^2 \Psi}{\alpha_2} \right). \tag{14}$$

E di tali rotazioni terremo conto direttamente quando, applicando il metodo di Mohr come per dedurre la linea elastica l della *trave diritta*, si aggiungano in C_1 e C_2 *due carichi elastici concentrati*, che con le solite notazioni e posizioni sieno misurati da

$$P_1 = q_1 \frac{R}{\alpha . 1^m}, \quad P_2 = q_2 \frac{R}{\alpha . 1^m}, \tag{15}$$

essendo:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \Psi}{\alpha_1} + \frac{\cos^2 \Psi}{\alpha_2}. \tag{16}$$

Le (9) e (12) sono comprese in queste (15) e (16).

7. — È facile estendere quanto fu detto al caso in cui *l'albero sia provvisto di più gomiti*, ma soggetto sempre a forze dirette secondo una stessa normale all'asse di rotazione.

Spostati idealmente i colli $D_1 D_2$ (fig. 4ª) delle singole manovelle a gomito fino ai piedi C_1 e C_2 delle loro braccia, formando così un'unica trave rettilinea — *la trave diritta* —, se ne traccierà il diagramma dei momenti flettenti; dalla ordinata q di tal diagramma per ogni sezione C, fra le varie C_1 e C_2, si ricaverà il corrispondente *carico elastico* P mediante le (15) e (16) o le più semplici (9) e (12), quando ne sia il caso; indi si procederà col metodo di Mohr aggiungendo tali carichi elastici concentrati P nei punti C ai carichi elastici ripartiti la cui funicolare costituirebbe la curva elastica l della trave diritta. E così direttamente si ottiene la curva l' coincidente, pei tratti di albero compresi fra i successivi gomiti, colla linea elastica dell'albero a gomito o la sua proiezione sul piano delle forze, quando, ben inteso, si portino i centri di appoggio ai dovuti livelli.

8. — Quando le forze esterne, pure essendo normali all'asse di rotazione, abbiano direzioni differenti, converrà considerare separatamente quelle aventi direzione comune, e poi dalle deformazioni parziali risalire alle totali, applicando il principio della sovraposizione degli effetti.

9. — Sopra casi speciali è facile verificare che le rotazioni Φ_1 e Φ_2 facilmente assumono grandezze notevoli rispetto a quelle che soffrirebbero le sezioni della trave diritta da noi immagi-

nata per artifizio di calcolo, anche qualora, per tener conto delle solidarietà delle braccia con le parti contigue dell'albero, si riduca la lunghezza R opportunamente, p. es. della media aritmetica dei raggi di dette parti (*). Tutt'altro che trascurabile è quindi l'influenza dei gomiti sulla deformazione dell'albero, epperciò sulle anomalie di accoppiamento fra gli organi di trasmissione ed i conseguenti logoramenti e riscaldi. E quindi ancora è prevedibile che ad errori gravissimi si è condotti applicando le formole valevoli solo per travi rettilinee al calcolo di stabilità di alberi a gomito con più di due appoggi, la cui statica indeterminazione richiede appunto la considerazione delle deformazioni elastiche, tenuto conto delle condizioni di sostegno.

Alberi a gomito con più di due appoggi.

10. — Supporremo ancora tutte le forze esterne con *direzione comune* normale all'asse di rotazione dell'albero e, per concretare le idee, parallele al piano del foglio, su cui si trovi detto asse.

Al solito immaginiamo i colli dei singoli gomiti trasportati ai piedi delle relative braccia, sicchè risulti, astraendo da dette braccia, una trave rettilinea — la *trave diritta* —; di più ogni

---

(*) Sieno, per esempio, rettangolari (fig. 3ª) le sezioni trasversali con lato 12 cm. parallelo all'asse di rotazione, di 24 cm. normale; del resto la sezione sia circolare di diametro 20 cm. Al gomito, con braccia equidistanti $c = 20^{cm}$ dagli appoggi prossimi, sia applicato un carico $Q = 12$ tonn. Distanza dei centri d'appoggio: $2a = 70^{cm}$; $R = 38^{cm}$, $E = 2400\ ^{ton}/_{cm^2}$, $G = \frac{10}{26} E = 923\ ^{ton}/_{cm^2}$. Riduciamo R a 18^{cm} per quanto fu detto, esagerando a sfavore della nostra tesi. Si ha:

$$I_0 = 9840\ ^{cm^4}, \qquad I_1 = 3456^{cm^4}, \qquad J_1 = 5I_1 = 17280^{cm^4}.$$

Onde:

$$\Phi_1' = \Phi_2' = \frac{QcR}{2GJ_1} = 0{,}000135\,, \qquad \Phi_1'' = \Phi_2'' = \frac{QcR}{2EI_1} = 0{,}000260.$$

Trascurando, sempre a sfavore di nostra tesi, la ripartizione del carico Q e delle reazioni di appoggio sui corrispondenti perni, le sezioni estreme della trave *diritta* ruoterebbero di:

$$\Theta = \frac{Qa^2}{4EI_0} = 0{,}000138 = \sim \Phi_1' = \sim \frac{1}{2}\,\Phi_1''.$$

forza esterna si immagini trasportata sulla propria proiezione sopra il piano del foglio. I momenti flettenti e gli sforzi taglianti, per le singole sezioni trasversali della trave diritta risultante, coincidono con quelli che le stesse sezioni hanno nell'albero a gomito, ma, per quanto fu detto, la linea elastica l per una campata qualunque della trave diritta differisce dalla l' per la corrispondente campata dell'albero a gomito per altrettanti punti angolosi ai punti C, dovuti alle rotazioni Φ che si originano per flessione o torsione o flessione e torsione delle corrispondenti braccia CD.

11. — La trave diritta suppongasi *di sezione costante.* Quando fosse noto il diagramma dei momenti flettenti per caduna campata, procedendo col metodo di Mohr, si otterrebbe la linea l', anzichè la l, qualora, oltre ai carichi elastici infinitesimi susseguentisi con continuità di cui la l è funicolare, si considerino ai singoli punti C applicati i noti *carichi elastici concentrati*

$$P = q \frac{R}{\alpha . 1^m}, \tag{17}$$

detta q la misura del momento flettente in C per la trave diritta e conservando per altro le già assunte notazioni.

Ora considerando, come nel procedimento Culmann-Ritter, per ogni campata B_1B_2 il diagramma del momento flettente (tratteggiato in fig. 5ª), comune per la trave diritta e per l'albero a gomito (esclusine i bracci dei gomiti), qual differenza fra la *superficie semplice dei momenti* ed il *trapezio* avente per ordinate estreme le misure dei momenti flettenti agli appoggi, potremo q considerare quale differenza fra la corrispondente ordinata q_0 della superficie semplice dei momenti e la somma delle corrispondenti ordinate x ed y dei due triangoli Ξ ed H, in cui il trapezio negativo è diviso da una qualunque delle sue diagonali. Segue che il carico P può considerarsi come risultante di tre forze, P_0, X, Y, aventi comune con P la retta d'azione, essendo

$$P = P_0 - X - Y \tag{18}$$

e

$$P_0 = q_0 \frac{R}{\alpha . 1^m}, \quad X = x \frac{R}{\alpha . 1^m}, \quad Y = y \frac{R}{\alpha . 1^m}. \tag{19}$$

Le P_0, note in grandezza e linea d'azione, dovranno comporsi tutte con la misura η_m dell'area della superficie semplice dei momenti per la costruzione delle *incrociate*. Le forze X ed Y sono incognite in grandezza ma *definite in linea d'azione e proporzionali alle misure* ξ *ed* η *delle aree dei triangoli negativi* Ξ *ed* H, pur esse incognite in grandezza, ma che devono applicarsi come pesi elastici alle *trisecanti* t' e t'', verticali baricentriche di detti triangoli Ξ ed H rispettivamente.

Partendo da altezze arbitrarie q_1' e q_1'' dei triangoli negativi Ξ ed H, se ne dedurranno i corrispondenti valori di ξ ed η e delle forze X e Y da applicarsi provvisoriamente ai singoli punti C corrispondenti ai varî bracci di manovella a gomito; si comporranno le forze ξ con tutte le X insieme, le forze η con tutte le Y insieme; le rette d'azione, (t'), (t''), delle risultanti (indipendenti di posizione dalla scelta fatta per q_1' e q_1'') si sostituiranno alle *trisecanti corrispondenti*, t' e t'' (lungo cui agiscono le sole ξ ed η) per la costruzione del *2° poligono funicolare*.

Tale costruzione seguirà, del resto, come se non esistessero i gomiti, tenuto conto però che la *controverticale* ad un appoggio è retta d'azione della risultante dei pesi elastici $\eta + \Sigma Y$, $\xi + \Sigma Y$, applicate alle verticali (t'') e (t') corrispondenti alle due campate adiacenti a sinistra ed a destra di quell'appoggio.

12. — Il secondo poligono funicolare risulterà ancora così di 4 lati per le campate intermedie (fig. 6ª), di tre lati per le campate estreme, avendo i suoi vertici sulle verticali i pei punti d'intersezione delle incrociate e sulle (t') e (t''), anzichè sulle trisecanti t' e t''; i suoi lati passanti pei centri d'appoggio saranno in quegli appoggi *le tangenti alla linea* l' *per l'albero a gomito*.

Siccome però sono le ξ ed η, agenti lungo le trisecanti t' e t'', proporzionali alle vere ordinate q' e q'' che voglionsi determinare, dovremo *spezzare* il secondo poligono funicolare per dedurne quello che si ha considerando la ξ *separata* dalla ΣX e la η separata dalla ΣY. Perciò, determinata la retta di azione (x) della risultante ΣX, i punti d'incontro della (x) e della t' coi lati concorrenti su (t') basterà unire con una retta r', ed analogamente, determinata la retta d'azione (y) della risultante ΣY, i punti d'incontro di (y) e t'' coi lati concorrenti su (t'')

unire con altra retta r''. Le rette r' ed r'' prolungate fino alle verticali degli appoggi B_1 e B_2 vi intersecheranno con le *tangenti d'appoggio* i segmenti B_1M_1 e B_2M_2 che stanno alle vere ordinate q' e q'' in noto rapporto dipendente dalla scelta fatta delle basi di riduzione. E precisamente, se l è la lunghezza della campata e si sono assunte per base di riduzione delle aree della superficie dei momenti e per distanza polare del secondo poligono funicolare due distanze il cui prodotto sia $\frac{1}{6} l_1^2$, risulta, com'è noto:

$$\overline{B_1M_1} = q' \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \quad \overline{B_2M_2} = q'' \left(\frac{l}{l_1}\right)^2. \tag{20}$$

13. — Molte semplificazioni si offrono per l'applicazione a casi particolari.

Così, assunta per un medesimo appoggio la stessa ordinata per la q_1'' provvisoria della campata adiacente a sinistra e per la q_1' provvisoria della campata adiacente a destra, uno stesso poligono funicolare, collegante le Y e la η della detta campata a sinistra e le X e la ξ della detta campata a destra, dà le verticali (y) e (t'') per la campata adiacente a sinistra, le verticali (x) e (t') per quella adiacente a destra, nonchè la controverticale di appoggio.

Volendo, alle due forze X_1 ed X_2 corrispondenti alle braccia di uno stesso gomito (fig. 7ª) si può sostituire la risultante, eguale al doppio della forza X corrispondente alla ordinata x sulla mezzeria del gomito ed applicata lungo la retta ρ facile a determinarsi. Basta invero segnare il punto D d'incrocio delle diagonali del trapezio avente x_1 ed x_2 per basi; ρ dista da x_2 di quanto D risulta distante da x_1. Analogamente si dica per i pesi elastici Y_1 ed Y_2.

Se anzi il gomito è in mezzeria della campata, il punto D è sulla risultante delle Y_1 ed Y_2; la risultante delle X_1 ed X_2 è sulla simmetrica per rispetto alla mezzeria (fig. 8ª).

Se poi, come è frequente, qualche campata è priva di gomiti, converrà assumere per l_1 la lunghezza di essa; per tale campata non occorre *spezzare* il secondo poligono funicolare, e quindi senz'altro le ordinate B_1M_1 e B_2M_2 intercette sulle verticali d'appoggio sono le ordinate-momento cercate agli appoggi.

14. — Di eventuali *cedimenti* piccolissimi *degli appoggi* si tien conto all'atto del tracciamento del secondo poligono funicolare, segnando i centri d'appoggio nei voluti dislivelli.

Della *ripartizione dei carichi* sulle lunghezze dei relativi perni si può aver riguardo arrotondando gli angoli della superficie semplice dei momenti.

Della forma *non prismatica* della trave diritta si tien conto sostituendo alla superficie semplice dei momenti la *superficie semplice delle curvature* e procedendo analogamente per i triangoli negativi, precisamente come si fa per travi continue a sezione variabile, salvo l'aggiunta dei pesi elastici concentrati positivi o negativi P_0, X ed Y.

15. — Esempio. Albero motore di motrice verticale *Diesel* da 30 cavalli-vapore (*). Gli appoggi sono tre, due agli estremi B_1 e B_3; l'intermedio B_2 determina due campate di cui la B_2B_3 porta la manovella motrice a gomito, l'altra, diritta, sorregge il volante e la ruota di trasmissione in S_1 e S_2. La fig. 9ª dà in millimetri le distanze ed in chilogrammi i carichi trasmessi, essendo verticale il piano π della fibra media dell'albero.

La *trave diritta* è prismatica (astraendo da lieve rastremazione al perno B_1 di appoggio) con sezione circolare di diametro 160 millimetri, le braccia della manovella a gomito hanno sezione rettangolare di $85^{mm} \times 200^{mm}$, essendo il lato minore parallelo all'asse di rotazione.

Disegnata sulla verticale a la retta delle forze, con poli P_1 a distanza polare 50^{cm} deducemmo le funicolari c' e c'' limitanti le superficie semplici dei momenti per le due campate (fig. 9ᵇ).

Misurate le aree delle superficie semplici dei momenti con base $\frac{1}{2}l$, essendo l la lunghezza della campata B_1B_2, portate le misure sulle verticali b, con poli P_2 a distanza $\frac{1}{3}l$, deducemmo

(*) Pigliamo i dati da un esempio svolto dallo Enssling, l. c., affinchè, avendosene desiderio, si possano, dal paragone dei calcoli numerici fatti da detto autore col calcolo grafico qui esposto, rilevare i vantaggi del metodo grafico, pure astraendo dalla minore probabilità di commettere errori grossolani, mentre, operando in scala maggiore da quella qui concessa, più che sufficiente approssimazione può garentirsi dei risultati.

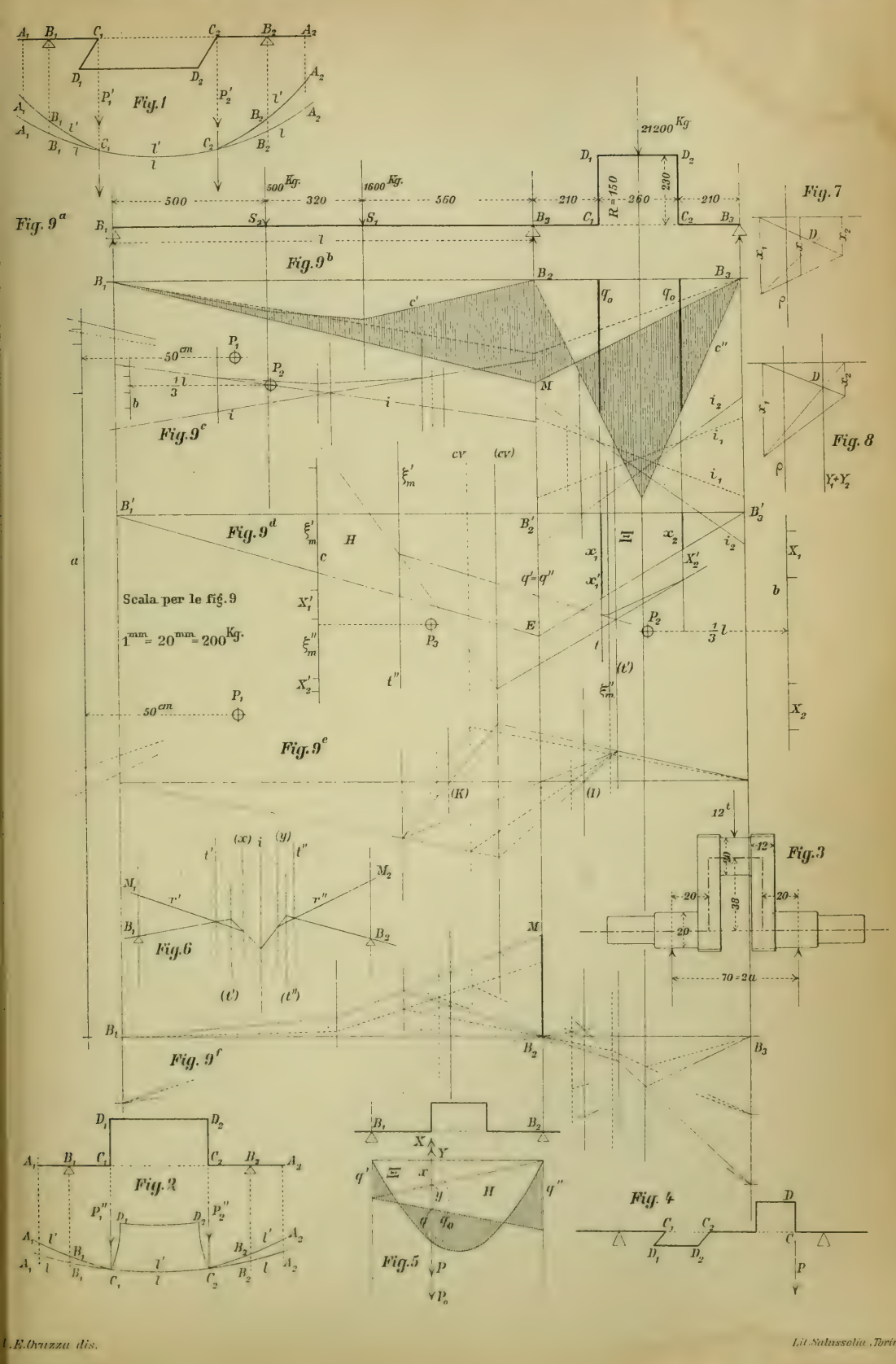


Fig. 1
Fig. 9a
Fig. 9b
Fig. 9c
Fig. 9d
Fig. 9e
Fig. 9f
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
21200 Kg
500 Kg.
1600 Kg.
500
320
560
210
260
210
R = 150
270
50 cm
Scala per le fig. 9
1 mm = 20 mm = 200 Kg.
70 = 2a

a fig. 9^c le incrociate i, i per la campata sinistra e le incrociate i_1, i_1 per la destra della *trave diritta*. Per avere le incrociate i_2, i_2 della campata destra per il calcolo dell'albero a gomito, lette le ordinate q_0, q_0 sulle verticali C_1D_1, C_2D_2, calcolammo i pesi elastici:

$$X_1 = X_2 = \frac{q_0 R}{\alpha \cdot \frac{1}{2} l},$$

essendo:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{I_0}{I_1} = 1{,}59 \sim, \quad I_0 = 3212^{cm^4}, \quad I_1 = 2023^{cm^4}.$$

Assunta in figura 9^d un'ordinata momento $q' = q''$ provvisoria $= \overline{B_2'E}$ all'appoggio B_2, desuntene le ordinate x_1 ed x_2, corrispondenti alle sezioni C_1 e C_2, nonchè le misure dei triangoli $B_1'B_2'E$ e $B_2'B_3'E$ (ξ_m' e ξ_m'') in base l, e le misure in stessa base dei rettangoli $x_1 \frac{R}{\alpha}$, $x_2 \frac{R}{\alpha}$, (X_1', X_2'), abbiamo collegato queste misure come se fossero forze (retta delle forze c, polo P_3) con poligono funicolare, deducendo così la verticale (t') per la campata destra, nonchè la controverticale (cv).

A fig. 9e coi noti quadrilateri completi deducemmo i punti fissi (I) e (K), ed a figura 9^f il secondo poligono funicolare. Avendo scelte le basi per modo che il prodotto loro faccia $\frac{1}{6} l^2$, e non occorrendo di *spezzare* il 2° poligono funicolare per la campata sinistra (priva di gomiti), abbiamo senz'altro in B_2M a fig. 9^f l'ordinata-momento all'appoggio centrale; onde a fig. 9^b si può completare il diagramma dei momenti flettenti.

16. — Le linee punteggiate nelle figure 9^b, 9e, 9e, 9^f si riferiscono alla trave diritta, cioè all'ipotesi che si trascuri la esistenza del gomito. È notevole che con tale ipotesi si commette un errore intorno al 40 % circa il momento all'appoggio B_2, pur notando che nei nostri calcoli abbiamo ridotto da 230^{mm} a $150^{mm} = R$ la lunghezza delle parti deformantisi delle braccia della manovella a gomito.

Tracciate dai poli P_1 le parallele alle rette di chiusa dei diagrammi dei momenti flettenti, così ottenute per le due cam-

pate, si intercettano sulla retta a delle forze le misure delle reazioni di appoggio B_1, B_2 B_3; il disegno pone in evidenza gli errori che si fanno circa tali reazioni, trascurando l'esistenza del gomito.

Merita osservare che molte delle operazioni fatte servono pel calcolo dell'albero quando il piano π della sua fibra media si sposti girando attorno all'asse di rotazione.

Palermo, 12 maggio 1903.

Relazione sulla memoria del Dott. Francesco Severi, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie.*

La 1ª Parte di questa Memoria è dedicata principalmente ad una ricostruzione, per via geometrica semplice ed elegante, della teoria delle corrispondenze sopra una curva algebrica, che il sig. Hurwitz aveva svolta tempo fa, per via trascendente, in una Memoria fondamentale.

Indicando con $A \equiv B$ la *equivalenza* di due gruppi A, B di n punti sopra una curva C, ne deriva un significato ovvio per la notazione

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots,$$

ove $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2 \ldots$ son gruppi di punti di C, e le λ e μ son numeri interi positivi. La stessa notazione, quando fra questi interi ve ne sian dei negativi, significherà la relazione che si deduce da essa col trasportare i termini corrispondenti nell'altro membro. Ciò premesso, si dice che una corrispondenza T fra i punti di C è *a valenza* γ, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, quando, chiamando Y, Y' i gruppi dei punti omologhi in T di due punti qualsiansi a, a', sempre si ha:

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a'.$$

Servendosi di convenienti sommazioni di corrispondenze, partendo da certe corrispondenze particolari, si giunge a dimostrare

il seguente teorema (che dà, ove lo si traduca in numeri, l'intima ragione del *principio di corrispondenza* CAYLEY-BRILL): Se nella corrispondenza T, di valenza γ, al punto a corrispondono i punti del gruppo Y, mentre nella inversa T^{-1} allo stesso punto corrispondono i punti del gruppo X, si ha la relazione:

$$U \equiv X + Y + 2\gamma a + \gamma K,$$

ove U rappresenta il gruppo dei punti uniti di T, e K un gruppo canonico di C.

Per passare poi alle corrispondenze prive di valenza, l'Autore introduce il concetto di *corrispondenze dipendenti*. Date su C k corrispondenze qualunque $T_1, \dots T_k$, si dirà che esse sono *dipendenti*, se esistono k interi (positivi o negativi) $\lambda_1, \dots \lambda_k$ non tutti nulli, tali che indicando con $Y_i\, Y_i'$ i gruppi degli omologhi nella T_i $(i = 1, \dots k)$ di due punti qualsiansi $a\ a'$, sempre si abbia

$$\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \dots + \lambda_k Y_k'.$$

In particolare dunque una corrispondenza dotata di valenza è una corrispondenza dipendente dalla *identità*. Sopra ogni curva vi è un numero finito di corrispondenze indipendenti, per modo che tutte le altre corrispondenze sono dipendenti da queste. Se le $T_1, \dots T_k$ sono dipendenti nel modo detto, e se gli omologhi del punto a in queste corrispondenze, e nelle loro inverse, formano risp. i gruppi $Y_1, \dots Y_k$ e $X_1, \dots X_k$, avrà luogo la relazione

$$\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \dots + \lambda_k (X_k + Y_k)$$

ove $U_1 \dots U_k$ indicano i gruppi dei punti uniti nelle $T_1, \dots T_k$. Ne segue subito il principio generale di corrispondenza di HURWITZ.

Nella 2ª Parte della Memoria l'A. applica i risultati esposti a due classi molto ampie di superficie, sulle quali in questi ultimi mesi furon pubblicate delle ricerche simultaneamente da tre giovani geometri italiani: DE FRANCHIS, MARONI e SEVERI. Son le superficie che rappresentano biunivocamente le coppie di punti di due date curve, o di una sola curva. Sia F una superficie che rappresenti le coppie di punti di due curve C, C': vale a dire una superficie che contenga due fasci K_x, K_y di curve unisecantisi, corrispondenti rispettivamente alle coppie di punti che

han fisso il punto di C, o quello di C'. Ogni corrispondenza (α, β) fra i punti di C, C', e quindi anche fra K_x, K_y, dà origine, colle intersezioni delle curve omologhe di questi fasci, ad una curva di F segante in β punti le K_x e in α punti le K_y. Viceversa ogni curva T di F rappresenta in questo senso una corrispondenza fra C, C'.

Ciò posto, e adottando per curve $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ di F la notazione

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots$$

ove le λ e le μ sono interi, positivi o negativi, in senso analogo a quello accennato in principio nel caso dei gruppi di punti di una curva, il Severi conviene di dire che più curve $\Gamma' \ldots, \Gamma^k$ tracciate su F sono *dipendenti*, se esistono degl'interi (positivi o negativi, ma non tutti nulli) $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, tali che la curva (virtuale) $\lambda_1 \Gamma' + \ldots + \lambda_k \Gamma^k$ si componga per somma e sottrazione colle curve dei fasci K_x, K_y. Egli dimostra allora che su F si può fissare un numero finito di curve indipendenti (una *base*) per modo che ogni altra curva di F sia dipendente da quelle. Ne segue per questa superficie una proprietà importantissima: che cioè tutte le questioni relative alle curve tracciate su di essa si risolvono quando sian noti i caratteri delle curve rispetto a quelle fisse costituenti una base. Così si può calcolare il numero dei punti comuni a due date curve di F (l'analogo del *teorema di Bézout*); come anche il genere ed il grado di una curva tracciata su F.

Una ricerca analoga vien fatta per la superficie che rappresenta le coppie di punti, non ordinate, di una curva C. Al posto dei due fasci unisecantisi K_x, K_y si ha in essa un sistema ∞^1 d'indice 2 e grado 1 di curve, corrispondenti risp. ai punti di C.

Per non dilungarci troppo, ci limitiamo a questi cenni, i quali ci pajon già sufficienti per dimostrare la speciale importanza della Memoria del Dott. Severi. Concludiamo quindi col proporre che essa venga accolta nei volumi accademici.

G. Morera.

C. Segre, *relatore*.

Relazione sulla memoria del Dott. Giulio Bisconcini, intitolata: *Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri.*

Nella meccanica dei sistemi continui e nella fisica matematica si incontrano frequentemente equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine.

È di grande importanza per le applicazioni di queste equazioni la ricerca sistematica di tutte quelle soluzioni che dipendono da parametri in numero inferiore a quello delle variabili indipendenti.

La famosa *Commentatio mathematica* di Riemann, che diede luogo a tante ricerche sulla trasformazione delle espressioni differenziali quadratiche, aveva appunto per oggetto di rispondere ad una questione di tal natura, proposta nel 1858 dall'Accademia di Parigi come tema di un concorso a premio.

La ricerca in parola fu compiuta per l'equazione di Laplace dal prof. Levi Civita in una memoria apparsa nel tomo XLIX della nostra raccolta accademica.

Il Dottor Bisconcini fa la stessa ricerca per l'equazione a derivate parziali che determina gli spostamenti trasversali di una membrana elastica vibrante. Sebbene tale equazione si deduca da quella di Laplace con una semplicissima trasformazione, tuttavia pensano i sottoscritti che i risultati conseguiti dal dott. Bisconcini pur meritino di essere pubblicati e per ciò propongono l'accoglimento del suo lavoro nelle *Memorie* dell'Accademia.

V. Volterra.
G. Morera, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 31 Maggio 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Carle, Brusa, Chironi e Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Boselli e Pizzi.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 17 maggio 1903.

Il Presidente comunica il nuovo lutto dell'Accademia, dovuto alla morte del Socio Federigo Emanuele Bollati di Saint-Pierre, e ricorda con sentite parole i meriti del defunto. Il Socio Manno, al quale il Presidente manifesta a nome proprio e della Classe le condoglianze per la recente sventura domestica che egli pure ebbe a soffrire, è pregato di commemorare il rimpianto Socio di Saint-Pierre. Ringrazia il Socio Manno accettando, quando altri della Classe non desideri fare tale commemorazione, nel qual caso egli commemorerebbe il defunto alla Società di Storia Patria.

È letta la lettera di ringraziamento del Prof. G. Batt. Gandino, eletto accademico nazionale non residente.

Il Presidente comunica l'invito di un Comitato costituitosi in Bari per commemorare colà in modo solenne, il 7 giugno prossimo, il rimpianto Socio Salvatore Cognetti de Martiis. Saranno incaricati di rappresentare l'Accademia il Direttore di quella Scuola di Commercio Carlo Massa, unitamente al Prof. Sabino Fiorese.

Per gli *Atti* sono presentate le seguenti note:

1° Dal Socio Chironi: Luigi Abello, *Condizione giuridica delle confraternite di mero culto;*

2° Dal Segretario a nome del Socio Cipolla: Arturo Segre, *Emanuele Filiberto in Germania e le ultime relazioni del Duca Carlo II di Savoia con Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto (1544-1546).*

LETTURE

Condizion giuridica delle confraternite di mero culto.

Nota di LUIGI ABELLO.

Il principio di *sociabilità*, qual forma d'esprimere la natural tendenza dell'individuo a raggrupparsi alla specie nel genere, si manifesta in ogni aggregato vivente: si rivela meramente istintivo, e contenuto sempre nei limiti della semplice convivenza, negli esseri sub-umani per quanto possa aversi, anche tra essi, un qualche lontano indizio od idea rudimentale d'ordinamento collettivo (1); s'eleva invece nelle società umane, svolgendosi colla riflessione e col libero volere in modo più complesso, alla dignità di elemento e fattore sociale acquistando valore e forza d'elemento dell'ordine giuridico, di diritto soggettivo. L'insufficienza individuale ad attingere tutti i fini della vita, il principio d'autarchia cui tende ogni persona perchè tale e come parte del tutto etico, e la funzione integratrice dello Stato, come spiegano il diritto del privato ad associarsi onde provvedere all'attività deficiente della persona singola, ne giustificano e designano i limiti in cui va ristretto. Chè se non si può, logicamente e giuridicamente, contrastare od ostacolare lo spirito d'associazione rispondente ad una necessità dell'umana natura e ragion prima d'ogni società civile (2), se non par per sè legittimo quel senso di diffidenza che nella storia del diritto s'osserva contro le associazioni, se l'intervento dello Stato deve pur esser contenuto

(1) Cons. Spencer, *Justice* (trad. franc. di Castelot, 2ª ed., Parigi, 1893), cap. II, p. 6 e segg.; v. pure Dusi, *Il diritto subiettivo e la legge*, Camerino, 1896, p. 5.

(2) V. Brice, *Le droit d'association et l'État*, Paris, 1893, p. 26, ove s'avverte, rispetto allo spirito d'associazione, che *l'arrêter net serait, de la part de l'État, faire preuve d'une suspicion injurieuse, s'attaquer aux sources de son principe vital et heurter de front un des penchants les plus profonds de la nature humaine;* cfr. pure Lods, *Le droit d'association et la liberté religieuse d'après la l. 1 juil. 1900*, Paris, 1901; Bolchini, *Per una legge sulle associazioni*, Varese, 1901.

in dati limiti nel regolamento e nella soppressione loro, non si può però ammettere come sconfinata e sottratta alla vigilanza ed all'autorità della potestà civile la facoltà dei privati di riunirsi in associazione per qualsiasi fine o con qualunque mezzo. A ciò s'oppone lo stato stesso della coscienza dell'uomo che in sè riflettendosi, a sè rivelandosi, gli dà la ragion del suo diritto e la prova dell'esser suo come persona, come soggetto di diritto (1): la facoltà che in astratto gli spetta di volgere l'attività sua verso i *fini che vuole* e valersi perciò dei mezzi tutti di cui può disporre, tra cui certo non ultimo l'associazione, qual potentissimo modo di moltiplicare e rafforzare l'energia umana, dev'esser limitata, temperata o modificata, nella sua estensione, dalle esigenze della consociazione in cui vive e dalla quale attinge quella forza che tutelandola la converte in diritto.

Ond'è che il diritto d'associazione va sempre razionalmente contenuto nei limiti determinati dal principio stesso che l'informa, dalla *socialità* ch'è pur fatto naturale e perciò necessario: il sentimento e il fenomeno della consociazione inducente adattamento dell'individuo all'ambiente in cui è destinato a vivere ed a perfezionarsi, e la funzion regolatrice dello Stato, qual rappresentante della vita politica e sovrana degli associati, vòlta all'equilibrio delle diverse forze sociali, impongono una legge di condotta che ne regoli il movimento e lo temperi in modo che coll'integrazione degli individui si promuova il maggior benessere della collettività sociale, conferiscono allo Stato il potere ed il dovere di vigilare od impedire che aggruppamenti minori sorgano o vivano in offesa od in pericolo dell'interesse generale della maggior collettività. Quindi è che, se pur s'ammette doversi favorire, anzichè intralciare o negare, la natural tendenza dell'uomo ad associarsi perchè nello svolgimento parallelo dello Stato e delle associazioni s'ha la maggior garanzia della libertà individuale (2), se pur si riconosce l'opportunità o, meglio, la necessità di norme certe negli ordinamenti giuridici d'una società politica che valgano a contenere nei giusti termini la funzione dello Stato e a garantire l'esistenza e la vita del diritto *individuale* di fronte al continuo accrescersi, in contenuto ed ef-

(1) V. Chironi, *L'individualismo e la funzione sociale*, Torino, 1898, p. 8.
(2) V. Brice, op. cit., prefaz. di Goblet, pag. II.

ficacia, di quello *statale* (1), non si può disconoscere, finchè tali norme difettano nella legge positiva, il diritto dello Stato a vigilare ed intromettersi nella *costituzione* e *vita* d'ogni associazione, benchè non si possa neppur affermare che l'esistenza loro dipenda dal consenso dell' autorità sociale in modo da non poter sussistere senza espresso riconoscimento. Perciò se pur, in omaggio ai dogmi fondamentali della società nuova, superba conquista dello spirito scientifico moderno (2), e alla soluzione data dalla storia e dal diritto al grave problema della libertà religiosa (3), non par potersi negare ai privati la facoltà d'associarsi per un fine meramente religioso, qual uno dei molti possibili fini ideali della vita, non sembra d'altra parte si possa contestare allo Stato il diritto, anzi il *dovere*, d'interessarsi al sorgere ed allo svolgersi di tali associazioni onde indagare e decidere se le pratiche cui attendono o debbono attendere gli associati, i vincoli cui devono assoggettarsi, lo scopo ultimo, diretto od indiretto, al quale manifestamente tendono, i mezzi di cui si valgano o dichiarino volersi valere a conseguirlo, non urtino contro i principî d'ordine pubblico ed interesse generale, di cui è non solo supremo vigile e tutore ma ancora supremo interprete e moderatore. Il che, se val in genere per tutte le associazioni religiose che la Chiesa, punto avversa al concetto di fratellanza universale, favorì in modo d'averne reali e numerose manifestazioni in tutte le forme con le quali spiega la sua attività (4), val pure in particolar modo per quelle tendenti a qualche scopo ecclesiastico, note di regola col nome di *confraternite* (5), distinte dalle congregazioni e dalle altre associa-

---

(1) Argom. art. 32, Statuto it. e v. Filomusi Guelfi, *Enciclopedia giuridica*, 4ª ediz, Napoli, 1902, § 121, p. 517, nota 3ª ed autori ivi citati tra cui Arcoleo, *Riunioni ed associazioni*, Napoli, 1878.

(2) V. Mancini, *Dei progressi del diritto*, Torino, 1859, pp. 42-43.

(3) V. Ruffini, *La libertà religiosa*, Torino, 1901 e s'avverta con lui (pag. 18 in-f.) che in Europa, ove secolari discrepanze storiche e immani sproporzioni sociali dividono le varie Chiese, è a tener fermo il sistema che per ciascuna in modo proporzionato commisura l'*azione regolatrice della pubblica autorità*.

(4) V. Schiappoli, *Condizione giuridica delle confraternite ecclesiastiche* (Estr. della *Giurispr. ital.*, 1900), p. 11.

(5) V. Friedberg-Ruffini, *Trattato di diritto ecclesiastico*, Torino, 1893, § 90, p. 373, nota 3ª; v. pure Scaduto in *Digesto ital.*, voce *confraternita*.

zioni (1) essenzialmente per ciò ch'esse non richieggono la vita in comune ed, in genere, i loro membri non pongono a disposizione dello scopo ecclesiastico l'intiera personalità e l' intiero patrimonio (2).

Posto quindi — e si vedrà in appresso come non par si possa decidere altrimenti — che il diritto positivo odierno più non consenta o riconosca la personalità giuridica alle confraternite senza far loro inerire quel carattere caritativo che tutte le assimila od equipara, almeno, agli istituti pubblici di beneficenza, non si potrà tuttavia negare senz'altro la possibilità di esistenza delle confraternite di mero culto: esse potranno continuare ad esistere, ed anche costituirsi in avvenire, allo stato di semplici associazioni, purchè s'assoggettino all'impero ed all'osservanza di quelle norme o condizioni che l'autorità sociale, sia in virtù di legge, sia qual potere esecutivo, in adempimento dell'alto ufficio suo di polizia e sicurezza generale, imponga alla loro capacità d'agire e quindi alla possibilità di loro esistenza, come avviene, o dovrebbe avvenire, segnatamente quando il fine religioso servisse ad eludere i principî sommi di diritto pubblico e di legge positiva in tema d'*istruzione* e *manomorta* (3).

Si spiega perciò come possano ancor oggi esistere enti laicali di culto che, pur non essendo persone giuridiche, non avendone i diritti nè gli obblighi, nè potendo agire legalmente quali soggetti di diritto, quali enti a sè separatamente dai membri che li compongono, sussistono come riunione d'individui, soggetti, per quel che riguarda il fine spirituale loro comune, all'autorità della Chiesa cui volontariamente subordinassero la ragion di loro esistenza e l'ultima loro finalità, senza che però questa possa influire sull'*esistenza* o *capacità giuridica*, attributo essenziale dello Stato, alla cui sorveglianza ed autorità son pur sempre soggetti (4).

---

(1) Argom. art. 1, l. 7 luglio 1866 (n. 3096) sulla soppressione delle corporazioni religiose in tutto il Regno.

(2) V. Friedberg-Ruffini, op. cit., § 90, 1, p. 373.

(3) V. Ruffini, *La lotta contro le congregazioni religiose in Francia* nella *Rivista d'Italia*, ottobre 1902; Presutti, *Le associazioni religiose in Francia*, Napoli, 1903; v. però sulla manomorta come *necessità sociale*, Varbilles-Sommières, *Les personnes morales*, Paris, 1902, pag. 453 e segg. e cfr. pure Garcin, *La main morte*, Paris, 1903.

(4) Argom. art. 2, l. 17 luglio 1890 e cfr. art. 3 e 20, l. 3 agosto 1862.

Non è però a dire che le confraternite di tal specie siano assolutamente incapaci di diritto e non abbiano, in un certo senso, una qualche personalità giuridica. Lo svolgimento, logico e storico, ch'ebbe il fenomeno dell' associazione nelle dottrine delle collettività giuridiche, l'indagine approfondita (1) non solo delle analogie colla società civile e coll'istituto della corporazione, ma ancora della condizion giuridica dei beni sociali, per cui la considerazione dello scopo serve a determinare, qual natural effetto del patto d'associazione, il vincolo imposto ai beni spettanti alla società, non qual ente differenziato, ma qual unione delle persone strette dal patto, sembra permettere di fissare con rigore scientifico l'entità giuridica dell'associazione e il contenuto della sua capacità di diritto (2).

Verò è che l'associazione, come istituto a sè, non è *persona* distinta da quella degli associati, non è per sè soggetto di diritto; ma la legge dell' unione, specializzando lo scopo cui si connette la volontà dei singoli nel costituirla, designando il modo col quale ognuno concorre ad esercitare la propria attività giuridica, mostrando come l'interesse d'ogni singolo debba procedere insieme con quello identico degli altri (3), ne determina la condizion soggettiva in quanto *associati* e dà modo all'unione di agire, quasi come se fosse unità, benchè veramente non agiscano se non i singoli, *in quanto associati*, in quello stato cioè da essi voluto e risultante dall' unione onde la loro attività assume forma di organica (4). E la possibilità d'agire giuridicamente non può esser ostacolata o impedita dal mutarsi che avvenga delle persone degli associati: difettando nel diritto patrio, a

---

(1) V. Chironi, *Personalità giuridica delle associazioni* in *Legge*, 1901, I, n. 5.

(2) V. Gierke, *Vereine ohne Rechtsfähigkeit*, 1900, in *Berl. Festgab. f. Dernburg;* Rousse, *De la capacité juridique des associations en droit civ. franç.*, Paris, 1897; Brice, op. cit., pag. 30 e segg.; Vareilles-Sommières, *Le contrat d'association*, Paris, 1892; *Les personnes morales*, Paris, 1902, pag. 416 e segg.

(3) Cfr. Karlowa, *Zur Lehre v. d. juristisch. Personen* in *Grünhut's Zeitschrift*, 1888, pag. 381 e segg.

(4) V. Chironi, *Personalità giur. delle associazioni*, pag. 10 (estratto dalla *Legge*, 1901); cfr. pure Vavasseur, *Sociétés, syndicats, associations devant la justice*, Paris, 1901.

differenza di quello germanico (1), una norma che imponga l'applicabilità delle disposizioni relative alla società (2), par ben si possa, a cagion della volontà determinante lo stato d'unione, ritenere che, senza bisogno di special clausola statutaria, l'uscita d'un associato dall'unione non altera lo stato d'associazione, non dà diritto all'uscente d'instare per la divisione del patrimonio sociale e pel conseguimento della sua quota sui beni, tranne che pel suo modo speciale d'essere, per la considerazione stessa dello scopo cui fosse vôlta l'associazione, apparisse chiaramente che l'interesse individuale esiste contemperato nel collettivo sì da assumere il carattere di società (3). Così, costruendo sull'entità della corporazione, qual sostrato di fatto e ragion prima della persona giuridica, in cui lo scopo comune prevale, anzi s'impone all'individuale, e sulla struttura e funzione del voler dei singoli nel contratto di società, si può fissare la vera condizione giuridica delle associazioni, estendere ad esse le norme regolanti la corporazione e non del tutto ad esse speciali, non esclusa però, anzi riconosciuta, l'applicabilità del regolamento ordinato alle società civili, quando s'appalesi nel patto d'associazione il concorso d'un fine od interesse individuale degli associati, per cui non siasi altrimenti disposto nella legge stessa dell'unione. Onde ne consegue che una confraternita di mero culto, quale associazione, può sussistere e continuare a sussistere, nonostante il rinnovarsi o mutarsi dei confratelli, e l'azion sua si svolgerà come azione dei singoli suoi membri, *in quanto associati*, e che son tali al momento in cui sorge il rapporto giuridico cui l'azion sua si riferisce. Nè v'ha ragion d'escludere la possibilità d'una legittima rappresentanza della confraternita per ciò solo ch'essa non esiste, qual ente a sè, distinto dalle persone dei singoli che la compongono.

Anche una semplice associazione può avere un rappresentante ed agire giuridicamente per mezzo di lui, nel senso che

---

(1) V. Cod. civ. germ., § 54, per cui è espressamente sancito che alle associazioni prive di capacità giuridica sono applicabili le disposizioni intorno alle società. Cfr. Crome, *System d. deutsch. bürg. Rechts*, Tübingen, 1900, vol. I, § 55, pag. 258 e segg.; Endemann, I, § 44, in-f.; Hölder, *Comm. z. b. Gb.*, München, 1900, I, § 54, pag. 169 e segg.

(2) Argom. art. 1729, cod. civ.

(3) V. Chironi, mon. cit. sulla *personalità d. associazioni*, pag. 13, nota 2ª.

l'azione sua va riferita alle singole persone che la costituiscono, non però come individui, assolutamente distinti ed indifferenti tra loro, ma come *associati*, come persone cioè unite dall'identità di scopo che li fa agire nella condizion giuridica particolare che loro asserisce la legge dell'unione ch'essi hanno stipulata e sarebbe perciò pur opponibile ai terzi che ne avessero avuta conoscenza (1).

E neppur si può ammettere se ne debba restringere la capacità alle relazioni non direttamente patrimoniali, come se una confraternita asssociativa, e, più in generale, un' associazione fosse del tutto incapace d'acquistare e possedere un patrimonio proprio; l'incapacità vi è ed assoluta se all'acquisto od al possesso si vuol dare un unico soggetto di diritto, non però se lo s'intende nel senso sopra esposto di patrimonio spettante per parti indivise agli associati per raggiungere lo scopo per cui il patrimonio appunto si costituì, che, per l'origine sua e lo scopo cui è vôlto, è sottratto alla piena disposizione dei singoli associati. La restrizione del potere spettante ad ognuno d'essi deve reputarsi effetto necessario del patto sociale, considerato come legge presiedente alla creazione del patrimonio, qual conseguenza del fine cui l'associazione tende, precisamente come si costruisce in tema di società civile (2), senza ricorrere alla figura della persona giuridica, che ripugna all'essenza del contratto (3), per spiegare il divieto fatto ai soci di disporre dei beni sociali (4). La caratteristica dell'associazione, differenziata dalla persona giuridica, non è già nell'esistenza o meno di patrimonio, ma nel difetto di personalità distinta, nella carenza di riconoscimento che solo la legge o lo Stato, per l'esser e per l'ufficio suo, può

---

(1) Alla costruzione sui poteri e sugli effetti degli atti compiuti dai rappresentanti l'associazione conferirono assai le gravi ricerche dello Jhering intorno la natura giuridica dei comitati (*Jahrb. f. d. Dogmat.*, 1880, pag. 1 e segg.); v. Scialoja, *Sunti di scrittori tedeschi* in *Archivio giurid.*, 1881, pag. 17 e segg.; v. pure Chironi, mon. cit., pag. 7, nota 2 e testo relativo.

(2) V. Chironi, mon. cit., pag. 3 e segg.; Manara, *Le società di commercio irregolari* in *Giurispr. ital.*, 1898, pag. iv.

(3) V. però Saleilles in *Ann. de dr. comm.*, 1895, II, pag. 10 e segg. e 1897, II, pag. 20 e segg.; Meynial in *Journ. d. Palais*, 1892, I, pagg. 73 e 497; Mongin in *Rev. critiq. de législ. et jurisprud.*, 1890, pag. 697 e segg.

(4) V. art. 1724, Cod. civ.

dare così alle semplici corporazioni mancanti di patrimonio comune (1), come a quelle che ne siano provviste qual mezzo di raggiungimento del fine cui tendono i corporati. Non par quindi corretto asserire il carattere *associativo* o *personale* alle confraternite secondochè hanno un patrimonio proprio, a sè stante, che ne assicuri la perpetuità oppure vivono per le oblazioni o contributi dei confratelli (2); par meglio argomentare dalla considerazione del fine, e, procedendo per eliminazione, affermare che le confraternite in esame, quelle cioè aventi mero scopo di culto, non possono esistere che quali *associazioni*, non come *persone giuridiche,* perchè il riconoscimento, loro necessario per acquistare tal personalità, ne implica, nel diritto positivo patrio, l'assimilazione agli istituti pubblici di beneficenza e la soggezione loro alle norme di legge che li regolano.

È ben vero che ancor oggi in dottrina (3) si dubita assai del principio, e, nonostante il recente contrario avviso della giurisprudenza (4), si tende a perseverare, anche nei rapporti della legge positiva, nella distinzione fondamentale tra confraternite *miste,* aventi, oltre ai fini spirituali, destinazione caritativa per esser pur volte al compimento di azioni di pietà temporale a sollievo fisico e materiale dei miseri e sofferenti, e confraternite

---

(1) V. Schiappoli, mon. cit., pag. 16 ed autori e sentenze ivi citate e specialmente *Atti parlamentari*, Sess. 1889-1890, pagg. 228-461.

(2) V. Cons. Stato, 6 ottobre 1898 in *Giurispr. ital.*, 1899, pag. 24 e in *Riv. dir. ecclesiast.*, 1899, pag. 134.

(3) V. Schiappoli, mon. cit., che discorre a lungo dell'argomento, esaminando in ben oltre 200 pagine la condizione giuridica delle confraternite. V. pure, sostanzialmente nello stesso senso, Magnani, *Le confraternite* in *Boll. d. Opere pie*, 1898, pag. 689 e segg.; Scaduto, *Diritto ecclesiast.*, Torino, 1893, I, n. 176*, pag. 581; Musolino, *Le confraternite e la nuova legge sulle Opere pie*, Noto, 1893; Rizzardi, *Le confraternite laicali in rapporto alla l. sulle Opere Pie*, Trani, 1898; Ballarini, *Le Opere pie nella legge, nella dottrina e nella giurisprudenza,* Schio, 1902.

(4) V. Cons. Stato, 22 dicembre 1897 e 28 gennaio 1898 e 29 novembre 1900 in *Riv. dir. ecclesiast.*, 1898, pagg. 612-615, in *Legge*, 1898, II, pag. 279 e in *Foro it.*, 1898, III, pag. 116 e 1901, III, pag. 20; cfr. parere 16 maggio 1897 in *Giust. amm.*, 1897, pag. 232 e in *Riv. dir. ecclesiast.*, 1897, pag. 615 e parere 22 dicembre 1893 (sez. int.) in *Legge*, 1898, II, pag. 279; cons. pure Cons. Stato, 12 settembre, 7 novembre, 28 marzo, 11 gennaio 1902 in *Riv. amministr.*, 1902, disp. 636, pag. 981; disp. 635, pagg. 865-866; disp. 632, pag. 639; disp. 627, pag. 219.

di puro culto tendenti unicamente all'esercizio di semplici opere religiose e di pratiche ascetiche, considerando queste ultime come del tutto sottratte ad ogni ingerenza del potere civile. Ma le argomentazioni addotte, essenzialmente d'ordine storico, non par abbiano inoppugnabile fondamento, chè, nella stessa origine e storia loro (1), le confraternite mostrano aver quasi sempre avuta natura mista ed esser state considerate, pur nei tempi antichi, dai dottori e dalle leggi canoniche (2), quali enti sorti *ad hoc ut confratres in misericordiae et caritatis operibus se exerceant* (3), in cui il fine di mutuo soccorso o di beneficenza, in via principale od accessoria, inerisce così alla ragion di loro formazione da doversi considerare come un elemento *naturale*, se non essenziale, alla loro esistenza. E non diversamente avviene nella considerazione, diretta od indiretta, che di esse ebbero a farne in tempi remoti le leggi civili, tendenti appunto per ciò ad assoggettarle sempre più rigorosamente al loro impero. Così si spiega, limitando per ora le indagini a quel diritto positivo ch'ebbe vigore in Italia prima della sua ricostituzione ad unità, come in quegli Stati dell'Italia centrale e meridionale, ove ebbero special importanza e maggior sviluppo, sian state o soppresse o ritenute, ad ogni effetto giuridico, come *istituti laicali* e sottratti all'osservanza delle disposizioni del diritto canonico che le faceva unicamente dipendere dai vescovi, a cui gli amministratori, così ecclesiastici che laici, eran tenuti *reddere rationem et singulis annis* (4). Certo nella legislazione vigente nel Regno delle due Sicilie, anteriormente alla dominazion francese, appar netta la condizion giuridica delle confraternite, accumunate tutte in una medesima categoria e annoverate tra le opere

---

(1) Sulla natura ed origine storica delle confraternite e sullo svolgimento loro negli antichissimi tempi, in particolare nei secoli XIII, XIV e XVI (che segna l'epoca culminante di lor vita). Vedi Tamassia, *L'affratellamento*, Torino, 1886; Calisse, *Le associazioni in Italia avanti le origini del Comune* in *Riv. intern. di scienze sociali*, 1898; Solmi, *Le associazioni in Italia avanti le origini del Comune*, Modena, 1898; Schiappoli, mon. cit., pagg. 9-15.

(2) V. Conc. Trid., sess. 22, c. VIII, *de reform.* e const. 115, *quaecunque*, 7 dicembre 1604 di Clemente VIII.

(3) V. Bassi, *Tract. de sodalitiis seu confratern. eccles. et laical.*, Roma, 1739, quaest. I, n. 7.

(4) V. Conc. Trid., sess. 22, c. IX.

pie laicali: non solo non è possibile dubitarne, ma rileva, per la dichiarazion dei principî contenutivi, avvertire che per esse fu esplicitamente affermato " essere un abuso l'ingerenza della giurisdizione ecclesiastica negli affari e pendenze delle *confraternite*, poichè tali adunanze riconoscono non da altri la loro sussistenza ed unione che dalla potestà del principe, la quale solo può canonizzarle per collegi leciti e permetterle nello Stato, che perciò il diritto di visita del vescovo deve per esse restringersi *quoad spiritualia tantum* e in tutto il resto devon esser soggette al magistrato laico, cui spetta esaminare le regole ed i capitoli di tali unioni senza che possa intromettervisi la Corte vescovile e conoscere delle cause di elezione o cancellazione dei procuratori od ufficiali delle medesime e di ogni altra che riguardi le adunanze e ciò anche nell'ipotesi che nell'atto di fondazione fosse statuito doversi tal elezione confermare dalla Corte ecclesiastica, essendone persino esclusa la partecipazione degli ecclesiastici se non all'unico oggetto di godere dei suffragi e delle indulgenze „ (1). Ed il regolamento non fu mutato dalle leggi francesi che seguirono e neppur dal restaurato Governo borbonico, che anzi lo confermò affidando la tutela di tali enti alle *Intendenze* cui oggi subentrarono le giunte provinciali amministrative e i consigli di prefettura (2). E se in seguito s'accolse la distinzione tra confraternite ecclesiastiche e laiche, concedendo che quelle dipendessero unicamente dai vescovi, ciò fu per brevissimo tempo, poichè coi decreti prodittatoriali del 22 ottobre 1860 e 17 gennaio 1861 fu nuovamente esclusa ogni ingerenza ecclesiastica nell'amministrazione e restituito loro l'antico carattere laicale (3). Agli stessi principî, sostanzialmente, sebbene in diverso grado e modo, s'informarono la maggior parte delle legislazioni che

(1) V. Concordato del 1741 tra il Re di Napoli e la S. Sede, e su esso Nussi, *Convent. de rebus ecclesiast. inter S. Sedem et civilem potestatem*, Mogunt. 1870 e quanto alla Sicilia il R° dispaccio dell'11 febbraio 1781.

(2) V. Istruzioni per l'amministrazione degli stabilimenti di beneficenza e dei luoghi pii laicali in data 28 maggio 1826; cfr. pure Istruzioni del 20 maggio 1820, art. 158; v. specialmente il lavoro amplissimo dello Scaduto, *Stato e Chiesa nelle Due Sicilie dai Normanni ai nostri giorni*, Palermo, 1887 (segnatamente il § 13 e segg.) e Friedberg, *Die Grenzen zwischen Staat u. Kirche und die Garantien gegen deren Verletzung*, Tübingen, 1872, parte V, pag. 654 e segg.

(3) Friedberg-Ruffini, op. cit., § 90, nota 3ª, pag. 374.

ebbero vigore negli altri Stati d'Italia sino a decretarsene in alcuni di essi la soppressione totale o parziale: così in Toscana, dove pur fu per tanto tempo tradizionale la devozione alla Santa Sede, le confraternite, che già nel periodo repubblicano non si potevano istituire senza permesso del Governo e sotto Cosimo I neppur adunare (1), furono tutte abolite da Pietro Leopoldo col *motu-proprio* del 21 marzo 1785 e, benchè in seguito abbian potuto ricomparire coi loro abusi, non mancarono i governanti di mostrar l'intenzione loro d'impedirli e di non abbandonarle, in ogni ipotesi, alla giurisdizione ecclesiastica (2). Così avvenne nella Lombardia, nel Veneto, nel ducato di Modena, nell'ex-ducato di Guastalla, dove, col sopravvenire della dominazione francese furono proibite le confraternite tutte, eccettuate quelle sotto la denominazione del Santissimo, delle quali una se ne permetteva per ciascuna parrocchia, sotto la direzione e dipendenza dell'ordinario e del parroco per quanto concerneva l'esercizio delle sacre funzioni e delle fabbricerie quanto all'amministrazione dei beni e delle rendite (3).

Chè se in alcune regioni, come in Liguria, dove si ebbe costante e compiuta sottomissione alla Santa Sede, dovuta, in gran parte, al governo che in antico ne ebbero i vescovi, alla autorità eccezionale ed ai privilegi importantissimi che sempre si conservarono in seguito (4), ed in Piemonte, ove le istituzioni ecclesiastiche, segnatamente per la pietà dei primi governanti, ebbero il maggiore e più completo sviluppo (5), le confraternite poterono rivivere, quali enti ecclesiastici soggetti alle disposizioni del Concilio Tridentino, colla restaurazione dei poteri che abolirono ogni traccia della legislazione francese, ciò non è do-

---

(1) Scaduto, *Stato e Chiesa sotto Leopoldo*, n. 120.

(2) V. Zobi, *Storia civ. della Toscana*, Firenze, 1852, II, pag. 543.

(3) V. decreto italico del 26 maggio 1807; cons. Giovanelli e Calvanus, *Regolamenti per l'amm. delle proprietà ecclesiast. vigenti nelle prov. Lombardo-Venete e Parm.*, Milano, 1889, pag. 200.

(4) Lastig, *Entwickelungswese u. Quelles d. Handelsr.*, Stuttgart, 1897, I, c. 1; Canale, *Storia civile dei genovesi*, Genova, 1846, I, pag. 264 e segg.

(5) Cfr. RR. Patenti del 19 maggio 1831, n. 2394 in *Raccolta degli atti del Governo*, ed. Torino, 1847, vol. XXI, pag. 94; Sclopis, *Storia dell'antica legislazione in Piemonte*, Torino, 1853, cap. VIII, pag. 438 e segg., e segnatamente Boggio, *La Chiesa e lo Stato in Piemonte*, Torino, 1854.

vuto alla considerazione della natura oggettiva dell'istituto, ma piuttosto a ragioni d'opportunità politica in riguardo ai rapporti intercedenti tra Stato e Chiesa (1) e alla possibilità d'indole *privata* della beneficenza *pubblica* non assunta ancora a funzione sociale dello Stato.

Ma quando s'incominciò a riconoscere il dovere dello Stato di provvedere alla soluzione del grave problema del pauperismo e a vigilare, circondando di solenni garanzie l'istituto della pubblica beneficenza, a che il patrimonio destinato a sollevare le miserie e a limitare la mendicità fosse veramente erogato allo scopo suo e le istituzioni, per cui lo si doveva attingere, non fossero occasione di sperpero, motivo di discredito, fomite di male contentezze e rancori, si dovette naturalmente pensare a tutti quegli enti che eran volti ad esercitare la beneficenza e ad essa potevano utilmente tendere. È perciò che, pur riservando ad apposita legge il regolamento ed il riconoscimento delle confraternite, quali istituti di mero culto, l'indagine e la decisione sulla necessità loro come tali, si richiamarono tutte intanto alla osservanza dell'autorità civile (2), riconoscendosi così implicitamente che solo potevano avere personalità giuridica in quanto avevano quel carattere caritativo laicale che d'ordinario loro inerisce e pel quale, già nello spirito se non nella lettera della legge precedente (3), erano state classificate tra le istituzioni di beneficenza insieme colle congregazioni, cogli eremi e colle cappellanie laicali non erette in titolo. Il fatto stesso per cui non

---

(1) V. Ruffini, *Lineamenti storici delle relazioni tra lo Stato e la Chiesa in Italia*, Torino, 1891, e sulla storia in genere del diritto degli ex-Stati italiani sulle confraternite cfr. Schiappoli, mon. cit., cap. II, pagg. 51-66, ed autori citati in nota; Scaduto, voce *confraternita* in *Digesto ital.*

(2) V. art. 1, n° 6, l. 15 agosto 1867, n° 3848, sulla soppressione degli enti ecclesiastici; v. pure su esso la relazione della Commissione della Camera che, occupandosi del cap. XIII della l. 17 luglio 1890, disse che l'art. 6 della l. 15 agosto 1867 tolse valor giuridico alle norme dei sacri canoni riguardanti l'amministrazione delle confraternite, ma che la disposizione *vaga* ed *incompleta* non bastava a dar norma per l'esercizio della vigilanza da parte dell'autorità civile.

(3) V. l. 3 agosto 1862, n° 753 e cfr. l. 20 nov. 1859; v. specialmente art. 2, regolam. 27 nov. 1862, n° 1007, per l'esecuzione della l. sulle Opere Pie, 3 agosto 1862; cons. pure sulla parificazione delle confraternite alle Opere Pie di fronte alle ll. del 1862 e 1867, Cass. Torino, 12 dicembre 1883

furon soppresse e i beni loro non furon sottoposti a conversione mentre vi furon assoggettati i beni immobili d'ogni altro ente ecclesiastico (1), a parte le critiche possibili in *iure condendo* (2), conferisce a mostrare come nella mente del legislatore esse furon considerate quali enti laicali con scopo di beneficenza. E se ne ha una conferma pur nelle leggi più recenti, nell'obbligo imposto ad ognuna di esse, senza accenno alcuno alla classica distinzione tra confraternite miste e di mero culto, di concorrere col proprio patrimonio al mantenimento degli individui del comune inabili al lavoro (3), e nell'equiparazione fattane agli istituti pubblici di beneficenza in quelle disposizioni che concernono la possibilità di loro concentramento e trasformazione (4). Vero è che appunto da ciò parrebbe potersi argomentare in contrario affermando che quando il legislatore volle estendere alle confraternite di mero culto un istituto proprio degli enti di beneficenza lo fece con testo esplicito di legge e non si può quindi estendere l'equiparazione, fatta al solo scopo di poterle trasformare in istituzioni vere ed utili di beneficenza pubblica, ad ogni altro effetto di legge (5). Ma, a prescindere da mere argomentazioni letterali, che pur parrebbero sorreggere la contraria opinione in quanto nella legge si assimilano, con locuzion generica, le confraternite alle *congregazioni* e altri *simili* istituti e si equi-

---

in *Foro ital.*, 1884 (Repertorio, v. *confraternite*, n. 7); Cass. Roma, 26 maggio 1879 in *Foro ital.*, 1879, I, pag. 1029; Cass. Roma, 30 giugno 1888 in *Legge*, 1888, II, pag. 688; v. anche Cass. Roma, 27 novembre 1893 in *Legge*, 1894, I, pag. 779, *Foro ital.*, 1894, I, pag. 7 e segg.; App. Palermo, 18 aprile 1896 in *Legge*, 1896, I, pag. 768; Cass. Palermo, 9 agosto 1898 in *Riv. Amministr.*, 1899, pag. 108.

(1) V. art. 11, l. 7 luglio 1866 e comb. art. 1, n. 6, l. cit., 1867; v. pure art. 11, l. 20 luglio 1890 sull'indemaniamento dei beni delle confraternite e congregazioni romane e su esse Schiappoli, mon. cit., pag. 133 e segg.; Camino, *Le confraternite e le leggi sull'asse ecclesiastico*, Torino, 1873.

(2) V. Fiorese, *Le confraternite e la loro trasformazione civile*; Schiappoli, mon. cit., pag. 8 e segg., pag. 74 e segg.

(3) V. art. 81, l. 23 dicembre 1888 sulla pubblica sicurezza e i RR. dd. 19 nov. 1889 e 12 gennaio 1890; cons. Giustiniani, *Il concorso delle Opere Pie e confraternite alle spese pel mantenimento degli inabili al lavoro* in *Riv. dir. ecclesiast.*, VII, pagg. 65-75; v. però App. Torino, 28 ottobre 1898, in *Giurispr. Torino*, 1898, pag. 1627.

(4) Argom. art. 91 e 92, l. 17 luglio 1891, n° 6972.

(5) V. Schiappoli, mon. cit., pag. 36; Magnani, mon. cit.

parano tutte espressamente alle istituzioni pubbliche di beneficenza, il che non sarebbe stato necessario, e neppur utile, pel solo fine della trasformazione, convien considerare che la legge non designa la trasformabilità di enti che siano di mera indole privata, esclusi perciò, per loro natura, dal novero delle istituzioni pubbliche di beneficenza, che debbano avere per contenuto sostanziale lo scopo di *beneficenza pubblica*, se non per l'*origine*, almeno per l'*erogazione* (1), ma piuttosto d'istituti di beneficenza che non sono *solamente* tali per natura (2). E l'essersi avvertito che debbon rimaner ferme le leggi relative agli enti ecclesiastici conservati e alle loro dotazioni e mantenute le soppressioni e devoluzioni dalle leggi stesse ordinate, non infirma la norma sopra posta, riconoscendosi soltanto la possibilità di enti misti, in cui il culto s'accompagni alla beneficenza e ribadendosi uno dei principii fondamentali del diritto pubblico odierno, informato a giurisdizionalismo separatista per cui la giurisdizione della Chiesa vien ristretta a quello che si riferisce alle semplici funzioni spirituali, alle statuizioni relative ai sacri riti, alle cerimonie del culto, ai sacramenti ed al mantenimento della purezza della sua dottrina (3). Anzi il difetto di una legge che in particolare riguardi le confraternite toglie ogni rilevanza all'avvertimento fatto per quanto ne concerne la natura giuridica, quali persone giuridiche; e il nessun accenno fatto ad esse, come enti necessarî al culto, induce a ricercar la ragione del loro riconoscimento per parte dello Stato non nel fine *unico* o *prevalente* di culto ma in quello, civile e sociale, di beneficenza cui lo Stato le assoggetta. L'ampiezza stessa colla quale il diritto odierno dichiara la nozione delle istituzioni pubbliche di beneficenza (4) non solo consente ma impone l'inclusione tra esse delle confra-

---

(1) V. Mortara in *Legge*, 1898, II, pag. 337; cfr. Lucchini, *Le istituzioni pubbliche di beneficenza*, § 1306, pag. 1076 e sulla trasformazione in genere delle confraternite, v. Schiappoli, mon. cit., cap. V, pagg. 145-207.

(2) V. Schanzer, *La trasformazione delle confraternite nel diritto pubbl. ital.*, Roma, 1899, pag. 103, n. 1: v. contro Schiappoli, mon. cit., pag. 179.

(3) Sulla condizione giuridica delle confraternite secondo il diritto della Chiesa, v. Schiappoli, mon. cit., cap. II, pagg. 45-50.

(4) Nelle leggi precedenti si usa l'espressione *opera pia* che però l'equivale: la differenza di locuzione par unicamente dovuta all'intenzione di non escludere la beneficenza preventiva; v. Schiappoli, mon. cit., pag. 37 e Lucchini, op. cit., § 4, pag. 45.

ternite, come quelle che hanno pur sempre, almeno in parte, il fine di prestare assistenza ai poveri e procurarne in qualche modo il *miglioramento morale ed economico* (1), non distinguendo la legge, e non autorizzando quindi a distinguere, tra parte principale od accessoria, maggiore o minore, come se l'esistenza accanto ad uno scopo caritativo, quale sempre in qualche modo inerisce all'ente, d'un fine prevalente di culto, bastasse a far ritenere meramente ecclesiastico l'istituto, con l'onere di adempiere i pesi della beneficenza (2), il che solo potrebbe avvenire quando, per la concezione odierna del diritto pubblico e in virtù delle norme che ne formano il contenuto sostanziale non fosse tenuto in conto lo scopo della beneficenza per non esser esso la ragion d'esistenza dell'ente, come sarebbe delle parrocchie, nonostante che pur ad esse, secondo la tradizione ed i sacri canoni, inerisca una funzione caritativa, la quale è insita nel concetto cristiano (3). E se, per la comprension lata dei termini adoperati, non si può dubitare, come non si dubitò, doversi le confraternite tutte riguardare come istituzioni pubbliche di beneficenza in quelle regioni, in cui, per precedenti leggi e consuetudini, già eran come tali ritenute e soggette perciò alla tutela dell'autorità civile, non par potersi accogliere diversa soluzione per alcune regioni soltanto sia per la necessità di legislazione e criterî uniformi in materia sì delicata, sia per la cessata ragione del diverso ordinamento imposto solo dalla preesistente division di Stati, inducente diversità di rapporti tra Stato e Chiesa (4). Nè varrebbe invocare in contrario esenzioni o restrizioni parziali consacrate da lunga pratica, segnatamente dalla giurisprudenza subalpina (5); chè se il potere esecutivo, preoccupato forse da tali

---

(1) V. art. 1, l. 17 luglio 1890; cfr. art. 1, l. 3 agosto 1862, la cui differenza di forma, come fu rilevato (v. *Riv. amm.*, 1902, disp. 634, pag. 804), non vale a far mutare la giurisprudenza del Consiglio di Stato, che ha sempre ritenuto opere pie pur le fondazioni per patrimonî ecclesiastici.

(2) V. però Cons. Stato, 23 maggio 1893 in *Riv. benef. pubbl.*, XXI, pag. 963.

(3) V. Cons. Stato, 17 luglio 1902 in *Riv. amm.*, 1902, disp. 634, pag. 803: v. pure Ruffini, *La rappresentanza giuridica delle parrocchie*, Torino, 1896.

(4) V. però Schiappoli, mon. cit., pag. 38.

(5) V. App. Torino, 28 ottobre 1898 in *Riv. dir. eccles.*, 1899, pag. 430 e in *Giurispr. ital.*, 1898, pag. 1627; Cass. Torino, 8 maggio 1895, in *Riv. dir. eccl.*, V, pag. 612; Cass. Torino, 12 aprile 1897, *ibidem*, VII, pag. 694;

inveterate consuetudini o speranzoso di sciogliere presto la riserva fatta al tempo dell'emanazione della legge fondamentale sulle Opere pie, di risolvere cioè legislativamente i problemi tutti relativi alle Confraternite ed alla possibilità di lor riconoscimento legale, anche come enti di mero culto, richiamò o, meglio, mantenne dapprima in vigore taluni ordinamenti speciali alle confraternite di qualche regione (1), in seguito si ricredette intieramente ed in modo più consono allo spirito e al contenuto generale della legge ed ai bisogni del tempo, rilevato giustamente da elaborati pareri del supremo consesso amministrativo, non si limitò ad emanar circolari ministeriali che veramente non potrebbero aver forza di vincolare (2), ma emanò un decreto che, abrogando i precedenti, riconfermò doversi applicare a tutte indistintamente le Confraternite esistenti nel Regno, anche se di mero culto, le disposizioni legislative concernenti la vigilanza e la tutela sulle istituzioni pubbliche di beneficenza e dover, per conseguenza, i detti sodalizî dipendere esclusivamente dall'autorità civile, limitandosi l'ingerenza dell'autorità ecclesiastica alla parte meramente spirituale e religiosa (3). E questa par di fatto ragion decisiva ed irrefutabile in rispetto al diritto positivo odierno, sia che s'argomenti dal modo con cui si deve procedere per riconoscersi ad un'Opera pia od altro ente morale i caratteri d'istituzion pubblica di beneficenza (4) oppure dalla funzione e dal diritto dello Stato nel-

---

App. Genova, 7 maggio 1892 in *Riv. dir. eccles.*, III, pag. 172; App. Genova, 2 settembre 1890 in *Riv. dir. eccles.*, I, pag. 473.

(1) V. R. decreto 19 ottobre 1893, n° 586 in *Riv. dir. eccles.*, vol. IV pag. 59, ove sono espressamente richiamate in osservanza le RR. Patenti del 19 maggio 1831 per i casi in esse previsti; v. però Rignano, in *Riv. dir. eccles.*, vol. V, pag. 205 e segg. che ne afferma l'incostituzionalità.

(2) V. circolare del Ministero dell'interno, n. 25293, in data 24 agosto 1898, riconfermante la circolare 17 luglio, n. 26055, 11, 66945, ai Procuratori Generali presso le C. d'Appello e ai Prefetti. Notisi però — come fu ben avvertito — (v. Orlando, *La condizione giurid. delle istituzioni di beneficenza in vantaggio di stranieri* in *Archiv. di dir. pubblico*, 1902, vol. I, pag. 22) ch'è inutile insistere, fra giuristi che si rispettano, sull'impossibilità della circolare a valere come fonte di diritto.

(3) V. R. decreto 8 nov. 1901 in *Gazz. Ufficiale* del Regno, 1902, n° 8 (11 gennaio).

(4) Argom. art. 1-3, regolam. 5 febbraio 1891, n. 99, per l'esecuzione della l. 17 luglio 1890; cfr. art. 2, regolam. 23 nov. 1862 e argom. pure

l'attribuzione e nel riconoscimento della personalità giuridica. È ben vero che, per quanto non si possa dubitare della necessità del riconoscimento legale onde le Confraternite possano esistere quali persone giuridiche (1), non sembra sia sufficiente argomentare da essa e, tanto meno, dalla sanzione sovrana data ai loro statuti (2), per inferirne la necessità di loro soggezione all'autorità civile in tutti gli atti di lor vita. Sia pure che non esistendo tali enti se non nello Stato e per lo Stato, questo abbia il diritto di invigilare affinchè la loro vita civile si esplichi in conformità della legge del patto o delle tavole di fondazione, condizioni essenziali di loro esistenza giuridica; ma vigilanza non è tutela (3) e ciò non spiegherebbe ancora le limitazioni di capacità che loro s'infliggerebbero e il trattamento speciale che se ne farebbe, diverso da quello tenuto per le altre persone giuridiche. Diversa dunque dev'essere la ragion di decidere e d'argomentare per giungere a tal risultato: i termini e le condizioni della personalità e l'ingerenza diretta dello Stato nella determinazione loro vanno desunti non dalla funzione del riconoscimento in genere ma dalla ragion sua d'essere particolare, dal modo e dal fine per cui esso è dato a tali enti. Qualunque sia la teorica che in ordine alla struttura ed entità delle persone giuridiche si voglia accogliere, non si può disconoscere che intanto una persona giuridica può esistere ed esplicare la sua attività in quanto soddisfa e si contiene nelle peculiari condizioni poste all'esistenza sua ed all'esercizio dei diritti di cui la si riconosce capace. E come queste condizioni possono essere espresse o tacite, generali o speciali, così, a prescindere da quelle particolari che imponesse l'atto del potere sovrano con cui si conferisce la personalità, di cui non sarebbe qui questione perchè

---

art. 51, l. 17 luglio 1890. Cons. Cass. Roma, 26 marzo 1895 in *Foro ital.*, I, pag. 651; Cons. Stato, 22 novembre 1901 in *Riv. amministr.*, 1902, disp. 628, pag. 298.

(1) Scaduto, op. cit., n° 178; Rivarolo, *Il governo delle parrocchie nei suoi rapporti con le leggi dello Stato*, Vercelli, 1872, p. 343; Bertolotti, *Il parroco italiano nei suoi rapporti con le leggi dello Stato*, Torino, 1899, p. 677; v. pure Feri, *Le confraternite di mero culto e la l. 17 luglio 1890*, in *Riv. dir. eccl.*, 1902, pag. 54.

(2) V. Cons. Stato, 28 gennaio 1898, sulla motivazione.

(3) V. Gierke, *Die Genossenschaftstheorie u. d. deutsche Rechtssprechung*, Berlin, 1887, pag. 641 e segg.; Sansonetti in *Foro ital.*, 1893, II, pag. 277.

basterebbe esaminare il titolo stesso in virtù del quale esistono e possono agire, non si può affermare, per le considerazioni sopra svolte e cioè per la natura e la storia dell' istituto in esame, che, per non essere il culto una funzione sociale, lo Stato deve disinteressarsi, del tutto o quasi, dal modo di vivere e funzionare delle confraternite che non abbiano altro scopo all'infuori del culto, occorrendo preliminarmente decidere se il diritto attuale, consentendo loro la personalità giuridica, non ritenendoli enti necessarî di culto, li consideri come mere persone giuridiche private (1) o non piuttosto quali istituzioni cui inerisce *necessariamente* uno scopo di beneficenza e perciò una finalità d'ordine pubblico o d'interesse generale ch'è la ragion prima di loro riconoscimento.

Vero è che oggi, a differenza di quel che avvenne in qualche legislazione passata, in cui la forte organizzazione ed autorità della Chiesa s'era imposta in modo così prevalente alla forza ed all'autorità dello Stato da ottenerne od arrogarsi diritti maiestatici e dominare o sottrarre al suo impero il regolamento d'ogni specie di gruppi ed aggregati sociali (2), le confraternite ecclesiastiche, per non aver alcun diritto d'impero nè godimento od esercizio di diritti pubblici soggettivi, non possono considerarsi quali corporazioni di diritto pubblico. Vero è pure che le origini dell'istituto, per quanto incerte e controverse (3), riannodandosi alla figura dell' affratellamento, più o meno a tipo strettamente famigliare, parrebbero attribuir loro un carattere meramente privato. Ma le mutate condizioni dei tempi, il trasformato concetto della beneficenza legale (4), l'accresciuto potere dell'autorità sociale, la potestà giurisdizionale dello Stato sulla Chiesa in genere e sui singoli enti ecclesiastici sarebbero sufficienti a far ritenere mutata la natura giuridica dell'istituto, la cui determinazione, se, nel dubbio, può esser rimessa all'au-

---

(1) V. Schiappoli, mon. cit., pag. 18; Fadda e Bensa, *Note* alle *Pandette* del Windscheid, vol. I, pag. 793.

(2) V. Schiappoli, mon. cit., pag. 10.

(3) Friedberg e Ruffini, op. cit., § 90, pag. 373 e Scaduto, op. cit., I, n. 173, pag. 572.

(4) V. Brondi, *La beneficenza legale*, in *Primo tratt. compl. di diritto amministr.*, Milano, 1902.

torità amministrativa (1), *a fortiori* può esser decisa dal potere esecutivo in virtù dell'ufficio d'alta polizia e tutela pubblica che gli incombe, il cui contenuto è appunto determinato dalla ragion precipua cui attinge la sua autorità, dalla necessità di ordinare non solo l'*esistenza* ma ancora l'*attività* d'ogni persona in modo che armonizzino con l'utile pubblico e concorrano al retto funzionamento della vita sociale.

Nè varrebbe affermare, argomentando dalle relazioni e discussioni parlamentari che prepararono o susseguirono di poco la legge fondamentale sulle istituzioni di pubblica beneficenza (2) o dall'equiparazione assoluta dell'autonomia degli enti morali alla libertà delle persone fisiche (3), che, ove si voglia in qualsiasi modo limitare o restringere la capacità delle persone giuridiche e perciò delle confraternite, occorre una special disposizione legislativa, come se il riconoscimento o le condizioni di esso dipendessero esclusivamente dal potere legislativo. Fu già ampiamente dimostrato che, parlandosi delle persone giuridiche come enti riconosciuti dalla legge, non s'intese accennare alla necessità di riconoscimento *per mezzo* o *per virtù di legge*, ma unicamente *secondo le norme di legge* (4), tale essendo invero l'ampio significato ordinario del termine *legale* quando non vi sia ragione, come nell'ipotesi in esame, d'intendere il vocabolo nel senso stretto (eccezionale) di *ministerio legis* (5). E per quelle persone che, come avvien delle confraternite, non hanno piena

---

(1) V. specialmente Mortara, *Nuove considerazioni sulla competenza giurisdizionale in tema di concentramento e trasformazione di Opere Pie* in *Legge*, 1898, II, pag. 532 e segg.; Schanzer, mon. cit., pag. 188 e segg.; Saredo in *Legge*, 1898, I, pag. 32; cfr. c. Orlando in *La giustizia amm.*, n^i 235-241 in *Primo tratt. completo di dir. amm.*, vol. III, Milano, 1899, pag. 885 e segg.

(2) V. progetto Giolitti, 23 novembre 1893, per cui l'art. 91 doveva stabilire che finchè non sia provveduto con una legge speciale le confraternite, confratrie, ecc., non potranno compiere alcun atto eccedente la semplice amministrazione senza l'approvazione dello G. P. A. in *Atti parlamentari*, Camera, legisl. XVIII, sess. 1892-93, doc. n. 234.

(3) V. Schiappoli, mon. cit., pagg. 33-34.

(4) V. Windscheid, *Pandette* (ed. Fadda e Bensa), 1902, vol. I, nota V, pag. 811 e segg.; Chironi e Abello, *Trattato di diritto civile*, Torino, 1903, vol. I, cap. VIII, § 3, pagg. 149 e segg.

(5) V. Giorgi, *Teoria delle obbligazioni*, vol. VII (5ª ediz., 1900), n. 188, pag. 218 a proposito della surrogazione *legale*.

ed intera norma nel diritto oggettivo positivo, soccorre l'azione dello Stato, qual potere esecutivo, vôlto com'è alla difesa dell'ordine ed interesse generale (1).

Emanuele Filiberto in Germania e le ultime relazioni del Duca Carlo II di Savoia con Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto (1544-1546).

Nota del Prof. ARTURO SEGRE.

Sommario. — 1. Ostilità francesi nella fine del 1544 in Piemonte. Malanimo di Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto, contro il Duca Carlo. Altre difficoltà sabaude ed urgenza di un'efficace azione imperiale. — 2. Invio di Em. Filiberto a Worms. Il viaggio. Affronto e scortesia di Em. Filiberto col marchese. Buona accoglienza dell'imperatore al giovane principe. — 3. Nuove e maggiori ostilità del Vasto contro il Duca e lagnanze di questo. Ottime disposizioni di Carlo V verso il Duca e pratiche imperiali colla Francia a favore degli interessi sabaudi. — 4. Dispetto del re francese. Incidente ed ostilità di Paolo di Thermes contro i ministri piemontesi. Vana intromissione del Pontefice, Paolo III, a favore d'una pace generale. Morte del marchese del Vasto.

1. — La pace, che Carlo V, vittorioso sul re francese nell'autunno 1544, firmava presso Crépy, ben dimostrava all'Europa come il potente monarca riconoscesse impossibile la restituzione del cognato, Carlo II, Duca di Savoia, negli stati aviti senza la consegna della Lombardia o dei Paesi Bassi all'ardito rivale sotto forma di dote pel secondogenito della Maestà cristianissima, Carlo, Duca d'Orléans (2). Solo alcune terre occupate dopo la tregua di Nizza del 1538 venivano da ambe le parti restituite. Ma come gli imperiali, prima della catastrofe di Ceresole, eransi insignoriti di Mondovì e d'altri luoghi non privi d'impor-

---

(1) Sulla condizione delle confraternite cfr. pure Querini, *La beneficenza romana dagli antichi tempi fino ad oggi*, Roma, 1892; v. specialmente pag. 447, ove s'oppugna la condanna in blocco di queste associazioni che sono in Italia 11707 con una rendita di circa dieci milioni.

(2) V. il trattato di Crépy in Dumont, *Corps universel diplomatique du droit des gens*, vol. IV, parte 2ª, pagg. 280, 285. — Sulle trattative e sugli avvenimenti di quegli anni vedi il mio: *Carlo II di Savoia, le sue relazioni con Francia e Spagna e le guerre piemontesi dal 1536 al 1545* (estr. dalle " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino ", serie II, tomo II), Torino, Clausen, 1902.

tanza, la reciproca restituzione procurò al Duca ed ai suoi alleati danni superiori ai vantaggi (1).

D'ogni parte sorgevano lagnanze contro l'apparente pieghevolezza di Carlo V. Il re dei Romani, Ferdinando, il principe di Spagna, D. Filippo, fratello il primo, figlio il secondo della Maestà cesarea, non risparmiavano osservazioni e critiche al grande imperatore. Questi stesso non voleva spogliarsi dei Paesi Bassi, dove era nato e pei quali sentiva affetto, nè della Lombardia, base della sua potenza nella penisola nostra (2), ed era così afflitto dalle umilianti condizioni del trattato, che n'aveva riportato grave scossa alla salute (3). Solo l'agitazione dei luterani, il timore d'una guerra religiosa in Germania e la debolezza delle forze cesaree nella Lombardia avevano piegato la naturale sua avversione ad una pace che non ripristinava la condizione d'Italia prima del 1536.

Queste circostanze non isfuggirono naturalmente ai Francesi, che ben certi delle strettezze imperiali, ne approfittarono a spese dello sventurato Duca di Savoia, tanto bersagliato dalla fortuna, che mai saziavasi di perseguitarlo. Se infatti sulle prime i governanti regi sgombrarono le terre del contado di Nizza (4) ed altre del Piemonte, come Cherasco, Crescentino, Verrua, S. Germano e qualche altro luogo di là della Dora Baltea e nel marchesato di Ceva, presi dopo la tregua di Nizza, se resero al Duca di Mantova, signore del Monferrato, Alba, infinite difficoltà sollevarono per la consegna di altre terre importanti, come il castello e luogo di Cavour, presi a tradimento dopo la tregua (5),

---

(1) La sconfitta di Ceresole non ebbe le conseguenze immediate che sulle prime si temevano: vedi Desjardins, *Négociations diplom. de la France avec la Toscane* (in *Collection de docum. inéd. sur l'hist. de France*), III, 105, ecc. Cristiano Pagni a Cosimo I. Venezia, 23 aprile 1544. — *Carlo II*, ecc., pag. 56.

(2) De Leva, *Storia documentata di Carlo V in correlazione all'Italia*, vol. IV (Padova, Sacchetto, 1881), pagg. 40-41.

(3) *Id.*, IV, 40.

(4) *Arch. di Stato di Torino*, *Protocolli ducali*, reg. n. 176 (1543-49), fol. 10. Patente del Duca al gran priore di Lombardia e ad Andrea di Monfort governatore di Nizza. Vercelli, 28 ottobre 1544, pubbl. dal Gioffredo, *Storia delle Alpi marittime* (in *Mon. hist. patriae*, *Scriptores* II), col. 1449-50. Vedi a col. 1446-54 altri documenti su tale restituzione.

(5) Aleramo signore di Cercenasco, governatore di Cavour a nome del Duca, aveva consegnato a Renato, sig^re di Montéjehan, a tradimento la

perchè quel castello dominava il piano sul quale sorgevano Carignano, Pinerolo, Fossano ed altri luoghi. La malavoglia loro era tanta e così manifesta, che Niccolò Balbo, presidente patrimoniale, sconsigliò il Duca dall'eseguire i capitoli del trattato che lo riguardavano, finchè il re dal canto suo non avesse soddisfatto al dover suo (1). Ma Carlo non voleva dare ai suoi nemici nuova occasione di guerra, mentre le notizie da Milano gli dimostravano quanto grande fosse l'avversione di Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto, e luogotenente imperiale in Lombardia, per le cose sue (2). Egli quindi non si oppose allo sgombro di Mondovì (3), ma la sua acquiescenza lungi dall'indurre a miti propositi i Francesi, accrebbe la loro baldanza e li convinse che la moderazione imperiale e sabauda era solo conseguenza delle difficoltà politiche di Carlo V (4). In conclusione dopo tanti sa-

---

piazza di Cavour per 10 m. scudi e terre in Delfinato nell'ottobre 1538. V. Lambert, *Mémoires* (in *Mon. hist. patr. Scriptores*, I), coll. 893-94. — Granvelle, *Papiers d'État* (in *Collection de documents inédits sur l'histoire de France*), III (Paris, 1842), pagg. 46-47. Granvelle (Nicola Perrenot di) al Saint-Mauris, Gand, 15 gennaio 1544 (45).

(1) *Archivio di Stato di Torino, Lettere particolari.* Niccolò Balbo al Duca. Milano, 10 giugno 1545.

(2) *Id. Lettere principi, Duchi di Savoia*, m. 4°. Il Duca ad Ugo Michaud, controllore della casa del principe di Piemonte. Vercelli, 20 ottobre 1544. Ha inteso dalla lettera d'esso Michaud che gli affari suoi a Milano " sont si pitoyables quen avons grande compassion ". Perciò ne ha scritto " de bon encre " al Vasto.

(3) Gioffredo, col. 1446. Il governatore di Mondovì, Francesco sig.re di Bourges, dall'agosto 1544 era passato al governo di Nizza (v. *Arch. di Stato di Torino. Protocolli ducali*, cit. fol. 77. Vercelli, 24 agosto 1544), al posto di Erasmo Galléan Doria, morto nel luglio precedente (v. Gioffredo, col. 1444, *Arch. cam. di Torino, Conto tesorieri generali di Savoia*, reg. 205, fol. 119*t*-20. Ordine del gran priore di Lombardia, fra Paolo Simeone dei Balbi, governe del castello di Nizza, 25 luglio 1544. Si paghino 22 fiorini, moneta di Nizza, a Gio. Maglon, farmacista di Nizza, " pro viginti quatuor torchijs seu facieris munitis de tantis parmis, seu excussionibus crucis albe ducalibus, per eundem appoticarium expeditis pro obsequijs quondam Magci Domini herasmj Doria collonellj comitatus nycie "). Ma durò poco, poichè nell'ottobre vi si ritrova il Monfort. Vedi n. 4, a pag. 2.

(4) Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo* (1545-46) [vol. VIII dei *Nuntiaturberichte aus Deutschland*, 1533-59], pag. 109 (Gotha, Perthes, 1898). Mignatello ai legati del Concilio di Trento. Worms, 20 aprile 1545. " Intendo di buon luogo che li Francesi in Piemonte fanno portamenti molto

crifizi, dopo otto anni di guerre e di sofferenze fisiche e morali, il Duca nostro, abbandonato, temporaneamente, dall' imperatore (1), sembrava alla mercè dei Francesi nemici e di un protettore ostile e mal fido.

Il marchese del Vasto, bisognoso di danaro, gravava di tasse gli abitanti del Piemonte, nè valevano a temperare i balzelli le lagnanze ducali, a cui il marchese rispondeva con protesta che senza mezzi non gli era possibile frenare i disordini e le angherie militari (2). Allora la città d'Asti, per sgravare almeno i cittadini ed il contado dalle molestie continue, pattuì col Vasto il pagamento di 4000 scudi a sovvenzione delle genti durante il trimestre gennaio-marzo 1545 (3), ed i presidî che infestavano quella regione cominciarono a ritirarsi con grande sollievo degli abitanti. Ma tosto il marchesato di Ceva, il quale certo non offriva agli imperiali un adeguato compenso, pretese anch'esso lo sgombro delle guarnigioni spagnole (4), ed il marchese, non sapendo come uscire dalla situazione assai grave, timoroso certo che anche l'apparenza d'un favoritismo ad alcune città provocasse disordini nelle altre e rendesse facile qualche sorpresa dei Francesi, dispose perchè l'Astigiano riavesse le milizie allontanate da due mesi (5). Il Duca ne rimase profonda-

---

rigorosi verso li subditi del signor duca di Savoia, il che non arguisce exequution de la pace „.

(1) Gli inconvenienti della pace di Crépy riguardo al Duca erano veduti pure dal cancelliere imperiale, Nicola Perrenot di Granvelle, vedi Granvelle, *Papiers d'État*, III, 78 e ss. " Ce que lon doibt considérer sur la déclaration de l'alternative contenue au traité de Crespy „. Bruxelles, fine di febbraio, 1545.

(2) *Arch. storico Gonzaga* in *Archivio di Stato di Mantova*, *E. esterni N. XLIX*, *n. 3*, b. 1667. Vincenzo della Valle. Milano, 21 dicembre 1544. I soldati che presidiavano Tricerro eransi ammutinati per difetto di paghe e pretendevano contribuzioni dal Vercellese.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Memorie politiche relative all'estero in genere*, m. 1°. Ordine del Vasto ai capitani spagnuoli. Milano, 20 dic. 1544.

(4) *Id. Lettere particolari*. Niccolò Balbo al Duca. Milano, 22 dicembre 1544. — V. anche ivi notizie sulla miseranda condizione di Asti. Per Ceva v. le lagnanze del governatore Giulio Cesare Pallavicino al Duca in Promis: *Cento lettere concernenti la storia del Piemonte dal 1544 al 1592* in *Miscellanea di storia italiana*, vol. IX (1870), pag. 521-26. Ceva, 3 gennaio 1545.

(5) *Biblioteca di S. M. in Torino. Manoscritti di storia patria*, n. 1072. Il Vasto al Duca. Milano, 4 marzo 1545.

mente accorato. Il marchese più volte aveva con lui ostentato pubbliche mancanze di riguardo (1), come se le sorti sabaude fossero del tutto in sua mano. D'altro canto l'imperatore, assorto negli affari di Germania e nelle pratiche del matrimonio tra Maria, sua figlia, ed il Duca d'Orléans, pareva scordare le cose della penisola e del Piemonte in particolare. Carlo, pur inviando a Vigevano, dove nella seconda metà di febbraio trovavasi il marchese, il vescovo di Ivrea, Filiberto Ferrero, e Tommaso Valperga, commissario imperiale, colla domanda (2) che il Piemonte e l'Astigiano fossero liberati delle milizie che ne divoravano le risorse, decise di attuare un disegno, certo da tempo accarezzato, la spedizione cioè dell'unico figlio, Emanuele Filiberto, alla corte cesarea (3). L'utile grande che al ducato poteva venire dalla presenza di Emanuele Filiberto in Germania fu compreso senza difficoltà dai Piemontesi, che durante il febbraio stesso 1545, nell'assemblea dei tre stati tenuta a Vercelli, votarono un sussidio di 7000 scudi pel viaggio del giovane principe (4).

Occorreva infatti che l'imperatore pensasse, e con sollecitudine, agli affari sabaudi, occorreva il Vasto sapesse che alla corte cesarea si faceva conto del Duca e come parente e come alleato. Già nel 1543 Carlo V, di passaggio per l'Italia settentrionale, erasi sforzato di provvedere alle modalità delle rela-

---

(1) V. *Carlo II, ecc.*, pag. 14.

(2) *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit. Vigevano, 27 e 28 febbraio 1545. " In quest'hora ho inteiso come heri sira al tardi gionse el vescovo de Inverea (*sic*) et m^r^ Thomasso Valperga, mandati qua da la Ecc^tia^ del s^r^ Duca di Savoya a negotiare con lo Illmo S^r^ marchese per levarli soldati del Piemonte et Astesano. Questa matina debbeno havere audientia da la Ecc^tia^ del s^r^ marchese. M'è stato detto se lamentano molto del pocho rispetto ussa il s^r^ Marchese al stato del s^r^ Duca di Savoya et tengono in commissione de dirlo al p^to^ s^r^ Marchese „.

(3) Tonsi, *De vita Emanuelis Philiberti.* Milano, 1596, pag. 35. — Ricotti, *Storia della monarchia piemontese,* vol. I (Firenze, Barbera, 1861), pag. 275.

(4) *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit. " In Vercelli sè fatto li tre stati per trovare denari aciò il s^r^ Principe di Piemonte possa andare da la M^tà^ Cesarea a negotiare le cose del suo stato. S'è detto s'è stabilito nelli tre stati, como lo Illmo s^r^ Duca trova li denari, che li populli li restituerano con uno pocho di tempo, s'è resolto dar al s^r^ Principe sette milia scuti con el modo detto di sopra „.

zioni tra il cognato suo ed il Vasto, specie circa l'applicazione dei balzelli occorrenti alla tutela del Piemonte, ed aveva elevato la pensione annua, fissata da tempo al Duca sulla camera di Milano e pagata a spizzico e talora sospesa, da 20 a 25 mila scudi annui (1). Ma i buoni intenti di Carlo V erano stati inefficaci, e le sgarberie ed insolenze dei suoi ufficiali, la tardanza continua nel pagamento della pensione, e gli arbitrii dei soldati avevano spinto il Duca fin dalla primavera del 1544 a supplicare l'imperatore con un lungo memoriale, perchè togliesse di mezzo in forma definitiva tanti malanni coll'accordargli il godimento delle rendite di Como e delle terre dipendenti. Carlo II voleva fossero insediati ufficiali sabaudi, e così le orribili strettezze in cui egli ed il principe di Piemonte coi pochi fedeli versavano, se non fine intiera, avrebbero ricevuto grande diminuzione. Erano quelli i giorni in cui la battaglia di Ceresole aveva per un momento fatto temere la perdita di tutta la Lombardia. Carlo V, pur reiterando al Vasto l'ordine di soddisfare al possibile il cognato suo, in forma garbata erasi rifiutato di consegnare al Duca Como (2). Ma nel 1545 la pace durava con Francia. La presenza di Em. Filiberto poteva ottenere dall'imperatore quanto i memoriali, le lettere e gli ambasciatori non valevano a strappare dai ministri cesarei.

Un altro benefizio poi e di non piccola entità il viaggio del giovane principe forse avrebbe recato al Duca. Tra le tribolazioni di maggior conto che affliggevano il Piemonte meritavano posto segnalato i molti resti, anzi l'esistenza tenace, dell'ordinamento feudale nella patria nostra. Il conte di Crescentino, Gio. Andrea Tizzone, superbo ed ambizioso signore, ribelle all'autorità ducale, come altrove narrammo (3), aveva ottenuto dal Vasto, sempre nel febbraio 1545, il consenso, a lungo dibattuto,

---

(1) V. *Carlo II, ecc.*, pagg. 38-39. — Nel 1536 la pensione era di 40 m. scudi, vedi *id.*, pag. 3, nota 2.

(2) *Arch. di Stato di Torino. Materie politiche. Negoziazioni con Svizzeri*, mazzo 2° da ordinare. In un registro col titolo " Historia di trattati diversi de Duca di Savoia con i ..... cantoni „ (i puntini sostituiscono una raschiatura nel manoscritto). Spira, 9 giugno 1544.

(3) *La politica sabauda con Francia e Spagna dal 1515 al 1533* (estr. dalle " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, serie II, tomo I). Torino, Clausen, 1900, pagg. 66-67.

di erigere una fortezza a Crescentino (1) per imbrigliare i suoi sventurati dipendenti e vendicarsi di essi, che avevano in una sommossa massacrato il precedente signore della terra, nipote suo. La questione del conte cogli abitanti di Crescentino si dibatteva da lunghi anni, fin da quando nel 1529 aveva il Duca assunto la protezione della sventurata città, che era stata assolta da ogni pena per le cose passate (2). Il Tizzone, nonostante la fermezza dimostrata allora dal Duca, pretendendo che solo spettasse a lui il diritto di grazia ai suoi dipendenti (3), aveva inveito contro gli sventurati con maggiore accanimento e s'era appellato all'imperatore. La causa era durata lunghi anni (4), durante i quali la Duchessa Beatrice e l'ambasciatore imperiale a Torino, Gutierrez Lopez de Padilla, d'accordo con Antonio de Leyva, allora governatore della Lombardia, avevano dato sentenza molto conciliativa (5). Ma questa al Tizzone non era piaciuta. Esso aveva quindi interposto nuovo appello alla Maestà ce-

---

(1) *Biblioteca di S. M. in Torino*, loc. cit. Vasto al Duca. Milano, 14 febbraio 1545.

(2) Buffa, *Breve cenno storico della città di Crescentino con appendice e documenti*, Torino, Arnaldi, 1857, pag. 56. — *La politica sabauda*, loc. cit.

(3) Tallone, *Un vercellese illustre del sec. XVI, Gian Tomaso Langosco di Stroppiana, gran cancelliere di Em. Filiberto* in " Bollettino storico-bibliografico subalpino „, V (1900), edito nel 1901, pagg. 158-59, dove si discorre sulla questione crescentinese. Al Tallone sfuggirono i documenti da me editi sul Tizzone in *La politica sabauda*, loc. cit.

(4) *Arch. di Stato di Torino, Vienna, Lettere ministri*, m. 1°. Balbo a Bartolomeo Riquier. Il Duca e la Duchessa Beatrice a id. Torino, 29, 30 marzo, 23 aprile e 22 maggio 1535.

(5) *Id.*, Niccolò Balbo al Riquier. Torino, 1° maggio 1535. " Ceterum dum nuper Ill^{mus} D^{us} noster atque rarissimus (?) hominum Anthonius Leyva, suis satelitibus stipatus, Vercellis convenissent, ita actum est ut res prefati crescentini comitis cum prefato Illmo Domino nostro recte fuerint composite, intercedente Illma D. nostra atque mag^{co} Cesareo legato. Qua propter agentibus pro ipso comite apud Cesarem ultro insistendum non erit, nec tibi obsistendum. Jussu enim Illu^{mi} D. nostri comes ipse in possessione iurisdictionis et imperij crescentinarum opidi ceterorumque bonorum sibi spectantium nunc deffenditur ac. ut agunt, manutenetur „. — Il Duca a id. (1545). La sentenza sull'affare venne data " plus en la faveur du conte, que de mon procureur, reservé le point des gres, de la quelle neantmoins fust appellé de sa part et interiecté lappel par devant mon conseil resident, là ou la cause est pendant et lon y procède juridisquement „.

sarea (1) e la questione era continuata e continuava senza che mai si venisse a conclusione. Nel gennaio 1538 da una commissione di giudici composta di Pietro Gazino, del gran cancelliere Girolamo Aiazza e di Carlo di Mombello, conte di Frossasco, era stato concesso al Tizzone il permesso d'innalzare una fortezza nel paese. All'opposizione che tosto avevano fatto Crescentino ed il Duca (2), il conte erasi ancora rivolto a Carlo V ottenendo che l'azione nuova d'appello fosse rimessa al senato di Milano (3), dove il Balbo, il chiavaro Gringallet e Gio. Girolamo Bulgaro si erano recati a sostenere gli interessi ducali (4). Infine nel 1545 aveva il conte strappato all'imperatore un ordine pel Vasto, nel quale la costruzione della fortezza presso la porta di Crescentino detta di Verrua era concessa. Le proteste del Duca non avevano potere sul marchese (5), e come l'imperatore era la causa prima della vittoria di Gio. Andrea Tizzone, anche in tale materia il viaggio di Em. Filiberto in Germania poteva risollevare il prestigio assai scosso del nostro principe.

Infine era importante che l'imperatore si risolvesse ad eseguire in qualche modo i capitoli di Crépy, dai quali soli il Duca sperava il ricupero dei suoi Stati. Fin dagli ultimi del 1544 il signore di Bressieu, Lodovico Gallier, principale favorito della corte ducale, era andato in ambasciata alla corte francese e poi a quella cesarea (6), dove poco prima l'avevano preceduto il maresciallo di Savoia, Renato di Challant, e Gio. Tommaso Langosco, conte di Stroppiana (7). Ma come il Challant ed

(1) Buffa, pagg. 58-59. — *Arch. di Stato di Torino*, lett. cit. del Duca al Riquier.

(2) Buffa, pag. 59. Tallone, pag. 159.

(3) *Id.*

(4) *Arch. camerale di Torino. Conto tesor. e ricev. di Piemonte*, reg. n. 35, fol. 166 *t.*, 167 *t.*, 169 *t.*

(5) *Bibl. di S. M.* Ms. n. 1072. Vasto al Duca. Milano, 14 febbraio 1545. Da questa lettera parrebbe il Vasto alquanto indeciso sul da fare. — Sui Tizzoni di Crescentino vedi anche Dionisotti, *Il comune di Desana e la famiglia patria dei Tizzoni*, Torino, Bocca, 1895, pagg. 72-74.

(6) *Biblioteca Nazionale Marciana di Venezia. Mss. italiani*, classe VII, cod. DCCCC XCII, fol. 170. Bernardo Navagero al Doge. Bruxelles, 8 febbraio 1545. " Partì già doi giorni mons^r di Bussì, che fu prima in Franza, et poi è venuto a questa corte per nome dell'Illmo di Savogia ".

(7) *Arch. camerale di Torino. Conto tes. e ricev. di Piemonte*, reg. n. 35, fol. 166 *t* e 167.

il compagno suo non erano riusciti a risultato alcuno, così il Bressieu non potè scoprire le intenzioni del grande monarca (1). La dieta raccoglievasi allora a Worms, e Carlo V col suo cancelliere, Nicola Perrenot, signore di Granvelle, più non attendeva che alle pratiche coi tedeschi. Lo Stroppiana seguì il Granvelle, che precedette l'imperatore a Worms (2), mentre il Challant rimase in osservazione presso Carlo V. Egli aveva un buon sostegno nel gran maggiordomo imperiale, Filiberto de la Baume, signore di Montfalconnet, suddito ducale, il quale mostrava sempre alle cose del suo principe naturale interesse sincero (3). Ma nessun avvenimento lasciava supporre che la corte

---

(1) *Biblioteca* cit., lett. cit. del Navagero. " ... nè ha portato altro che buone parole di questa M^tà^ et di mons^r^ di Granvelle, piene di speranza ".

(2) *Arch. di Stato di Torino. Vienna. Lettere ministri*, m. 1°. Challant al Duca. Bruxelles, 23 marzo 1545. — Il Duca munì lo Stroppiana di una credenziale per l'elettore di Brandeburgo, Gioacchino di Hohenzollern. Vedi *id. Lettere principi, Duchi di Savoia*, m. 3°. Il Duca a Gioacchino. Vercelli, 1° febbraio 1545. Alla dieta di Worms " hunc Thomam Stropiana de Industria adlegamus, primum ut officio serviamus nostro, deinde ut miserandas fortunas nostras, que nondum in tranquilium collate sunt, Ill^me^ et Excell^me^ Dominationi vestre commendet, quam supplex oro, ut eidem Thome parem ac nobis fidem adhibere dignetur, quemadmodum confidimus ". — Circa il viaggio del Granvelle con suo figlio, Antonio, vescovo di Arras, a Worms, vedi Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo*, cit. pagg. 73-74. Girolamo Verallo, arcivescovo di Rossano, al card. Alessandro Farnese. Bruxelles, 22 febbraio 1545.

(3) *Archivio cit. Vienna. Lettere ministri*, m. 1°. Montfalconnet al Duca. Bruxelles, 23 marzo 1545. Lett. cit. del Challant. — Il Montfalconnet aveva più volte dato prova del suo affetto al Duca. Tra l'altro dal 1535 era creditore di 200 scudi imprestati a Gio. Bartolomeo Riquier, amb^re^ del Duca presso l'imperatore, durante l'impresa di Tunisi, e per 5 anni, fino al 1540, ne aveva pazientemente atteso la restituzione. V. *Arch. camerale di Torino. Conto tes. e ricev. di Piemonte*, reg. 322, fol. 164 *t*—65. Ordine del Duca da Bruxelles, 25 settembre 1540. " Comme soit que pieca et durant le voyage de lempereur à thunes le baron de montfalconet, nostre chambellain et gouverneur de bresse, ait presté la somme de deux cens escus dor au collateral Riquier, suyvant alors sa M^té^ pour noz affairez, ainsy quappert par quattre de cedules que ledict baron a remys entre mains du s^r^ de bellegarde du temps quil estoit nostre ambassadeur auprès de sadicte M^té^ en espaigne, comme il nous a faict apparoir par une certiffication dudict s^r^ de Bellegarde soubz escripte de sa main a tolledo le vj^e^ jour de juing en lan mil cinq cens trente neufz, La quelle il nous a remise, affin de par vertu dycelle retirer les susdictes pollice. Or est il que veuillant Icelluy baron

imperiale eseguisse i capitoli di Crépy, per quanto dalla Francia le sollecitazioni fossero incessanti, desideroso com'era il re Francesco che suo figlio, il duca d'Orléans, ricevesse finalmente i Paesi Bassi o la sospirata Lombardia (1). Il Challant adunque, persuaso anch'egli che solo qualche potente stimolo poteva superare le difficoltà di quei giorni, sollecitò per lettera il viaggio di Em. Filiberto. La corte cesarea attendeva, dopo molti indugi, il duca d'Orléans. La presenza del figlio di Beatrice di Portogallo, amata così teneramente da Carlo V, avrebbe potuto nell'animo dell'imperatore meglio di qualunque ambasciata (1). Carlo Solaro, signore di Moretta, oratore francese, lasciò il 24 marzo Bruxelles portando al suo re la promessa, che i capitoli riguardanti il matrimonio e la dote dell'Orléans sarebbero stati puntualmente eseguiti. Il Montfalconnet traeva da queste promesse buona speranza che il Duca in epoca non lontana fosse reintegrato (2).

2. — La partenza di Emanuele Filiberto venne stabilita allora per gli ultimi di aprile (3). Il marchese del Vasto ne prese tosto ombra: cosciente dei numerosi affronti e delle umiliazioni imposte al Duca, temeva le conseguenze che dalle lagnanze dirette del principe sarebbero nate a suo danno nelle deliberazioni imperiali. Cercò di rabbonire il Duca, e mentre durante l'intiero anno precedente mai aveva contentato lo sventurato sovrano, lasciandosi vanamente supplicare dallo stesso principe di Piemonte, che più volte era andato da Vercelli a Milano (4), dispose tosto perchè le milizie alloggiate nell'Asti-

---

de montfalconet estre dheuement satisfaict, nous vous ordonnons et mandons . . . „.

(1) Lett. cit. del Challant. — *Arch. di Stato di Torino*, loc. cit. Rebuffi al Duca, Bruxelles, 23 marzo 1545.

(2) Lett. cit. del Montfalconnet. — Sui risultati avuti dal Moretta, vedi Desjardins, III, 149. Bernardo de' Medici a Cosimo I, Amboise, 27-30 marzo 1545. — Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo*, pagg. 76, 79. Verallo a Farnese, Bruxelles, 27-28 febbraio 1545.

(3) *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit., b. 1667. Vincenzo della Valle. Casale, 20 aprile 1545. " Lo Illmo Sr Principe di Savoya se partirà fra otto giorni per andar da sua M^tà, secondo a scritto allo Illmo Sr Marchese „.

(4) Vi andò Em. Filiberto nell'agosto 1544. V. *Carlo II, ecc.*, pag. 57. — Vi ritornò nell'ottobre, secondo appare dal contenuto della lettera del

giano, nel Vercellese e nel Monferrato, salvo 1000 uomini, partissero dalle regioni subalpine e riparassero su quel di Lucca e Siena (1). Ma i Lucchesi protestarono (2), ed il marchese contro sua voglia dovette restituire all'Astigiano quasi tutte le genti tolte o pronte alla partenza, avviando il resto sul Biellese (3), sola regione che meno profonde recasse le vestigia dell'occupazione straniera. Gli abitanti di Asti e del contado, vieppiù esasperati dall'amaro disinganno, fecero minaccia di negare al principe di Piemonte, loro signore, un donativo promessogli di 1200 scudi (4).

Riusciti vani i suoi disegni, il Vasto, desideroso di sorvegliare le mosse del principe alla corte cesarea, gli fece intendere che avrebbe provato contento di accompagnarlo nel lungo viaggio. Em. Filiberto non nascose, sembra, in pubblico la ripugnanza sua e l'avversione che sentiva pel marchese in modo, che il Vasto ne rimase ferito. Il vescovo d'Aosta, Pietro Gazino, allora in missione a Milano, suggerì al Duca di accelerare la partenza del principe, allo scopo che il disdegno e l'affronto fatto al marchese non apparissero così manifesti (5). Sembra che

---

Duca al Michaud del 20 di quel mese, di cui vedi a pag. 3, n. 2. — Un'ultima volta andò il 30 novembre, vedi *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit., b. 1666. Vincenzo della Valle, Milano, 1° dicembre 1544. " Lo Illmo s^{r} principe di Savoya gionse heri sera a Milano. Se dice è venuto per visitar lo Illmo s^{r} Marchese. Niente di meno tengo con pretexto di visitatione negotiarà alchuno particulare per il stato suo. Et con sua Ecc^{tia} gli è venuto il vescovo di Vercelli ".

(1) *Arch.* cit., b. 1667, Genova, 10 e 15 aprile 1545.

(2) *Arch.* cit., Pavia, 2 maggio 1545.

(3) *Id.* Vespasiano Bobba, Milano, 4 giugno 1545. — Il commissario Tommaso di Valperga rinviato al marchese per intendere la conferma dello sgombro dall'Astigiano, ebbe la sorpresa di una risposta scoraggiante. Disse il Vasto " molto caldamente che havevano refferito la bugia, per che non vedeva forma per puoter cussì far, dil che assai se ne doleva ". *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari.* Valperga al Duca. Pavia, 8 maggio 1545.

(4) *Bibl. di S. M.*, loc. cit. Oddone Provana al Duca. Asti, 26 giugno 1545. — Il governatore d'Asti, Giacomo Folgore di Piossasco, sig^{re} di Scalenghe, in fin di vita, raccomandava nel mese di maggio al Duca la sua famiglia, ed il giorno dopo il figlio Carlo annunziava che il padre era morente, vedi *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari.* Giacomo e Carlo al Duca. Asti, 7 e 8 maggio 1545.

(5) *Arch. di Stato di Torino. Lettere vescovi. Aosta.* Gazino al Duca, Milano, 24 aprile 1545. " Hogi parlando con un mio grande amico, mi ha

invece il Duca siasi appigliato al rimedio opposto, abbia atteso cioè la partenza del marchese, che andò a Worms accompagnato dai principali signori da lui dipendenti, il conte Filippo Torniello, Gio. Battista Speciano, Lodovico Vistarino, D. Garcia Manrique, Pirro Colonna, Cesare Maggi ed altri (1), avviando in seguito il figlio suo.

Em. Filiberto lasciò dunque Vercelli il 27 maggio. I mezzi suoi erano scarsi tanto, che il Duca raccomandava gelosamente ad Ugo Michaud, controllore della casa del principe, di evitare con cura le spese non indispensabili (2). La sua missione aveva un fine elevato ed importante, come gli avvenimenti narrati già fanno supporre. Egli doveva, in presenza del Challant, raccomandare a Carlo V le cose sabaude, ed il vescovo di Nizza, Gio. Battista Provana dei signori di Leynì, che lo accompagnava insieme ad Amedeo di Ginevra, signore di Lullin, governatore, e con altri, aveva speciale incarico di offrire all'imperatore i servizi del nipote nel suo esercito. Nessuna deliberazione tuttavia era lecito agli ufficiali suddetti di prendere senza

---

detto chel s^r marchese non he troppo contento di quello che il s^r principe non si contenti vadi di soa compagnia alla corte. Così mi hè parso avertirne V. Exª. afin che vollendo expedir esso s^r principe, V. Exª lo expedisca al più presto che poterà et partendosi presto il s^r marchese non poterà esser presto per viagiare, si haverà legitima scusa non andar seco „. — *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit., Casale, 29 agosto 1545. " Il s^r Principe di Savoya se dice partirà sey giorni avanti o vero doppoy, come meglio sarà a satisfactione de lo Illmo s^or Marchese „. — Se il Duca avesse saputo che l'ambasciatore imperiale in Francia, il Saint-Mauris, in quei giorni comunicava all'imperatore l'invio d'un messo regio a Vercelli e assicurava che vi era " peu d'assurance du duc de Savoye „ (Granvelle, *Papiers d'État*, III, 145 e 148), si sarebbe guardato dal permettere col Vasto sì aperta scortesia.

(1) *Arch. storico Gonzaga*, lett. cit.

(2) Sul viaggio di Em. Filiberto, vedi Tonsi, *De vita*, ecc., pagg. 35-36. — Cambiano, *Historico discorso* (in *Mon. hist. patr.*, *Script.*, I.), col. 1096. — Ricotti, *Storia mon. piem.*, loc. cit. e II, 10-11. — Segre, *Un gentiluomo piemontese della prima metà del secolo XVI, Giacomo Provana di Leynì* (estr. dal " Giornale Ligustico „). Genova, Sordomuti, 1897, pag. 19. — Vaccarone, *Em. Filiberto, principe di Piemonte, alla corte cesarea di Carlo V imperatore* (1545-51) in " Miscellanea di storia italiana „, serie 3^a, tomo V (1900), pag. 279. Colpisce in quest'ultimo studio, pur utile, la quasi assoluta ignoranza delle pubblicazioni recenti sull'età dei personaggi dall'autore studiati.

l' intervento dell' ambasciatore residente alla corte cesarea, Gio. Tommaso Langosco di Stroppiana (1). A Milano Em. Filiberto si trattenne alcuni giorni con dispiacere del buon Duca, che mandò rimproveri al Lullin ed al vescovo di Nizza. Non ignoravano essi, così era scritto nella lettera ducale, che il tesoriere Rebuffi teneva danaro solo fino agli ultimi di giugno. Ora " seroit bien mal seant que le filz allast contre la voulunté et les parolles du père „ (2). Oltre all'economia finanziaria importava al Duca che il principe giungesse alla corte non più tardi e forse prima del marchese del Vasto (3). Il viaggio venne quindi accelerato; passata la Lombardia entrò il principe negli Stati della Repubblica Veneta, ed ebbe a Brescia onori e feste notevoli. Quindi per Lonato, Desenzano, Peschiera e le Chiuse di Verona entrò nel Tirolo (4). Fu sventura che un'indisposizione lo trattenesse prima ad Innsbruck (5) e quindi presso Ulm, a Kempten (6); il Vasto riuscì così a precederlo nella corte im-

---

(1) *Arch. di Stato di Torino. Materie politiche relative all'estero in genere*, m. 1°. Memoriale al Michaud, Vercelli, 28 maggio 1545. Il principe si contenti del danaro fissatogli pei minuti piaceri, non cerchi di più, perchè è difficile trar danaro " mesmes de ceulx de ceste ville, qui se font tiré l'oreille „. — Oltre al Lullin, al vescovo di Nizza ed al Michaud, i principali ministri di Em. Filiberto erano Giacomo Provana dei sig^{ri} di Leynì, maggiordomo del principe, Carlo di Mombello, conte di Frossasco, gran scudiere, e Gio. Francesco Rebuffi, tesoriere, vedi le op^{e} cit^{e}, a n. (3). — Vedi sullo Stroppiana, *id. Lettere principi. Duchi di Savoia*, m. 4°. Il Duca al Michaud, Vercelli, 14 giugno 1545.

(2) *Id.*, Vercelli, 30 maggio 1545. — Dai *Conti* del tesoriere apprendiamo che a Milano il principe fece un debito di 500 scudi d'oro. Vaccarone, pag. 280.

(3) *Id.*, lett. cit. del 28 maggio. — Il principe era atteso a Worms fin dall'aprile, v. *Arch. storico Gonzaga, Esterni, N. II, n. 3*, b. 442. Capilupi al card. Ercole Gonzaga, alla Duchessa Margherita Paleologo ed a Ferrante Gonzaga. Worms, 28 aprile 1545. " Hoggi si è presa la casa per lo card^{le} Farnese. Se verrà il Marchese del Vasto et Monsr de Orliens, e 'l principe di Savoia, come senza fallo egli s'aspetta, non si sa anchora dove si possano accommodar, tanta carestia ci è di bone stanze „.

(4) Vaccarone, pagg. 280-81.

(5) *Id.*, pag. 282.

(6) *Id.*, pag. 283. — *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit. Capilupi ad Ercole Gonzaga ed alla Duchessa. " Il principe di Savoia è anchora di là da Olma ad un loco detto Schempt (*Kempten*) verso Ispruch, dove dal male fu sforzato affermarsi, nè anchora si metteva in camino „. — *Arch. di Stato di*

periale di cinque giorni (1). Il 23 luglio al suo arrivo, Em. Filiberto fu ricevuto alle porte di Worms dal marchese in persona coi principali della corte di Carlo V, del re dei romani, Ferdinando, e degli altri principi tedeschi (2). L'abito suo era così sontuoso che tutti ne rimasero colpiti, ma i presenti notarono anche la freddezza che Em. Filiberto dimostrò al Vasto. Il giovane principe anzi, giunto al palazzo imperiale, mentre il Vasto teneva sempre la sinistra, scese da cavallo ed entrò senza volgersi a fare un cenno solo di commiato al luogotenente di Carlo V (3). Em. Filiberto nella sua giovane età ancora ignorava la dissimulazione. Egli non riusciva a frenare lo sdegno contro il marchese, che riteneva causa principale delle sofferenze paterne. Giustizia avrebbe voluto ch'egli riconoscesse pure le condizioni difficili cui il governo di Lombardia, tenuto dal marchese, versava da lunghi anni, e non vedesse nel contegno del Vasto sola manifestazione d'antipatia verso il Duca ed i Piemontesi. Non foss'altro, la prudenza avrebbe potuto suggerirgli atteggiamento cortese verso chi poteva fare altro male al padre suo. Gli anni e le traversie guarirono in seguito il giovane ed intelligente principe dalle manifestazioni subitanee.

Carlo V accolse il nipote con molta affabilità (4), gli ac-

Torino, lett. cit. Il Duca al Michaud, Vercelli, 19 luglio 1545. Esprime il rammarico per la malattia del figlio.

(1) Gachard, *Collection des voyages des souverains des Pays-Bas*, vol. II, (Vandenesse, *Journal des voyages de Charles-Quint de 1514 à 1551*). Bruxelles, Hayez, 1874, pag. 309. Il 18 luglio " arriva audict Wormes le marquis del Gasto, gouverneur pour sa M^té de l'estat de Milan ".

(2) Gachard, loc. cit. Vaccarone, pag. 284. — Sull'arrivo ed accoglienza ricevuta dal principe a Worms, vedi anche Tonsi, pagg. 35-36. — Il ritardo di Em. Filiberto fu veramente grande. V. Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo*, cit., pag. 615. Il vescovo di Tortona al Duca Cosimo de' Medici. Worms, 29 maggio 1545, e pag. 667. Navagero e Morosini al Doge di Venezia. Worms, 27 giugno 1545. — Infine ricorda l'arrivo un dispaccio particolare del Navagero stesso. V. *Biblioteca Marciana di Venezia*, cod. cit., fol. 230. Worms, 23 luglio 1545. " È gionto a mezogiorno il principe di Savogia ".

(3) *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit. Worms, 24 luglio 1545. V. *App. Doc.* 1°.

(4) Tonsi, loc. cit. e *Arch. storico Gonzaga*, loc. cit. Worms, 27 luglio 1545. Diede Carlo V una caccia per festeggiare il nipote, ed alla medesima intervennero il re dei Romani, gli altri principi, il cardinale vescovo

cordò subito una pensione di 500 scudi mensili (1), ed il 28 luglio ricevette dal medesimo un ampio memoriale, dove erano esposte le lagnanze tutte contro i ministri cesarei e le angherie sofferte. L'imperatore promise di esaminare e por mente al contenuto, ma la presenza del marchese temperò l'efficacia dello scritto (2). Il Duca quando conobbe le prime risposte del cognato si lagnò amaramente. Perchè, scrisse al Michaud, non aveva suo figlio presentato all'imperatore una lettera datagli nel punto di partire, e detto senz'altro: " Sire, je ne vouldroyt pour chose de ce monde importuner v. M., mais la paouvreté ou se trouvent les subgectz de mons^r père, le travail et le poigne ou il est, me constrainct supplier trèshumblement v. M. il vouloir prouveoir et avoir tousiours le père et le filz en vostre bonne grace et recommandès „? (3). Non di promesse abbisognare egli, ma di pronta azione!

3. — Il marchese del Vasto fece ritorno a Milano, non poco indispettito contro il principe e pieno di maltalento verso il Duca. Gravò la mano sui Piemontesi ed alle lagnanze di

---

di Augusta ed il Vasto. — Il Brantôme [*Oeuvres*, ed. Lalanne, vol. 2° (Paris, Renouard, 1866), pag. 143], notò anch'esso l'amore di Carlo V ad Em. Filiberto e malignamente fece questa chiosa: " (j'en dirois bien aucunes raisons secrettes, mais je m'en passeray bien) „, accennando senza dubbio alcuno alle note simpatie di Carlo V per la bella e defunta madre di Em. Filiberto, Beatrice di Portogallo, sua cognata. — Sulle male voci corse intorno alle relazioni di Beatrice con Carlo V, vedi Luzio, *Un pronostico satirico di Pietro Aretino* (MDXXXIII). Bergamo, Istituto Italiano di arti grafiche, 1900, pagg. 66-67.

(1) V. *App. Doc.* 1°.

(2) V. il testo del memoriale in *Arch. di Stato di Torino. Registri lettere della corte*, m. 1545-1550. *Registro di lettere dirette al Duca*, 7 giugno 1545-19 dicembre 1547, fol. 7*t*-13*t*. pubbl. dal Ricotti, *Degli scritti di Em. Filiberto, Duca di Savoia*, in " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino „, serie 2ª, tomo XVII, pagg. 105-6 (doc. 3), e *id.*, *Storia mon. piem.*, I, 275-76. Il Ricotti crede che il marchese sia andato in Germania dopo l'arrivo del principe. — Durante l'assenza del Vasto da Milano, D. Raimondo di Cardona, che teneva l'*interim* del governo, lasciava crescere le angherie militari in Piemonte, anzi dava autorità ai soldati di vivere a discrezione nelle terre da essi presidiate. V. Promis: *Cento lettere*, pag. 528. Il Duca ad Em. Fil. Vercelli, 19 giugno 1545.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere Principi, Duchi di Savoia*, loc. cit., Vercelli, 9 agosto 1545.

Carlo II, che voleva diminuite le imposte dei suoi sudditi, costretti a mantenere i soldati in tutto, rispose in forma tale che il Duca, fuori di sè dallo sdegno, ne mandò notizia in Germania, chiedendo se era proprio volontà dell'imperatore ch'egli fosse ridotto a simili estremi e mancasse d'ogni cosa più necessaria (1). Ma non fu quello l'ultimo affronto del Vasto. Aveva questi stabilito di ridurre nella cittadella di Vercelli artiglieria e soldati tolti da S. Germano. Il Duca si oppose. Il Vasto allora rispose con marcata freddezza che era bene ordinasse ai suoi di conformarsi alla volontà da lui manifestata, poichè in caso diverso avrebb'egli agito di suo arbitrio (2). La oltracotanza del marchese oltrepassava i limiti! Pareva ch'esso ritenesse onnipotente la sua autorità e che l'opera di Em. Filiberto e dei ministri sabaudi in Germania fosse nulla. Carlo indirizzò allora al potente cognato una protesta sollecitando provvedimenti (3).

Il memoriale del Duca non giungeva a Worms in tempo inopportuno. Carlo V da alcuni mesi sembrava abbracciare con calore più intenso gli interessi del cognato. Era morto il 9 settembre 1545 il duca d'Orléans, Carlo (4), sicchè d'ogni impegno matrimoniale e della conseguente dote rimaneva libero l'impe-

---

(1) *Id.*, m. 3°. Il Duca ad Em. Filiberto. Biella, settembre 1545. Comunichi all'imper. quanto ha esposto nella lettera, " du quel Je ne croy estre lintention que mes subgectz doibient continuer à donner entretenement aux soldatz, comme ledict s^r^ marquis fait mention par sadicte lettre „.

(2) *Bibl. di S. M.*, loc. cit. Il Vasto al Duca. Milano, 1° dicembre 1545.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Materie politiche. Negoziazioni con Vienna*, m. 35 (da ordinare). Istruzione del Duca ad un inviato presso l'imperatore. Vercelli, 30 dicembre 1545, vedi *App.*, *Doc.* 2°. — Il risultato delle lagnanze riusciva però sempre nullo, nonostante la buona volontà dell'imperatore. V. *Arch.* cit. *Registri lettere della corte.* Registro cit., fol. 45*t*-46. Il consiglio di Em. Filiberto al Duca. Maëstricht, 22 febbraio 1546. " ... Mais le mal est quon se remect à mons^r^ le marquis, oultre ce, monseigneur, que pendant ces Jours quon ne trectoit oultre que de la paix, dont doibt proceder la restitution de vostre estat, il nestoit trop à propoz importuner sa M^té^ de telles particularitez, encoures quelles soyent insupportables „.

(4) Credette il Duca nostro opportuno inviare colle sue condoglianze al re il vescovo di Vercelli, Pier Francesco Ferrero, e ne informò il principe di Piemonte e l'imperatore per mezzo del segretario Boursier. Egli chiese al re apertamente la restituzione di Cavour. A Carlo V poi fece presenti le oppressioni del Vasto, che toglievano a lui il mezzo di ottenere dai sudditi il pagamento dei sussidi. V. *Arch.* cit. *Negoziazioni con Spagna*, m. 11 (da ordinare). Memoriali al Boursier. Vercelli, 14 ottobre 1545.

ratore. " Mon nepveu „, disse egli al principe di Piemonte, quando il medesimo gli espresse la speranza che trovasse buon mezzo per la restituzione del padre suo, " j'ay heu toujours les affères de mon cousin vostre père en bonne souvenance et ne fault que vous doubtez, que je ne les aye en telle recommandation que les myens propres. Desja jay interpellé le Roi à la restitution de lestat de vostre dict père à la forme de la cappitulation de la paix. Lequel ma faict response, que estant failli le moyen de mons^r dorléans, qui empeche lobservation de mon cousté, quil ne pense point destre tenu par vertu de ladicte capittulation à ladicte restitution. Si ledict Duc dorleans heust vescu „ continuò la Maestà cesarea, " je luy heusse donné lestat de millan. Il me semble quilz ne doibvent reffuser de lobserver de leur costé ce que leur concerne et quilz ont promis. Reste que maintenant ladmiral de France *(Claudio d'Annebaut)* doibt venir. Je verray ce quilz vouldront dire, et sellon ce je me conduyray „. Allora il vescovo di Nizza ed il Lullin osservarono che nel trattato di Nizza del 1538 vi erano articoli, i quali lasciavano facoltà al re di Francia di elevare pretese sulle terre sabaude in via giuridica. Questo inconveniente procurava al Duca continue agitazioni e travagli e poteva esser causa di qualche torbido. Volesse la Maestà sua in caso di pace definitiva non lasciare la questione sabauda indecisa. Carlo V in risposta garantì che la clausola ostica al Duca non aveva nulla di gravoso agli interessi sabaudi, ma lasciò sperare che all'arrivo dell'Annebaut verrebbe dato assetto definitivo alla questione (1). Di fatto era voce che il re francese fosse incline ad un accordo più stabile e duraturo della pace di Crépy (2), e come nella primavera aveva offerto di unire il principe di Piemonte colla figlia del re Enrico di Navarra, Giovanna d'Albret, erede di tutti i diritti navarresi, in compenso della Savoia (3), così ora, spento l'Orléans, mandava a Bruges, sede della corte cesarea, l'ammiraglio Claudio d'Annebaut col cancelliere Francesco

(1) *Arch.* cit. *Registri lettere della corte (1545-50)*, cit., fol. 29*t*-31*t*. Memoriale al Frossasco, Gand, 31 ottobre 1545.

(2) Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo*, pag. 307, n. 63. Verallo al card. Farnese, Bruxelles, 27 settembre 1545 e 338-39, n. 68; Bruxelles, 8 ottobre 1545.

(3) *Id.*, pagg. 156-57, n. 27. Dandino a S. Fiore. Speier, 16 maggio 1545.

Olivier ed il segretario Gilbert Bayard, proponendo il matrimonio tra la figlia Margherita ed il principe di Spagna, D. Filippo, vedovo da alcuni mesi di Maria di Portogallo, con cessione di Hesdin e d'ogni diritto sul ducato milanese. Voleva però conservare il Piemonte e la Savoia. Non era condizione accettabile, e l'Annebaut dovette subito far altre offerte. Propose l'unione del principe di Piemonte con Maria, figlia dell'imperatore, e la Lombardia in dote, con promessa in tal caso pure di restituire Hesdin, non il Piemonte. Infine parlò del matrimonio tra il principe e Giovanna d'Albret con dote superiore a 70 m. scudi d'entrata ed i ducati d'Orléans, Bourbon, Châtellerault ed Angoulême in compenso della Savoia e del Piemonte. Quelle regioni fruttavano non meno di 100.000 ducati annui (1), ma non rendite chiedeva il Duca sabaudo, bensì la restituzione del suo stato. Le proposte dell'Annebaut riuscirono quindi una amara delusione a tutti, e Carlo V, che non intendeva cedere Milano, e neppure tollerava che un pollice di terreno restasse ai Francesi di qua delle Alpi, rispose con fermezza che il re pensasse a maritare la figlia sua, e non s'occupasse dei figli altrui, e che se voleva la pace, sgombrasse prima l'Italia e restituisse il mal tolto. L'Annebaut tentò ancora un ultimo partito. Offrì la restituzione della Savoia, non del Piemonte e della Bressa, allegando la necessità di queste regioni per la difesa e sicurezza del Delfinato. Carlo V rimase inflessibile " et ha replicato che bisogna che il re restituisca quel che non è suo, et che non ha bisogno di disegnare nova condutta de Svizzeri, nè temer del Delfinato, se ha animo di far buona pace „ (2). A

---

(1) *Id.*, pagg. 409-11, n. 85. Verallo e Dandino. Bruges, 8 novembre 1545. — Al Duca era venuto pensiero di trattare matrimonio tra il figlio suo e Margherita, che divenne poi nel 1559 sposa di Em. Filiberto, ma i suoi ministri stimarono non fosse pel momento il caso di farne parola, vedendo che si parlava di essa solo come possibile fidanzata di D. Filippo. V. *Arch. di Stato di Torino*. Memoriale cit.

(2) Friedensburg, pagg. 424-26, n. 90. Verallo e Dandino, Bruges, 16 maggio 1545 e pagg. 622-23. Bartolomeo Concino a Cosimo de' Medici, Anversa, 28 novembre 1545. — Sull'attività della diplomazia francese in Isvizzera vedi Rott, *Histoire de la représentation diplomatique de la France auprès les cantons suisses, de leurs alliés et de leurs confédérés*, vol. 1° (1430-1559). Berne-Paris, 1900, pag. 330.

compimento di questa risposta veramente confortante per gli interessi sabaudi disse ad Em. Filiberto che stesse " di buon animo, perchè o esso *era* per haver tutto il suo stato senza perder un palmo di terra, o esso imperatore *era* per perdere la corona et tutti li suoi stati! „ (1). Belle parole che onorano il grande monarca! Troppo spesso la condotta di Carlo V fu oggetto di critiche ed accuse dagli storici piemontesi, i quali, vedendo solo le tristi condizioni del ducato in quegli anni dolorosi, non hanno pensato che l'imperatore aveva altri e ben maggiori interessi da custodire e che spesso versava esso pure in angustie di danaro. Ma l'opera e la volontà sua non furono mai aliene, nè dimentiche del cognato, così oppresso dalla sventura. Si dirà che lasciare il Piemonte in mano alla Francia era un pericolo per Milano e che nel volere la restituzione totale del cognato l'imperatore curava solo i suoi interessi, ma si consideri anche che, quando nella fine del 1545 Carlo V respingeva le offerte dell'Annebaut (2), la condizione politica della Germania era poco sicura in mezzo alle ostilità dei principi luterani. L'immagine di Carlo V a chi bene studia gli avvenimenti del ducato sabaudo dopo il trattato di Crépy riesce simpatica. Sembra che per reintegrare il Duca nelle sue terre abbia esso offerto persino al re matrimonio di suo figlio D. Filippo con Margherita di Valois senz'altra dote che la restituzione della Savoia e Piemonte al Duca stesso ed anche proposto, a garanzia della Maestà cristianissima, che Em. Filiberto vivesse nella corte francese e colà si accasasse a piacere del re (3). Ma Francesco non voleva assolutamente cedere e restituire il Piemonte. Sicchè il 25 novembre l'Annebaut coi suoi compagni lasciò la corte imperiale (4).

---

(1) Friedensburg, pag. 425, nota. Dispaccio del Navagero del 23 novembre 1545. — Il dispaccio del Navagero era già noto al De Leva, IV, 42-43.

(2) L'Annebaut usò anche termini altieri, v. Friedensburg, pag. 52 e ss. Verallo e Dandino al card. Farnese, Utrecht, 7 gennaio 1546.

(3) Friedensburg, pag. 447, Anversa, 25 novembre 1545 e pagg. 677-78. Navagero al Doge. Anversa, 30 novembre 1545. — Il Navagero stesso fin dal 1544 aveva annunziato proposte francesi a Carlo V molto simili a quelle recate dall'Annebaut. V. *Bibl. Marciana di Venezia*, cod. cit., fol. 30. Spira, 30 gennaio 1543 (s. v.).

(4) *Id.*, pag. 455, n. 97. Verallo e Dandino, Anversa, 29 novembre 1545. — Biagio di Monluc quindi s'ingannava nel febbraio 1546, quando in oc-

4. — Il dispetto del re fu vivissimo. Aveva Francesco I nutrito speranza che l'imperatore si fosse lasciato intimidire dalle condizioni della Germania, ed invece trovava il rivale più fermo che mai nel reclamare l'esecuzione intiera del trattato di Crépy, anche mancando il duca d'Orléans. Il suo sdegno, come sempre, trovò sfogo a danno del Piemonte con mille dimostrazioni ostili. I suoi ufficiali per trovare qualche appiglio ai danni del principe nostro, inventarono pretese violazioni del trattato da parte del Duca e dei ministri piemontesi. Era luogotenente regio nell'assenza di Francesco di Bourbon, duca d'Enghien, Paolo de la Barthe, signore di Thermes, quando negli ultimi di novembre fu scoperta a Torino una congiura che mirava a dare la città in mano agli imperiali. Arrestati i presunti colpevoli (1), il Thermes si lagnò aspramente col Duca, asserendo che la corte di Vercelli era piena di nemici del nome francese ed accusò fra gli altri il presidente patrimoniale, Niccolò Balbo, di aver tenuto pratiche segrete coi rei. Questa essere violazione aperta dei trattati: si arrestasse dunque e venisse punito senza ritardo il colpevole (2). Il Duca fece venire a sè il Balbo in presenza del signor de la Môle, che aveva portato la lettera del Thermes. L'illustre presidente respinse energicamente l'accusa, ed il Duca rinviò il de la Môle con una risposta severa al Thermes. Essere la terza volta ch'egli accusava suoi ufficiali di false colpe e menava lamento col re stesso, del quale il de la Môle

---

casione della prossima nascita di un figlio al Delfino Enrico, pronosticava la consegna di Milano al nuovo principe francese, che avrebbe portato il titolo di Duca d'Orléans, e la restituzione al Duca di Savoia d'ogni sua terra mediante le nozze di Em. Filiberto con Margherita di Valois. Vedi *Arch. di Stato di Venezia, Capi Cons° dei Dieci*, b. 10. *Lettere di amb^ri in Francia.* Marino Cavallo ai Capi, Saint-Cloud, 11 febbraio 1545 (s. v.).

(1) *Arch. storico Gonzaga. E. esterni, N. XLIX, n. 3,* b. 1667. Vespasiano Bobba, Milano, 1° dicembre 1545.

(2) *Arch. di Stato di Torino, Lettere particolari.* Thermes al Duca. Torino, 27 novembre 1545. — *Arch. storico Gonzaga,* loc. cit. Milano, 5 dicembre 1545. " Il detto mons^r dalla Molla è statto anche dal s^or Duca di Savoya con un'altra lettera de mons^r di Thermes, qual pare le habbia scritto che già più volte li servitori et ministri d'esso s^r Duca hanno trattato delle insidie de far robare Turino et darlo in mano desso s^r Duca, come hano trattato anche de novo, bem che non è parso a esso Mons^or di Termes di scriverne più presto a sua Ecc^a, nè volerle nominar salvo che un de Principali, qual è il presidente d'Albi (*sic*) ".

aveva osato dire come in forma minacciosa, che presto si sarebbero intese novelle. Ch'egli Duca per conto suo riteneva la pace tra il re e l'imperatore ben salda e quindi era convinto che le invenzioni non avrebbero rotto certo l'accordo. Quanto al punire i suoi ministri, dichiarava che mai sarebbesi piegato a tanta ingiustizia, non avendo colpevole alcuno nella sua corte. Se il Thermes aveva nelle prigioni di Torino gente traditrice, agisse come gli pareva meglio (1). La verità era che di fatto un capitano Damiano Curiale di Napoli era andato due mesi prima a Milano offrendo al Vasto di strappare Torino ai Francesi. Il marchese dichiarò al de la Môle ch'egli aveva respinto l'offerta, non volendo rompere la pace, ma non escluse la possibilità che il Curiale allora si fosse rivolto a soldati spagnuoli licenziati e con essi avesse intessuto la trama (2). Del resto se le insidie non mancavano contro la dominazione francese in Piemonte, il re dal canto suo praticava col Turco ai danni generali della cristianità (3); fortunatamente l'insuccesso dell'impresa di Nizza ed il malcontento del Barbarossa contro i Francesi lasciava sperare che non si sarebbero rinnovate le calamità del 1543.

Venne il 1546 ed il pontefice Paolo III, bisognoso d'una pace stabile e della benevolenza ad un tempo dei due massimi sovrani d'Europa pei suoi interessi particolari, diede commissione ai suoi nunzi nella corte imperiale di sollecitarla con nuovi sforzi. Carlo V rispose di nulla meglio desiderare, ma d'essere stomacato dal contegno del re francese, che in conclusione si

---

(1) *Arch. di Stato di Torino. Registri lettere della corte,* reg. 1536-50. fol. 117. Il Duca al Thermes. Vercelli, 4 dicembre 1545. — *Arch. storico Gonzaga,* lett. cit. " Anche esso s^{r} Duca, per quanto ha avisato qua al s^{or} Mar^{se} Illmo ha rispuosto al detto Mons^{ore} di Termes, che questa è già la terza invencione che hano trovata et falsa informacione ch'esso Mons^{or} di Termes ha mandata al Re per disturbare li acordi della pace, acciò non sia rimesso in casa esso s^{r} Duca. Ma che, dio laudato, le cose al presente fra sue M^{tà} Ces^{a} et x^{ma} sono in tal buona intelligencia et stabilimento che queste false informacioni non harano luoco ".

(2) *Arch. storico Gonzaga,* loc. cit. Milano, 5 dicembre 1545 (2ª lett.). — Del Curiale ho pubblicato una lettera a Chiaffredo Pasero in *Documenti di storia sabauda dal 1510 al 1536, preceduti da un'introduzione* (estr. dalla *Miscellanea di storia italiana,* serie 3^{a}, vol. VIII). Torino, Stamperia Reale, 1902, pag. 230, *Doc.* 56.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi, Duchi di Savoia,* m. 3°. Il Duca ad Em. Filiberto. Vercelli, 30 dicembre 1545.

riduceva solo a voler tutto prendere e nulla restituire (1). Paolo III si interessava alla sorte del Duca sabaudo, nè aveva rinunziato all'antico disegno di unire la nipote Vittoria o al Duca stesso (2) od al principe del Piemonte (3), sebbene ormai più non fosse il caso di parlare nè dell'uno, nè dell'altro, data l'età ormai senile di Carlo II e gli impegni di Em. Filiberto con Maddalena d'Austria. L'intromissione costante del Pontefice nelle trattative imperiali colla Francia riusciva sospetta, perchè nessuno ignorava la smodata ambizione di Paolo, e Francesco I stesso conosceva la segreta speranza del Farnese che l'imperatore per necessità economiche concedesse in ultimo Milano al nuovo duca di Parma e Piacenza, a Pier Luigi, figlio della Santità Sua (4).

---

(1) Friedensburg, pag. 512 e ss., lett. cit. del 7 gennaio 1546.

(2) *Arch. storico Gonzaga*, *E. esterni*, *N. XXV*, *n. 3*, b. 888. Lodovico Strozza. Roma, 18 nov. 1545. " Ho inteso che tuttavia si prattica il matrimonio della s^ra^ Vittoria col duca di Savoya vecchio et col re di Pollonia „.

(3) Friedensburg, pag. 551. Dandino al card. Farnese. Utrecht, 4 febbraio 1546. — Sulle pratiche matrimoniali di Vittoria Farnese coi principi sabaudi, vedi *Carlo II*, ecc., pag. 24, ecc.

(4) *Arch. di Stato di Venezia*, *Capi Consiglio dei Dieci*, b. 10 cit. Marino Cavalli ai Capi. Saint-Dizier, 29 ottobre 1546 (cifrata): " ... et per consequente di conceder Milano alla casa Farnese. Nondimeno si trova mo anche lui tanto impegnato et obligato, che convien esser quello che facci il latino a cavallo „.

Un sonetto di Cesare Marcello da Fano, indirizzato da Roma, 20 febbraio 1540 alla corte mantovana, ritrae, in forma certo poco elevata, le condizioni tristi della moralità nella capitale dello stato ecclesiastico in quei giorni (*Arch. storico Gonzaga*, loc. cit.). Da 16 mesi, scrive il Marcello, trovavasi egli a litigare " in *quell'*arca de miseria et non più roma, anzi vero albergo de tutti e viti, sola nemica di qualche virtute, di modo che tutte si moiano di fame et la mia peggio che le altre:

" Nella vitiosa Babilonia avara,
Già Roma detta, ove ogni mal se cria
Per causa de una infernal fernesia,
Pasco mia vita de vivanda amara.
Tanto mi accoglia può più me discara
Quanto la mente la memoria invia
Lanima a lalma corte sua natia,
Dove belle virtù sol ve si impara.
Quì le vertù moian di fame
Per il misero esempio del maggiore
Qual tien la vita et farà il fin di Crasso.
Seguon la prima laltre corte infame
Fatti omicida del più eterno onore.
Perciò signor soccorri al crudel passo.

nato alimproviso per ciò non merita nè gastigo, nè laude „.

Gli uffici di Paolo riuscirono quindi vani (1) ed il re continuò le ostilità più o meno palesi contro i ducali in Piemonte senza riflettere che la sua condotta doveva raffermare maggiormente il nostro principe nell'alleanza coll' imperatore, e questo nella sua decisione di allontanare in ogni modo i Francesi dall'Italia. Carlo V infatti non solo gradì i servizi di Em. Filiberto nella lega smalkaldica (2), ma trattenne il nipote per tempo indeterminato in Germania, fiducioso che in epoca non lontana la stella sabauda sarebbe risorta (3). Le strettezze economiche opprimevano il giovane principe, nè l'imperatore, spesso anch'egli privo di mezzi, poteva sopperire ai bisogni del nipote. Il buon Duca faceva del suo meglio, perchè il figlio non vivesse nella necessità, ma anch'egli trovavasi alle prese di continuo coi creditori. Nel 1545 Carlo II aveva sborsato 50 m. scudi circa per compensare quanti creditori tenevano in pegno gioie sue (4). Pure si sforzò sempre di sopperire ai bisogni del figlio, al quale non era sufficiente la pensione che l'imperatore aveva stabilito, e non si perdette d'animo in quegli anni sventurati.

---

(1) Se ne discorreva molto, specie nel luglio 1546. Si diceva pure che un corpo di truppe al servizio del Pontefice minacciasse Ginevra. Vedi Hauser, *Correspondance d'un agent genevois en France sous François Ier, 1546* in " Revue historique „, 1900, vol. III, pag. 321 e 325. Gio. Arpean ai ssri di Ginevra, Annecy, 19 luglio, e Lione, 24 luglio 1546. — Anche parlavasi di offerta matrimoniale tra Em. Filiberto e Margherita di Valois, fatta dal Duca al re. *Id.*, pag. 328. La Charité, 3 agosto 1546.

(2) Ricotti, *Storia mon. piem.*, II, 12. — Em. Filiberto era allora decorato del Toson d'oro, vedi *id.* e *Arch. di Stato di Torino. Registri lettere della corte*, ecc., fol. 129-30. Il Duca al Granvelle ed all'imper. Vercelli, 20 luglio 1546. — V. su Em. Filiberto in Germania il mio *Un gentiluomo*, ecc., pag. 23 e ss., Tallone, *Un vercellese*, pagg. 174-80, e Vaccarone, *Em. Filiberto*, ecc., pag. 287 e ss. Altre notizie trovansi in Friedensburg, *Nuntiatur des Verallo*, vol. II, (1546-47). Gotha, Perthes, 1899 (vol. IX della serie " Nuntiaturberichte aus Deutschland „, 1533-59), pag. 189, n. 205. Serristori al Duca di Firenze, Landshut, 17 agosto 1546. Il card. Farnese a S. Fiore. Neustadt, 25 agosto 1546. — La fonte principale sono pur sempre i *Registri di lettere*, cit. di Em. Filiberto e dei suoi consiglieri, dei quali pubblicò estratti il Ricotti, *Degli scritti di Em. Filiberto*, ecc., pag. 119 e ss.

(3) *Arch. di Stato di Torino. Lettere principi, Duchi di Savoia*, m. 4°. Il Duca al Michaud. Vercelli, 9 novembre 1546.

(4) *Arch. camerale di Torino. Conto tesor. gen. di Savoia*, reg. n. 206, fol. 169-70, fol. 15*t*.

Ma era destino ch'egli non dovesse rivedere giorni felici. Nella primavera del 1546 Gio. Caracciolo, principe di Melfi, fuoruscito napoletano, scendeva luogotenente del re in Piemonte e metteva subito in ordine un esercito di parecchie migliaia d'uomini. Era evidente che nei Francesi si rinnovavano le velleità guerresche (1). I timori crebbero quando improvvisamente il marchese del Vasto cadde infermo a Vigevano di malattia (2), che in pochi giorni (3) lo condusse al sepolcro, il 31 marzo 1546, mentre la sventurata marchesa ed i figli in tenera età struggevansi in lagrime (4). La fine rapida del marchese avveniva in un momento difficilissimo, quando i Francesi ingrossavano in Piemonte (5) e l'imperatore era assorbito nella nuova guerra di

---

(1) Vaccarone, pagg. 286-87. — Sul Caracciolo v. D'Ayala: *Giovanni Caracciolo, principe di Melfi, duca d'Ascoli*, in *Archivio storico italiano*, serie 3ª, vol. XV (1872).

(2) *Arch. storico Gonzaga. E. esterni, N. XLIX, n. 3*, b. 1667. Galeazzo Nuvoloni al card. Ercole Gonzaga ed alla Duchessa Margherita Paleologo. Milano, 18 febbraio e 24 marzo 1546.

(3) *Id.* Vigevano, 26 marzo 1546 (cifrata). " Ognuno insomma è fuori di speranza, vedendo mass^te^ che sua Ex^a^ non si è anchor confessata nè communicata. Onde si teme che ei non se ne mora senza aspettare le cose sue nè dello spirito, nè del mondo „.

(4) *Id.* Vigevano, 27 e 30 (2 lettere) marzo 1546. — La rapida fine del marchese commosse forse il principe di Piemonte, che nell'anno prima aveva mostrato sdegno contro il defunto. Egli indirizzò allora una lunga lettera di condoglianza alla giovane vedova, offrendo i suoi servigi. — *Arch. di Stato di Torino. Registri lettere della corte.* Registro cit., fol. 52. Em. Filiberto alla marchesa, Ratisbona, 14 aprile 1546. L'imperatore non dimenticherà certo i figli del marchese " et quando lopera mia puotesse far effettual dimonstratione nelli rimasti successori di la voluntà et affettione chio portavo al deffuncto, si conoscerebe quanto desideroso sia di laugumentatione loro „.

(5) Fiorentino, *Donna Maria d'Aragona, marchesa del Vasto*, in " Nuova Antologia, serie II, vol. XLIII (1884), pag. 227. — *Arch. storico Gonzaga.* Milano, 4 aprile 1546. Gio. Maria Luzzara a Sabino Calandra, castellano di Mantova. Milano, 8 aprile 1546. La marchesa è addoloratissima. " Il marchese di Pescara (*Francesco Ferrante, primogenito del Vasto*) non ne fa molto lutto et puoco mostra di dolersine, il che è imputato all'età puerile in che egli è, ma Dio sa quanto nuocerà anco a lui l'haver perso un'indirizzo et una sponda tali. Don Cesare, suo fratello, di qualche dieci anni, è in una smania grandissima, et non fa altro che dire: " voglio morire anch'io, puoichè ho perso il mio s^r^ Padre, in cui consistea ogni mia speranza et ogni mio bene „. Et per quanto mi dice uno c'ha il suo governo, l'altro

Germania contro i protestanti. Si facevano molti nomi per la successione del Vasto; chi parlava del duca d'Alba, Ferdinando Alvarez di Toledo, chi di D. Ferrante Gonzaga (1). La sorte cadde su quest'ultimo, che da lunghi anni aveva desiderato l'alta carica. Egli godeva fama di valentissimo capitano. Adoperando il duca d'Alba nella guerra coi protestanti, parve naturale all'imperatore di affidare al Gonzaga la direzione delle cose italiche. Ma questa scelta riuscì ben dolorosa agli interessi sabaudi!

APPENDICE

Doc. 1°.

1545 24 luglio, *Worms*.

Capilupi Camillo al card. Gonzaga ed alla Duchessa Margherita Paleologo. *Ingresso del Principe di Piemonte a Worms, incontrato fra gli altri dal marchese del Vasto. Contegno freddo del principe col marchese. Feste date dall'imperatore per la sua venuta.* (*Arch. storico Gonzaga di Mantova, E. esterni, N. II, n. 3* b. 442).

" Hebbe laltro heri di notte il s^r^ Marchese un poco di gotta. Tuttavia stette poi heri di notte assai bene, et heri fu ad incontrar il Principe di Savoia a mezzo il borgo, il quale venne alle 4 hore dopo il mezzo dì. L'imp^e^ gli mandò mons^r^ lo grande (2) et Monfalconetto con la corte, et il Re il conte di Salina, et tutti i principi del impero che qui sono vi mandorno le lor case incontro per essere anch'esso principe del Impero. Il Principe andava a man destra, e 'l Marchese a sinestra. Il Principe vestito tutto di cremosino con cordelle di oro fatte ad ago, al giuppone, a cosciali, et al manto da cavalcare, il quale era fodrato di raso. Io l'andai ad incontrar più d'un miglio dicendogli che per saper io l'affinità et l'affettione di V. R^ma^ et Illma S^ria^ verso sua Ecc^tia^ mi era paruto di andar affar mio debito. Di che mi ringratiò mostrandolo haver hauto a caro. Esso ha bonissima ciera et buon colore, nè pare di esser stato infermo. Andò a smontar diritto dal Imp^e^ accompagnato sempre dal s^or^ Marchese, verso il quale parve ad alcuno non usasse quelle cerimonie che si desideravano. Perciochè senza fargli troppe parole egli

---

dì il povero puttino si volea giettar giù d'una finestra di disperatione. Egli è maravigliosa cosa a sentirlo ragionare. Non si vede in lui altro che vero ingegno „. — I figli del Vasto erano Francesco Ferrante, Inigo, poi cardinale, detto di Aragona, Cesare, Giovanni, Carlo, Beatrice ed Antonio.

(1) *Arch. storico Gonzaga*, lett. cit. del 27 marzo 1546.

(2) Il s^r^ de Bossu, gran scudiere cesareo.

se ne andò innanzi a smontar da cavallo presso la scala, e lasciò il s^r Marchese a dietro, al quale, da ch'ei fu smontato, non si voltò manco a dirgli cosa alcuna, ma se ne saliò suso per la scala. Il Marchese stava a cavallo, overo aspettando che ei si voltasse per torne commiato, overo irresoluto se doveva smontare anch'esso, o pure aspettarlo così a cavallo che descendesse. Finalmente si risolse di smontar, che già il Principe era tanto innanzi che più nol poteva veder. Et così io li lasciai andar et me ne venni a casa. Furono poi amendui la sera a cena con l'Imp^re et col Re et con li figliuoli, con mons^r di Agosta (1), con li Nontij, gli ambasciadori di Francia, di Portogallo et credo anche di Polonia, et col gran mastro di Prussia a cena a casa del conte Palatino, perchè l'imperatore si trovò là, quando gli venne la nova del parto della ser^ma Principessa (2). Eravi anco la moglie del conte con alcune (credo) sue nipoti piccole, et la moglie del secret^o Naos (3) et una sua nipote in compagnia della s^ra Contessa. Non scriverò come fussero vestite, nè come sedessero a tavola, perchè io non vi fu a vederli mangiar. Nè ho hauto tempo di informarmene. Dopo cena intendo che il conte fece venire un gran cervo nella sua corte, al quale lasciorno non so che bracchi grandi, con li quali il cervo scherzava di zampate, et i bracchi fecero una dolcissima musica già gran tempo fra loro concertata. La corte non è grande come è la metà del patro del castello da Mantova, il che giovava a tener più unite le voci. Finita questa un'altra se ne fece, la quale sentì anch'io da casa mia et tutta la terra; et infin la guarda della piazza armata vi corse. Et questa fu di uno foco arteficiato apparecchiato innanzi alla porta sulla strada, nel qual foco era una infinità di facelle, che in un punto con uno splendore grandissimo et con una salva bellissima di rumore molto maggior che d'archibugi, tutte ad un tratto scoppiano et s'inalzorno fin alle stelle. Lo splendore e 'l rumore si vide per tutta la città, et se pur ci fu parte alcuna, dove non arrivasse, vi arrivò poi lo strepito de cavalli che stavano sulla strada intorno al loco dove si accese questo foco, li quali smarriti da così subito rumor et splendore si misero in fuga, et chi di qua, chi là. Io vidi il cap^no Chincichilara (?) et altri cap^ni che non potevano ritener i lor cavalli. Se ne tornorno poi a casa che poteva esser presso ad un'hora di notte. Et qui finio la festa, della quale se intenderò poi qualche altra particolarità, non lascierò di scriverla...

Ho inteso che l'Imp^re ha constituito provisione al Principe di Savoia di cinquecento scudi al mese per lo suo piatto „.

---

(1) Otto Truchses, vescovo di Augusta.

(2) Maria di Portogallo, prima consorte di D. Filippo, principe di Spagna defunta in seguito al parto. Il neonato fu D. Carlos.

(3) Naves.

Doc. 2°.

1545 30 dicembre, Vercelli.

Istruzione del Duca ad un inviato (1) presso l'imperatore. *S. Ecc. è grata a S. M. Ces^a del buon ricordo che serba delle cose sabaude, ma S. M. Ces^a deve provvedere che i ministri imperiali abbiano maggior rispetto all'autorità di S. Ecc.^za e che i sudditi ducali non siano così di continuo rovinati e spogliati dalle milizie. Se quelli che attualmente ubbidiscono a Francia, vedessero meglio trattati i pochi rimasti fedeli, avrebbero un incentivo a ritornare sotto il dominio sabaudo. Voglia quindi S. M. adoperarsi al rimedio dei mali presenti e ricordarsi delle necessità che affliggono il ducato.*

[*Arch. di Stato di Torino. Materie politiche. Negoziazioni con Vienna*, mazzo 35 (da ordinare)].

Memoyre.

Premierement avoir presenté à sa ma^té la lettre de monseigneur aveques les accoustumeez treshumbles Recom^ous Dira que, par les advys que luy donne continuellement monseigneur le prince son filz et ces s^rs qui sont auprès de luy, tousiours myeulx Il sapperoit de la bonne souvenance que plaist à sa ma^té avoir de luy et de ses afferez Et la bonne protection en quoy luy plaist de le tenir, tout mondict seigneur ne le scauroit asses treshumblement Remercier. Quest conforme au bon et ferme expoir que dez tous temps Il a heu en sa ma^té. Et puisque les afferez sont à present aux termes de resoulution, Il a expressement despeché ledict gentilhomme pour luy supplier avoir à ce coup la souvenance de luy, telle que pourte lentière fiance quil a tousiours consstitué en sa ma^té, Et quil a telle, que soit par paix, ou par guerre elle ne vouldra labandonner a une si bonne et Juste occasion de le restituer en son bien. Car mondict seigneur soy persuade toutellement et tel en a son expoir que, si les afferez se decident par paix, cella ne se puisse fère sinon moyennant son entière reintegration pour estre presentement toutes chouses dependantz du pauvoir et bon plaisir de sa ma^té.

Si aussi que Dieu ne vueille les afferez tomboyent en roupture, Plaira à sa M^té entendre que aux adversitez passeez mondict seigneur à esté

(1) Il Duca sulle prime voleva mandare realmente un gentiluomo per compiere gli uffici indicati nell'istruzione. Poi inviò soltanto un corriere (" Charles le lacquaix " secondo la lettera del 30 dicembre (2^a) del Duca ad Em. Filiberto, vedi *Arch. di Stato di Tor. Lettere principi, Duchi di Savoia*, m. 3°), ritenendo il figlio ed i gentiluomini del seguito sufficienti all'azione presso l'imperatore ed i suoi ministri. Raccomandò però ad Em. Filiberto di consigliarsi sempre col s^r di Leynì, Giacomo Provana, e con Luigi s^re di Châtelard prima di agire, *id.*, loc. cit., Vercelli.

si peu respecté et mal trecté par ses ministres, que luy seroit impossible de pouvoir plus avant continuer aux termes de subgection ou Il a esté reduit Jusques à maintenant. Car de voir ses subgectz paouvres foullez et Ruynez, de se veoir aussi mondict seigneur sans aulcun moyen de pouvoir aidez et soubvenir aux grantz afferez, facheries et travaulx que supportent ses subgectz, Si par le passé luy a esté dur à les suppourter, moins luy sera il comportable à ladvenir, Joint que lesdicts subgectz se trouveront en tout frustrez de lespoir quilz ont destre aidez et soubvenuz par mondict seigneur, Silz voyent quil ne soit aultrement favorisé de sa dicte ma^té^.

Et quant sa Ma^té^ prendroit tant de fiance de mondict seigneur quil lui pleust lui donner charge, par laquelle Il puisse fère entendre à ses subgectz l'asseurance quelle a de luy, Il se parforerait à tellement les disposer à se mectre hors de la captivité des ennemys ou Ilz sont, que sa Ma^té^ en seroit myeulx servie, Et tant plustost mondict seigneus se trouveroit hors de la poyne ou il est. Et est à croyre que, si par le passé on les heust tenuz en lestime et reputation que lon debvoit. Je dis ceulx que pour la devotion quilz ont à sa ma^té^ et pour lamour et affection quilz pourtent à leur seigneur et prince, ont laissez leurs biens et fortunes pour suyvre leur debvoir, les afferez heussent aultrement succedez et plus à la satisfaction de sa ma^té^ consolation et repos de mondict seigneur et de ses subgectz.

Pourquoy mondict seigneur supplie sa ma^té^ comme que ce soit que les afferez ayent à prendre fin quil plaise lavoir en telle recommandation que merite la longue patience quil a heu lamour et singulère affection quil luy a porté et pourte continuellement, Que fait quil soy persuadé toutellement que sa ma^té^ ne le mectra en aoubly, Ains jouxte la bonne coustume en aura bonne souvenance en temps et lieu, Quil luy plaise aussi ordonner a mondict seigneur ce quil aura a fère. Car comme Jusques cy Il set tousiours guidé soulz lombre, protection et bon plaisir dicelle, Il ne sera Jamais recreu dy continuer à ladvenir et obeyr a tout ce que plaira à sadicte ma^té^ luy commander, Et oultre le bien et faveur que plaira à sa M^té^ luy fere, Il se parforera tellement de son cousté cellon sa pauvreté, quelle cougnoistra le desir quil a de luy fere service et de liberer luy de ses subgectz de la captivitè ou Ilz sont.

Fait à Verceil le devant dernier de decembre mil v^c^ quarante cinq.

Charles. Vulliet.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Giugno 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Berruti, Naccari, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente annunzia la morte del Senatore Luigi Cremona Socio nazionale non residente, e comunica di avere incaricato il Socio nazionale non residente Senatore Cannizzaro di rappresentare l'Accademia ai funerali e di porgere condoglianze alla famiglia.

Legge la lettera dell'Istituto Lombardo colla quale si annunzia la morte del Senatore Cremona suo Socio effettivo.

Comunica inoltre la lettera del Preside della Facoltà di Scienze dell' Università di Roma, con cui annunzia che detta Facoltà unitamente alla Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Roma hanno preso l'iniziativa per una sottoscrizione internazionale per onorare la memoria del compianto Senatore Cremona. Le modalità della sottoscrizione verranno comunicate in seguito.

Il Presidente D'Ovidio legge un cenno necrologico del compianto Socio nazionale non residente Senatore Luigi Cremona che verrà inserito negli *Atti* accademici.

Il Socio Guidi fa omaggio della sua pubblicazione intitolata: *Prove alla compressione sulle murature di granito d'Alzo e gneiss di Borgone.*

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche,* del Dr. G. Z. Giambelli, presentata dal Socio Segre;

2° *Sopra alcuni avanzi di Cervidi pliocenici del Piemonte,* del Dr. G. De Alessandri, presentata dal Socio Parona;

3° *Contributo allo studio della dispersione elettrica nell'atmosfera,* del Prof. G. B. Rizzo, presentata dal Socio Naccari;

4° *Comportamento dell'ossido di carbonio nell'organismo,* del Prof. Piero Giacosa, presentata dal Socio Guareschi;

5° *Ricerche sull'acido colico,* del Dott. Lodovico Beccari, presentata dal Socio Guareschi;

6° *Condensazione dell'etere cianacetico coll'aldeide cinnamica ed il piperonalio,* del Dott. Galeazzo Piccinini, presentata dal Socio Guareschi;

7° *Sulla anidrite micaceo dolomitica e sulle roccie decomposte della frana della galleria del Sempione,* nota del Socio Spezia;

8° *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle della Meris e Rocca Val Miana),* del Dr. Alessandro Roccati, presentata dal Socio Spezia;

9° *I sistemi canonici d'equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni,* del Socio Morera;

10° *Sopra alcune equazioni fondamentali nel problema degli n corpi,* del Prof. Paolo Pizzetti, presentata dal Socio Morera;

11° *Sulla integrazione per sostituzione,* del Dr. Francesco Giudice, presentata dal Socio Peano;

12° *Sulla rigenerazione dell'epitelio intestinale nei pesci,* del sig. Enzo Bizzozero, presentata dal Socio Foà;

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* accademiche un suo lavoro intitolato: *Ricerche*

intorno alla Talpa romana, Orfield Thomas, ed altre forme di talpe europee. La Classe con votazione segreta all'unanimità dei votanti approva l'inserzione di detta Memoria nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla elezione di Soci stranieri e di Soci corrispondenti, e riescono eletti, salvo l'approvazione Sovrana, i seguenti signori:

A Soci stranieri:

Prof. Giovanni Gastone Darboux
„ Giulio Enrico Poincaré
„ Enrico Moissan
} dell'Istituto di Francia:

Prof. Dr. Federico Roberto Helmert, Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia in Potsdam.

A Soci corrispondenti:

1) nella Sezione di matematiche pure:

Gerolamo Giorgio Zeuthen prof. nell'Università di Copenhagen;
Davide Hilbert, prof. nell'Università di Gottinga;
Adolfo Mayer, prof. nell'Università di Lipsia;

2) nella Sezione di matematiche applicate, astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare:

Paolo Pizzetti, prof. nella R. Università di Pisa;

3) nella Sezione di fisica generale e sperimentale:

Guglielmo Corrado Röntgen dell'Università di Monaco;
Enrico Lorentz dell'Università di Leida;

4) nella Sezione di chimica generale ed applicata:

Giacomo Dewar dell'Università di Cambridge (Inghilterra);
Giacomo Ciamician della R. Università di Bologna;
Augusto Piccini del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze;

5) nella Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia:

Francesco Bassani della R. Università di Napoli;

Arturo Issel della R. Università di Genova;

6) nella Sezione di botanica e fisiologia vegetale:

Giulio Wiesner dell'Università di Vienna;

Giorgio Klebs dell'Università di Halle;

Saverio Belli dell'Università di Cagliari;

7) nella Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata:

Felice Marchand dell'Università di Lipsia.

LETTURE

LUIGI CREMONA

Cenno necrologico letto dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Al profondo rinnovamento degli studî di Geometria avvenuto nella prima metà del secolo decimonono mediante il metodo proiettivo, per opera principalmente di Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Plücker, Staudt, l'Italia prese splendida parte nella seconda metà di esso secolo, e primi ad entrare nel nuovo arringo furono tra noi Giuseppe Battaglini e Luigi Cremona. Quegli già da nove anni è sceso onorato nel sepolcro, ed ora questi lo segue fra il compianto di tutti gli scienziati del mondo civile, e particolarmente della nostra Accademia, che si onorava di annoverarlo fra i suoi Soci nazionali non residenti.

Il nome illustre di Luigi Cremona rimane registrato negli Annali della Scienza come quello del più originale e più potente geometra, in senso stretto, che abbia avuto l'Italia nel secolo decimonono, e come uno dei primeggianti nella nobile schiera internazionale guidata dai sommi dianzi nominati, e nella quale militarono Clebsch, Hesse, Cayley, Kummer ed altri insigni.

I caratteri più spiccati della figura scientifica del Cremona sono: una grande chiarezza ed eleganza di idee e di esposizione, un sapiente e felice connubio fra i procedimenti analitici e i sintetici con predominio di questi ultimi, un concetto ampio ed organico delle alte questioni geometriche. Ne fanno testimonianza tutte le sue pubblicazioni, fra le quali sono ormai classiche: l'*Introduzione ad una teoria geometrica alle curve piane* e i *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie,* due brevi trattati fondamentali, mirabili per unità ed agilità di metodo; il *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* che ottenne il gran premio Steiner dall'Accademia di Berlino; le memorie sulle *Trasformazioni razionali* nel piano e nello spazio, le quali introdussero nella scienza un concetto nuovo, di capitale

generalità ed importanza, d'inesausta fecondità; le ricerche sulle *Figure reciproche nella Statica grafica*, che bellamente adattano dottrine geometriche a scopi pratici; gli *Elementi di Geometria proiettiva*. Furono specialmente codesti lavori che, tradotti in molte lingue straniere, procacciarono al CREMONA una fama mondiale; ma accanto ad essi vogliono esser ricordati quelli sulle curve sghembe di 3° e 4° ordine, sulle superficie sviluppabili di 4° e 5° ordine e gobbe di 3° e 4° ordine, sull'ipocicloide tricuspidale, sull'esagramma mistico, ed altri molti che non ho qui agio di enumerare.

Nato a Pavia il 7 dicembre del 1830, LUIGI CREMONA interruppe gli studî nel 1848, ed infiammato di amor patrio militò per un anno e mezzo nelle file dei volontarî, prendendo parte all' eroica difesa di Venezia sino alla capitolazione. Si addottorò poscia a Pavia, dov'ebbe maestro il BRIOSCHI e compagni BELTRAMI e CASORATI; insegnò nel Ginnasio di Cremona e nel Liceo Beccaria di Milano; nel 1860 ebbe la nuova cattedra di Geometria superiore a Bologna, donde nel 1866 passò al Politecnico di Milano insegnandovi pure Statica grafica, e di là nel 1873 si trasferì a Roma come professore di Geometria superiore all'Università e direttore della riordinata Scuola per gl'ingegneri.

Fu insegnante assai efficace; fra i suoi discepoli, oltre i compianti CAPORALI e DE PAOLIS, contiamo il BERTINI, il VERONESE ed altri valenti. Come membro e vice-presidente così del Consiglio superiore della pubblica istruzione come del Senato del Regno, come ministro (purtroppo per meno di un mese), il CREMONA esercitò continua, salutare ed autorevolissima azione a prò delle scuole medie e superiori, difendendone sempre la dignità e promuovendone il progresso. Il suo contro-progetto di legge sull'istruzione superiore è opera in molte parti egregia e degna di attuazione. A lui si deve l'introduzione della Geometria proiettiva e della Statica grafica nel pubblico insegnamento.

Uomo integro, rigido, ebbe forte il sentimento del dovere e per sè e per gli altri. Si potè dissentirne in qualche giudizio su persone o cose, ma non mai misconoscerne la buona fede. Entrandogli in familiarità si osservavano in lui impeti di espansiva ammirazione o di sdegnoso disprezzo, che rivelavano una natura ricca di sensibilità, avida del bello, insofferente di ogni

meschinità. Molti lontani ricordi mi si affacciano alla mente di belle ore trascorse presso lui e la sua buona famiglia lassù a S. Pietro in Vincoli, con Beltrami, Casorati, Cossa, ... Quante morti, quanti rimpianti!

Da parecchi anni, prima perchè assorbito dalle cure dei varî ufficî, poi perchè indebolito di salute, egli erasi arrestato nella produzione scientifica; ma gli effetti della precedente geniale operosità perduravano. Da qualche tempo si temeva che egli potesse mancare da un giorno all'altro, e ciò purtroppo è seguìto il 10 di questo mese. Gravissimo è il lutto della scienza e della scuola, della famiglia e degli amici. Ma la morte per Luigi Cremona non è l'oblio, è l'ingresso glorioso nella Storia della Geometria.

Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche.

Nota di GIOVANNI ZENO GIAMBELLI.

Analoga alla questione risoluta dal teorema fondamentale sulle funzioni simmetriche è quella che si propone di poter fissare delle funzioni simmetriche di grado d nelle $x_0, x_1, ..., x_s$, le quali siano linearmente indipendenti e tali che ogni funzione simmetrica razionale intera di grado d nelle x si possa esprimere linearmente in esse. Dalla nota fatta nella pagina 6 risulterà che il problema proposto è risolubile in infiniti modi e che, per esempio, un gruppo di funzioni soddisfacenti al problema sono quelle funzioni simmetriche, quozienti di un determinante di Vandermonde generalizzato per il determinante di Vandermonde (semplice), che per tale ragione noi chiameremo funzioni simmetriche caratteristiche.

Scopo principale di questo lavoro è però quello di dimostrare un principio di dualità relativo a tali funzioni simmetriche caratteristiche, principio che fornisce il modo di costruire delle identità tra le dette funzioni, identità che hanno una speciale importanza nella Geometria Numerativa. Questo principio di dualità, come risulta dall'osservazione relativa al § 11 di una mia memoria (*),

(*) *Risoluzione del problema degli spazi secanti*, " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino ", (2), 52, 1902.

non è altro che l'interpretazione simbolica della legge di dualità applicata alle condizioni caratteristiche imposte agli spazî a più dimensioni di un dato iperspazio. Dalla mia memoria ora citata e specialmente dal § 13 è facile dedurre altre notevoli proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche, che per brevità ometteremo. Per l'importanza di alcune applicazioni fatte nei § 5 e 6, come per la dimostrazione, fatta nel § 7, di una notevole formola dello Schubert si confronti il § 8.

1. — Definizioni. — Simboli sommatorii.

Con $\}h_0, h_1, \ldots, h_s\{^{(x)}$ (essendo le h numeri interi positivi o nulli) indicheremo la funzione simmetrica

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \ldots & x_s^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \ldots & x_s^{h_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{h_s} & x_1^{h_s} & \ldots & x_s^{h_s} \end{vmatrix} : X,$$

ove X è il determinante di Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^s & x_1^s & \ldots & x_s^s \end{vmatrix}$$

relativo alle lettere $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Se si ha $0 \leq h_0 < h_1 < \ldots < h_{s-1} < h_s$, allora la funzione simmetrica $\}h_0, h_1, \ldots, h_s\{^{(x)}$ sarà chiamata *funzione simmetrica caratteristica.*

Indicheremo poi con $S_i^{(x)}$ $(i = 0, 1, \ldots, s+1)$ la funzione sim-

metrica fondamentale $\Sigma x_0 x_1 \dots x_{i-1}$, con $V_i^{(x)}$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ la funzione *aleph* (secondo Wronski) di ordine i delle $x_0, x_1, \dots, x_s$, cioè la funzione simmetrica che risulta dallo sviluppo $(x_0 + x_1 + \dots + x_s)^i$, quando in luogo di ciascuno dei coefficienti polinomiali si ponga l'unità. Per convenzione $S_0^{(x)} = V_0^{(x)} = 1$; inoltre valgono le relazioni:

$$S_i^{(x)} = \{0, 1, \dots, s-i, s-i+2, \dots, s+1\}^{(x)} \quad (i=0, 1, \dots, s+1),$$

$$V_i^{(x)} = \{0, 1, \dots, s-1, s+i\}^{(x)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Essendo φ un simbolo funzione di certe variabili $i_l, i_{l+1}, \dots, i_p$ $(p \geq l)$, indicheremo con

$$\sum_{(r;p,l)} {}_i \varphi$$

la somma di tutte le φ, nelle quali $i_l, i_{l+1}, \dots, i_p$ sono numeri, la cui somma è r e ognun dei quali vale zero oppure uno.

Se poi φ è un simbolo funzione di certe costanti $h_0, h_1, \dots, h_p$ $(0 \leq h_0 < h_1 < \dots < h_{p-1} < h_p)$ e di certe variabili $i_0, i_1, \dots, i_p$, allora

$$\sum_{(r;p)} {}_i^{(h)} \varphi$$

indicherà che la sommatoria è estesa a tutti i valori interi positivi o nulli delle i per cui

$$i_u \leq h_{u+1} - h_u - 1 \quad (u = 0, 1, \dots, p-1), \qquad i_0 + i_1 + \dots + i_p = r.$$

2. — Relazioni fondamentali sulle funzioni simmetriche caratteristiche.

Evidentemente si può scrivere:

$$(1) \qquad \{h_0, h_1, \dots, h_s\}^{(x)} \cdot S_r^{(x)} = \sum_{(r;s;0)} {}_i \{h_0 + i_0, h_1 + i_1, \dots, h_s + i_s\}^{(x)}.$$

Indichiamo ora con Δ un simbolo operativo tale che, detto $\varphi^{(x)}$ un qualsiasi polinomio (funzione razionale intera) nelle $x_0, x_1, \dots, x_s$,

$$\varphi^{(x)} \Delta \{h_0, h_1, \dots, h_s\}$$

indichi ciò che diventa $\varphi^{(x)}$, quando in luogo di ogni suo termine $x_0^{c_0} x_1^{c_1} \dots x_s^{c_s}$ si ponga $\{h_0 + c_0, h_1 + c_1, \dots, h_s + c_s\}^{(x)}$.

Quindi la formola (1) si può scrivere:

$$\{h_0, h_1, \dots, h_s\}^{(x)} \cdot S_r^{(x)} = S_r^{(x)} \Delta \{h_0, h_1, \dots, h_s\}.$$

Osservando che se più funzioni $\varphi^{(x)}$ soddisfano all'equazione simbolica

$$(2) \qquad \{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)} \cdot \varphi^{(x)} = \varphi^{(x)} \Delta \{h_0, h_1, \ldots, h_s\},$$

soddisfa pure all'equazione (2) ogni funzione uguale alla somma, oppure al prodotto, delle dette funzioni, per una nota proprietà delle funzioni simmetriche si concluderà che all'equazione simbolica (2) soddisfano tutte le funzioni simmetriche razionali intere (*).

(*) Detta $\varphi^{(x)}$ una qualsiasi funzione simmetrica di grado d nelle x, posto $h_i = i$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$, dalla (2) si deduce:

$$(2') \qquad \varphi^{(x)} = \varphi^{(x)} \Delta \{0, 1, \ldots, s\},$$

dalla quale relazione risulta che $\varphi^{(x)}$ si esprime linearmente nelle funzioni simmetriche caratteristiche di grado d nelle x.

La formola (2') è il teorema I (teorema attribuito a P. Gordan) della nota di E. D. Roe [*Note on Symmetric Functions* " American Journal of Math. ", 25, 1903, pag. 97]. L'altro teorema contenuto in questa nota del Roe segue subito dal teorema I, applicando la formola duale di quella del Trudi (cfr. pag. 16). Il metodo usato dal Roe è affatto diverso da quello seguito nel nostro lavoro. La relazione (2) poi, nel caso in cui $\varphi^{(x)}$ sia una funzione simmetrica razionale intera, costituisce una formola contenuta implicitamente in Muir [*Determinanten*, 1882, pag. 176, § 129].

Dimostriamo ora che le funzioni simmetriche caratteristiche di grado d nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ sono linearmente indipendenti.

Siccome tale proprietà è evidente qualunque sia d, se $s = 1$, come pure qualunque sia s, se $d = 1$, basterà dimostrare che essa vale per $s = s' + 1$ $(s' \geq 1)$, $d = d' + 1$ $(d' \geq 1)$, ammettendola vera per $s = s'$, $d = d' + 1$ e per $s = s' + 1$, $d = d' - s'$.

Perciò supponiamo che esista una identità $I_{d'+1} = 0$ relativa alle funzioni simmetriche caratteristiche di grado $d' + 1$ nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{s'}, x_{s'+1}$. Decomponiamo in due parti $I'_{d'+1}$, $I''_{d'+1}$ il primo membro $I_{d'+1}$ di questa identità; nella 1ª parte I'_{d+1} porremo solo le funzioni simmetriche caratteristiche $\{h_0, h_1, \ldots, h_{s'}, h_{s'+1}\}^{(x)}$ nelle quali $h_0 = 0$, nella 2ª le rimanenti, cioè quelle in cui $h_0 > 0$. Ora se esiste effettivamente la $I'_{d'+1}$, poichè la $I_{d'+1}$ per $x_{s'+1} = 0$ diventa la $I'_{d'+1}$ per $x_{s'+1} = 0$, si trae che dovrebbe esistere una identità nel caso di $s = s'$, $d = d' + 1$, il che è assurdo per ipotesi. Se invece non esiste effettivamente la $I'_{d'+1}$, allora si potrà dividere la $I_{d'+1}$ per $x_0 x_1 \ldots x_{s'} x_{s'+1}$ e quindi dovrà esistere una identità di grado $d' - s'$ nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{s'}, x_{s'+1}$, il che è assurdo per ipotesi. Dunque è provata l'indipendenza lineare delle funzioni simmetriche caratteristiche dello stesso grado.

Di qui si trae poi che la quistione enunciata in principio di questo

In particolare si trae:

$$\{h_0, h_1, ..., h_s\}^{(x)} \cdot V_r^{(x)} = V_r^{(x)} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_s\}.$$

Supponendo ora che $\{h_0, h_1, ..., h_s\}^{(x)}$ sia una funzione simmetrica caratteristica, dimostriamo la formola:

$$(3) \quad \{h_0, h_1, ..., h_s\}^{(x)} \cdot V_r^{(x)} = \sum_{(r;s)}^{(h)} \{h_0 + i_0, h_1 + i_1, ..., h_s + i_s\}^{(x)}.$$

Questa formola si verifica subito, quando $s = 1$, qualunque sia r, come pure qualunque sia s, se $r = 1$; quindi per provare che è sempre vera, basterà dimostrare che è tale per $r = r' + 1$ $(r' \geq 1)$, $s = s' + 1$ $(s' \geq 1)$, ammettendola vera per $r = r' + 1$, $s = s'$ e per $r = r'$, $s = s' + 1$.

Indicando semplicemente con V_r ciò che diventa $V_r^{(x)}$, quando $s = s' + 1$, e con V_r' ciò che diventa V_r, quando si faccia $x_{s'+1} = 0$, segue subito:

$$V_{r'+1} = V_{r'} \cdot x_{s'+1} + V'_{r'+1},$$

e quindi:

$$\{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\}^{(x)} \cdot V_{r'+1} = V_{r'+1} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\} =$$
$$= V_{r'} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1} + 1\} + V'_{r'+1} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\}.$$

Ora osserviamo che $V_{r'} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1} + 1\}$ è uguale a

$$\{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1} + 1\}^{(x)} \cdot V_{r'},$$

cioè, per l'ipotesi fatta sopra, uguale a

$$\sum_{(r';s'+1)}^{(h)} \{h_0 + i_0, h_1 + i_1, ..., h_{s'} + i_{s'}, h_{s'+1} + 1 + i_{s'+1}\}^{(x)}.$$

Decomponiamo i termini di questa sommatoria in due classi Ψ, Ψ_1; nella prima, cioè nella Ψ, porremo i termini per cui $i_{s'} \leq h_{s'+1} - h_{s'} - 1$, nell'altra i rimanenti, cioè quelli per cui $i_{s'} = h_{s'+1} - h_{s'}$. Si vede poi facilmente che $V'_{r'+1} \Delta \{h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\}$ è uguale al prodotto della funzione simmetrica caratteristica

---

lavoro è risolubile non solo in un modo, cioè colle funzioni simmetriche caratteristiche, ma in infiniti altri modi. Dalla (2') si deduce anche che se sono numeri interi i coefficienti della funzione simmetrica $\varphi^{(x)}$, sono pur tali i coefficienti dell'equivalente espressione lineare nelle funzioni simmetriche caratteristiche.

$\}h_0, h_1, ..., h_{s'}\{^{(x)}$ (nelle $x_0, x_1, ..., x_{s'}$) per $V'_{r'+1}$, quando però in luogo di ogni funzione simmetrica caratteristica $\}h_0', h_1', ..., h'_s\}^{(x)}$ (nelle $x_0, x_1, ..., x_{s'}$) si ponga la funzione simmetrica $\}h_0', h_1', ..., h'_{s'}, h'_{s'+1}\{^{(x)}$ (nelle $x_0, x_1, ..., x_{s'}, x_{s'+1}$). Cioè, tenendo anche conto dell'ipotesi fatta sopra, si potrà scrivere:

$$V'_{r'+1}\Delta\}h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\{=\sum_{(r'+1;\,s')}{}_i^{(h)}\}h_0+i_0, h_1+i_1, ..., h_{s'}+i_{s'}, h_{s'+1}\{^{(x)}.$$

Decomponiamo i termini della sommatoria del secondo membro in due classi Ψ', Ψ_1'; nella prima porremo i termini per cui $i_{s'} \leq h_{s'+1} - h_{s'} - 1$, nell'altra, cioè nella Ψ_1', i rimanenti, ossia i termini per cui $i_{s'} > h_{s'+1} - h_{s'}$. Riassumendo si trae:

$$\}h_0, h_1, ..., h_{s'}, h_{s'+1}\{^{(x)} \cdot V_{r'+1} = \Psi + \Psi_1 + \Psi' + \Psi_1'.$$

Siccome $\Psi_1 + \Psi_1' = 0$, si conclude che il secondo membro dell'ultima relazione è uguale a

$$\sum_{(r'+1;\,s'+1)}{}_i^{(h)}\}h_0 + i_0, h_1 + i_1, ..., h_{s'} + i_{s'}, h_{s'+1} + i_{s'+1}\{^{(x)} \qquad \text{c. v. d.}$$

Teorema. — *Indicando con*

$$h_l, h_{l+1}, ..., h_s \qquad (0 \leq l \leq s)$$

numeri interi positivi, tali che sia

$$l < h_l < h_{l+1} < ... < h_{s-1} < h_s,$$

$$h_l + h_{l+1} + ... + h_s \leq [l + (l+1) + ... + s] + s + 1,$$

vale la formola:

$$(4) \qquad \}0, 1, ..., l-1, h_l, h_{l+1}, ..., h_s\{^{(x)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=h_l-l} (-1)^{i+1}\}0, 1, ..., l-1, h_l - i, h_{l+i}, ..., h_s\{^{(x)} \cdot S_i^{(x)} +$$

$$+ (-1)^{h_l-l} \sum_{(h_l-l;\,s;\,l+1)}{}_i \}0, 1, ..., l-1, l, h_{l+1} + i_{l+1}, ..., h_s + i_s\{^{(x)}.$$

Anzitutto si potrà scrivere:

$$\sum_{i=0}^{i=h_l-l} (-1)^i\}0, 1, ..., l-1, h_l - i, h_{l+1}, ..., h_s\{^{(x)} \cdot S_i^{(x)} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{i=h_l-l} (-1)^i x_l^{h_l-l-i} \cdot S_i^{(x)}\right)\Delta\}0, 1, ..., l-1, l, h_{l+1}, ..., h_s\{.$$

Se è $h_l - l = s + 1$, e quindi $l = s$ (per la restrizione relativa alle h), allora il secondo membro dell'ultima relazione è identicamente nullo, onde si conclude che in tal caso è vera la formola (4).

Se è $h_l - l < s + 1$ sarà

$$\sum_{i=0}^{i=h_l-l} (-1)^i x_l^{h_l-l-i} \cdot S_i^{(x)} = S'_{h_l-l},$$

ove S'_{h_l-l} indica ciò che diventa S_{h_l-l}, quando si faccia $x_l = 0$. Procedendo in modo analogo a quello usato per eseguire l'espressione simbolica $V'_{r'+1}\Delta\{h_0, h_1, \ldots, h_{s'}, h_{s'+1}\}$, considerata per dimostrare la formola (3), si conclude che $S'_{h_l-l}\Delta\{0, 1, \ldots, l-1, l, h_{l+1}, \ldots, h_s\}$ è identicamente nullo, se $h_l > s$, ed è invece uguale a

$$(-1)^{h_l-l} \sum_{(h_l-l;s;l+1)}{}_i \{0, 1, \ldots, l-1, l, h_{l+1}+i_{l+1}, \ldots, h_s+i_s\}^{(x)},$$

se $h_l \leq s$. Quindi anche nell'ipotesi $h_l - l < s + 1$ è vera la formola (4).

3. — Definizione del gruppo duale d'un gruppo di dati numeri — Proposizioni relative alla ricerca del principio di dualità nelle funzioni simmetriche caratteristiche.

Se $h_0, h_1, \ldots, h_s$ sono $s + 1$ numeri interi tali che

$$0 \leq h_0 < h_1 < \ldots < h_{s-1} < h_s \leq s + t + 1,$$

diremo che ammettono, come t^{simo} gruppo duale, il gruppo dei numeri $k_0, k_1, \ldots, k_t$, soddisfacenti alle disuguaglianze

$$0 \leq k_0 < k_1 < \ldots < k_{t-1} < k_t \leq s + t + 1$$

e inoltre tali che la serie dei numeri

$$k_0, k_1, \ldots, k_t, \; s+t+1-h_0, \; s+t+1-h_1, \; \ldots, s+t+1-h_s$$

sia una permutazione dei numeri $0, 1, \ldots, s+t+1$. Quando i numeri $h_0, h_1, \ldots, h_s$ non soddisfano alle disuguaglianze di sopra, allora non esisterà il t^{simo} gruppo duale, se poi non sono soddisfatte le disuguaglianze

$$0 \leq h_0 < h_1 < \ldots < h_{s-1} < h_s,$$

allora non esisterà nessun gruppo duale. Evidentemente se $k_0, k_1, ..., k_t$ è il t^{simo} gruppo duale del gruppo $h_0, h_1, ..., h_s$, allora l's^{simo} gruppo duale di $k_0, k_1, ..., k_t$ sarà il gruppo $h_0, h_1, ..., h_s$.

Premesso questo, se $\}h_0, h_1, ..., h_s\{^{(x)}$ è una funzione simmetrica caratteristica tale che $h_s \leq s+t+1$, allora, detto $k_0, k_1, ..., k_t$ il t^{simo} gruppo duale dei numeri $h_0, h_1, ..., h_s$, il simbolo

$$\}s;\, k_0,\, k_1,\, ...,\, k_t\{^{(x)}$$

designerà la funzione simmetrica caratteristica $\}h_0, h_1, ..., h_s\{^{(x)}$. Quindi si può dire che il simbolo $\}s;\, k_0,\, k_1,\, ...,\, k_t\{^{(x)}$ designa la funzione simmetrica caratteristica $\}h_0, h_1, ..., h_s\{^{(x)}$ (ove $h_0, h_1, ..., h_s$ è l's^{simo} gruppo duale del gruppo $k_0, k_1, ..., k_t$), se sono soddisfatte le disuguaglianze

$$0 \leq k_0 < k_1 < ... < k_{t-1} < k_t \leq s+t+1;$$

altrimenti $\}s;\, k_0,\, k_1,\, ...,\, k_t\{^{(x)}$ designa una funzione identicamente nulla.

Lemma. — *Indicando con* $\mathrm{k}_0, \mathrm{k}_1, ..., \mathrm{k}_t$ *il* t^{simo} *gruppo duale dei numeri* $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, ..., \mathrm{h}_s$, *se* $\mathrm{h}_s + \mathrm{r} \leq \mathrm{s} + \mathrm{t} + 1$, *vale la formola:*

$$(5) \quad \}s;\, k_0, k_1, ..., k_t\{^{(x)} \cdot V_r = \sum_{(r;t;0)}{}_i \}s;\, k_0+i_0,\, k_1+i_1,\, ...,\, k_t+i_t\{^{(x)}.$$

Rappresentiamo col simbolo $(h_u, h_{u+1};\, i_u)$ $(u=0, 1, ..., s)$ la serie dei numeri

$$s+t+1-h_{u+1}+1,\; s+t+1-h_{u+1}+2, ...,\; s+t+1-h_u-1,$$
$$s+t+1-h_u,$$

quando si tolga il numero $s+t+1-h_u-i_u$ (essendo l'intero i_u tale che $0 \leq i_u \leq h_{u+1}-h_u-1$). Analogamente $(h_s;\, i_s)$ rappresenterà la serie dei numeri

$$0,\, 1,\, ...,\, s+t+1-h_s,$$

quando si tolga il numero $s+t+1-h_s-i_s$ (essendo l'intero i_s tale che $0 \leq i_s \leq s+t+1-h_s$), infine con (h_0) s'indicherà la serie dei numeri

$$s+t+1-h_0+1,\; s+t+1-h_0+2,\; ...,\; s+t+1.$$

Quindi si trae che il secondo membro della (5), esclusi i termini $\}s;\, k_0+i_0,\, k_1+i_1,\, ...,\, k_t+i_t\{^{(x)}$ identicamente nulli, è uguale a

$$\sum_{(r;s)}{}_i^{(h)} \}s;\, (h_s;\, i_s),\, (h_{s-1}, h_s;\, i_{s-1}),\, ...,\, (h_0, h_1;\, i_0),\, (h_0)\{^{(x)}.$$

Siccome tra i termini di questa sommatoria e quelli dell'altra

$$\Sigma_{i}^{(h)}_{(r;s)} \{h_0 + i_0,\ h_1 + i_1,\ \ldots,\ h_s + i_s\}^{(x)}$$

è individuata una corrispondenza biunivoca senza eccezione, quando si considerino come corrispondenti due termini aventi gli stessi valori per le $i_0, i_1, \ldots, i_s$, si conclude subito che la formola (5) è conseguenza immediata della (3), essendo due termini corrispondenti uguali tra loro.

Teorema. — *Considerando le funzioni simmetriche caratteristiche di* $t+1$ *lettere* $y_0, y_1, \ldots, y_t$, *se indichiamo con* $h_l, h_{l+1}, \ldots, h_s$ $(0 \leq l \leq s)$ *numeri interi positivi, tali che sia*

$$l < h_l < h_{l+1} < \ldots < h_{s-1} < h_s$$

$$h_l + h_{l+1} + \ldots + h_s \leq [l + (l+1) + \ldots + s] + t + 1,$$

allora vale la formola:

$$(6) \qquad \{t;\ 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ h_l,\ h_{l+1},\ \ldots,\ h_s\}^{(y)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=h_l-l} (-1)^{i+1} \{t;\ 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ h_l - i,\ h_{l+1},\ \ldots,\ h_s\}^{(y)} \cdot V_i^{(y)} +$$

$$+ (-1)^{h_l-l} \Sigma_{i}_{(h_l-l;s;l+1)} \{t;\ 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ l,\ h_{l+1} + i_{l+1},\ \ldots,\ h_s + i_s\}^{(y)}.$$

Eseguendo i due prodotti

$$\{0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ h_l - i,\ h_{l+1},\ \ldots,\ h_s\}^{(x)} \cdot S_i^{(x)}$$

$$\{t;\ 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ h_l - i,\ h_{l+1},\ \ldots,\ h_s\}^{(y)} \cdot V_i^{(y)}$$

rispettivamente per mezzo delle formole (1) e (5), ed escluse le funzioni caratteristiche identicamente nulle, si trae che ad ogni funzione simmetrica caratteristica $\{h_0', h_1', \ldots, h_s'\}^{(x)}$ risultante dal primo prodotto si può associare nel secondo prodotto la funzione simmetrica caratteristica $\{t;\ h_0', h_1', \ldots, h_s'\}^{(y)}$. Tenendo conto delle disuguaglianze relative ai numeri $h_0, h_1, \ldots, h_s$, si ricava che la corrispondenza così definita è biunivoca senza eccezione; quindi, siccome per la (4) vale:

$$\sum_{i=1}^{i=h_l-l}(-1)^{i+1}\}0,\,1,\,\ldots,\,l-1,\,h_l-i,\,h_{l+1},\,\ldots,\,h_s\{^{(x)}\cdot S_i^{(x)}=$$
$$=\}0,\,1,\,\ldots,\,l-1,\,h_l,\,h_{l+1},\,\ldots,\,h_s\{^{(x)}-$$
$$-(-1)^{h_l-l}\sum_{(h_l-l;s;l+1)}{}_i\}0,\,1,\,\ldots,\,l-1,\,l,\,h_{l+1}+i_{l+1},\,\ldots,\,h_s+i_s\{^{(x)},$$

si conclude subito una formola equivalente alla (6).

4. — Il principio di dualità nelle funzioni simmetriche caratteristiche.

Teorema. — *Essendo* $t\leq s$, *le relazioni*

$$S_i^{(x)}=V_i^{(y)}\qquad(i=1,2,\ldots,t+1),$$

considerate come atte a definire le $y_0,y_1,\ldots,y_t$ *mediante le* $x_0,x_1,\ldots,x_s$ *(e non viceversa in generale), mutano ogni funzione simmetrica caratteristica* $\}h_0,h_1,\ldots,h_s\{^{(x)}$ *(relativa alle* x*) tale che*

$$h_0+h_1+\ldots+h_s\leq\frac{s(s+1)}{2}+t+1$$

nella funzione simmetrica caratteristica $\}t;\,h_0,\,h_1,\ldots,h_s\{^{(y)}$ *(relativa alle* y*).*

Il teorema enunciato sarà vero, se si dimostra che per le relazioni $S_i^{(x)}=V_i^{(y)}$ $(i=1,\,2,\ldots,t,\,t+1)$ ogni funzione simmetrica caratteristica $\}0,\,1,\,\ldots,\,l-1,\,h_l,\,h_{l+1},\,\ldots,\,h_s\{^{(x)}$, tale che $h_l+h_{l+1}+\ldots+h_s\leq[l+(l+1)+\ldots+s]+t+1$ $(0\leq l\leq s)$, si muta nella funzione simmetrica caratteristica $\}t;0,1,\ldots,l-1,h_l,h_{l+1},\ldots,h_s\{^{(y)}$. Questa proprietà si verifica subito quando $l=s$, perchè basta osservare che è vera per $h_s=a+1$, quando si supponga tale per $h_s\leq a$. Quindi la proprietà in considerazione risulterà vera in qualunque caso, se si dimostra vera per $h_{l'}=a+1$ $(l'\geq 0)$, supponendola tale per $h_{l'}\leq a$ e supponendola pur vera per l *maggiore di* l'. Tenendo conto di tale ipotesi, per la formola (4) si trae che le relazioni $S_i^{(x)}=V_i^{(y)}$ mutano la $\}0,\,1,\,\ldots,\,l'-1,\,a+1,\,h_{l'+1},\ldots,\,h_s\{^{(x)}$ in

$$\sum_{i=1}^{i=a+1-l'}(-1)^{i+1}\}t;\,0,\,1,\,\ldots,\,l'-1,\,a+1-i,\,h_{l'+1},\,\ldots,\,h_s\{^{(y)}\cdot V_i^{(y)}+$$
$$+(-1)^{a+1-l'}\sum_{(a+1-l';s;l'+1)}{}_i\}t;\,0,\,1,\,\ldots,\,l'-1,\,l',\,h_{l'+1}+i_{l'+1},\,\ldots,\,h_s+i_s\{^{(y)},$$

cioè per la formola (6) in

$$\}t;\,0,\,1,\,\ldots,\,l'-1,\,a+1,\,h_{l'+1},\,\ldots,\,h_s\{^{(y)}\qquad\text{c. v. d.}$$

Coi simboli I_s, I_d, ecc. indichiamo funzioni razionali intere nelle funzioni simmetriche caratteristiche di $s+1$ lettere $x_0, x_1, \ldots, x_s$, oppure di $d+1$ lettere $x_0, x_1, \ldots, x_d$, ecc.

Sia $I_s=0$; se in luogo di ogni funzione simmetrica caratteristica $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)}$ contenuta in I_s si pone la funzione simmetrica caratteristica $\{0, 1, \ldots, d-s-1, h_0+d-s, h_1+d-s, \ldots, h_s+d-s\}^{(x)}$ relativa alle $d+1$ $(d \geq s)$ lettere $x_0, x_1, \ldots, x_d$, la funzione I_s si muterà in un'altra I_d. Se la I_d risulta identicamente nulla, allora l'identità $I_d=0$ sarà chiamata l'identità $I_s=0$ *estesa a* $d+1$ *lettere*, oppure, più brevemente, l'identità estesa della $I_s=0$. Inoltre se $I_d=0$ è l'identità $I_s=0$ estesa a $d+1$ $(d \geq s)$ lettere, diremo che $I_s=0$ è l'identità $I_d=0$ *ridotta a* $s+1$ *lettere*. Evidentemente poi la $I_s=0$, identità ridotta della $I_d=0$, non è altro che la $I_d=0$, quando si faccia

$$x_{s+1}=x_{s+2}=\ldots=x_d=0.$$

Dimostriamo la seguente proposizione:

Se di un' identità $I_s=0$ *di grado* d *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_s$ *esiste l'identità estesa* $I_{d-1}=0$, *allora esisterà qualunque identità estesa* $I_{d'+1}=0$, *essendo* $d' \geq d-1$.

Basterà provare che esiste l'identità estesa $I_{d'+1}=0$ $(d' \geq d-1)$, quando si ammetta l'esistenza dell'identità estesa $I_{d'}=0$. Sia $I^{(1)}_{d'+1}$ ciò che diventa $I_{d'}$, quando in luogo di ogni funzione simmetrica caratteristica $\{h_0, h_1, \ldots, h_{d'}\}$ si ponga la funzione simmetrica caratteristica $\{0, h_0+1, h_1+1, \ldots, h_{d'}+1\}^{(x)}$, onde $I^{(1)}_{d'+1}$ sarà una funzione simmetrica razionale intera nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{d'}, x_{d'+1}$, che si annulla per $x_{d'+1}=0$. Siccome il grado di $I^{(1)}_{d'+1}$ è minore di $d'+2$, si trae che non potrà esser divisibile per $x_{d'+1}$, perchè, essendo la $I^{(1)}_{d'+1}$ simmetrica nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{d'}, x_{d'+1}$, dovrebbe esser pure divisibile per x_0, per x_1, ecc.; quindi sarà identicamente nulla, cioè l'identità $I^{(1)}_{d'+1}=0$ si potrà pensare come l'identità estesa $I_{d'+1}=0$.

Diremo che un'identità $I_s=0$ di grado d nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ è *indipendente*, quando esiste l'identità estesa $I_{d-1}=0$, e, di conseguenza, quando esistono tutte le identità estese a qualsiasi numero di lettere.

Quando è $h_s \leq s+t+1$, diremo che la funzione simmetrica caratteristica $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)}$ nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ ammette, quale *funzione simmetrica caratteristica duale relativa alle* $t+1$ *lettere*

$y_0, y_1, \ldots, y_t$, la funzione $\{t; h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(y)}$, cioè la $\{k_0, k_1, \ldots, k_t\}^{(y)}$, essendo $k_0, k_1, \ldots, k_t$ il t^{simo} gruppo duale del gruppo $h_0, h_1, \ldots, h_s$. Se non è $h_s \leq s + t + 1$, considereremo lo zero quale funzione simmetrica duale relativa alle $t + 1$ lettere $y_0, y_1, \ldots, y_t$.

Principio di dualità. — *Se* $\mathrm{I}_s = 0$ *è un' identità indipendente (relativa alle funzioni simmetriche caratteristiche di* $\mathrm{s}+1$ *lettere* $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s$*), allora esiste anche l'identità* $\mathrm{I}_t' = 0$, *relativa alle* $\mathrm{t}+1$ *lettere* $\mathrm{y}_0, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_t$, *ottenuta dalla* $\mathrm{I}_s = 0$, *quando in luogo di ogni funzione simmetrica caratteristica* $\{\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_s\}^{(x)}$ *si ponga la funzione simmetrica caratteristica duale nelle* $\mathrm{t}+1$ *lettere* $\mathrm{y}_0, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_t$.

Sia d il grado di I_s nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Se è $t \leq s$, $d \leq t+1$, per il primo teorema di questo § segue che le relazioni $S_i^{(x)} = V_i^{(y)}$ $(i = 1, \ldots, t, t+1)$ mutano l'identità $I_s = 0$ nell'identità duale $I_t' = 0$. Se è $t \leq s$, $d > t + 1$, si consideri la $I_{s+d-t-1} = 0$ identità estesa della $I_s = 0$; per le relazioni $S_i^{(x)} = V_i^{(y)}$ $(i = 1, \ldots, d)$ relative ai due gruppi di lettere

$$x_0, x_1, \ldots, x_{s+d-t-1}, \qquad y_0, y_1, \ldots, y_{d-1}$$

l'identità $I_{s+d-t-1} = 0$ si muterà nella $I'_{d-1} = 0$ relativa alle $y_0, y_1, \ldots, y_{d-1}$. È facile vedere che la $I_t^{(1)} = 0$, identità ridotta della $I'_{d-1} = 0$, non è altro che la $I_t' = 0$, identità ottenuta dalla $I_s = 0$ col principio di dualità. Quindi si è dimostrato il principio di dualità, quando è $t \leq s$.

Se poi è $t \geq s$, sia $I_t = 0$ l'identità estesa della $I_s = 0$; per quanto si è già dimostrato si potrà considerare l'identità duale $I_t^{(1)} = 0$ della $I_t = 0$. È facile vedere che la $I_t^{(1)} = 0$ è la stessa $I_t' = 0$, identità ottenuta col principio di dualità dalla $I_s = 0$; onde, anche quando è $t \geq s$, si può applicare il principio di dualità.

Osservazione. — Il principio di dualità è anche applicabile alle identità $I_s = 0$ non indipendenti, ma tali che nella forma in cui sono scritte valgono anche, quando il grado d delle I_s nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ non sia maggiore di $s + 1$.

Infatti basta pensare che alla $I_s = 0$ si può applicare il principio di dualità quando $s \geq d - 1$ (perchè $I_s = 0$ è allora indipendente), e inoltre che applicando il principio di dualità alla $I_s = 0$, tanto se $s < d - 1$, quanto se $s \geq d - 1$, si ottiene lo stesso risultato.

5. — Applicazioni del principio di dualità.

Se l'identità $I_s = 0$ nelle $x_0, x_1, ..., x_s$ è indipendente e quindi ammette la $I_t' = 0$ come identità duale (cioè ottenuta col principio di dualità) nelle $y_0, y_1, ..., y_t$, allora la $I_t' = 0$, se è indipendente, ammette la $I_s = 0$ come identità duale relativa alle lettere $x_0, x_1, ..., x_s$. Per maggior uniformità nelle considerazioni seguenti diremo che la $I_t' = 0$ è una identità duale della $I_s = 0$, quando gode anche della proprietà di essere indipendente, oppure si trova nelle condizioni dell'osservazione fatta in fine al § 4. Inoltre pure per uniformità potremo considerare, come identità duali tra loro, identità relative ad uno stesso gruppo di lettere, p. es. $x_0, x_1, ..., x_s$; così il principio di dualità si può considerare come un'operazione simbolica ciclica di 2° ordine sulle identità simmetriche di più lettere.

Tenendo conto dell'osservazione fatta in fine al § 4 è facile vedere che sono duali tra loro le due formole seguenti:

$$V_h^{(x)} = \sum (-1)^{r_2+r_4+\cdots} \frac{(r_1+r_2+\ldots+r_{s+1})!}{r_1!\, r_2! \ldots r_{s+1}!} (S_1^{(x)})^{r_1} (S_2^{(x)})^{r_2} \ldots (S_{s+1}^{(x)})^{r_{s+1}},$$

$$S_h^{(x)} = \sum (-1)^{r_2+r_4+\cdots} \frac{(r_1+r_2+\ldots+r_{s+1})!}{r_1!\, r_2! \ldots r_{s+1}!} (V_1^{(x)})^{r_1} (V_2^{(x)})^{r_2} \ldots (V_{s+1}^{(x)})^{r_{s+1}},$$

ove in entrambe le sommatorie si considerano tutti i valori positivi o nulli delle variabili r per cui si ha

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + (s+1) r_{s+1} = h;$$

nella prima formola h è un numero intero positivo qualunque; nella seconda invece deve essere $h \leq s+1$. Dalla seconda formola segue poi in particolare che essa vale anche se $h > s+1$, purchè si ponga lo zero in luogo di $S_h^{(x)}$; la prima formola si trova in un noto lavoro del Trudi (*).

Per le ricerche del seguente § è opportuno trovare la for-

(*) *Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni ed alle funzioni omogenee complete di queste radici,* " Giorn. di Matematiche ", 2, 1864, Nota II, pag. 83.

mola duale di un'altra nota formola del TRUDI (*), cioè della formola:

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)} = \begin{vmatrix} V^{(x)}_{h_s-s} & V^{(x)}_{h_s-(s-1)} & \cdots & V^{(x)}_{h_s} \\ V^{(x)}_{h_{s-1}-s} & V^{(x)}_{h_{s-1}-(s-1)} & \cdots & V^{(x)}_{h_{s-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V^{(x)}_{h_0-s} & V^{(x)}_{h_0-(s-1)} & \cdots & V^{(x)}_{h_0} \end{vmatrix},$$

nella quale bisogna porre l'unità, oppure lo zero, rispettivamente al posto delle $V^{(x)}$ d'indice nullo, oppure negativo. La formola duale di quest'ultima del TRUDI si potrà così enunciare:

Se $k_0, k_1, \ldots, k_t$ *sono numeri interi tali che* $0 \leq k_0 < k_1 < \ldots < k_{t-1} < k_t \leq s + t + 1$, *indicando con* $h_0, h_1, \ldots, h_s$ *ciò che diventa la serie dei numeri* $0, 1, \ldots, s+t+1$, *quando si tolgano i numeri*

$$s + t + 1 - k_t,\ s + t + 1 - k_{t-1},\ \ldots,\ s + t + 1 - k_0,$$

allora vale la formola:

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)} = \begin{vmatrix} S^{(x)}_{k_t-t} & S^{(x)}_{k_t-(t-1)} & \cdots & S^{(x)}_{k_t} \\ S^{(x)}_{k_{t-1}-t} & S^{(x)}_{k_{t-1}-(t-1)} & \cdots & S^{(x)}_{k_{t-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S^{(x)}_{k_0-t} & S^{(x)}_{k_0-(t-1)} & \cdots & S^{(x)}_{k_0} \end{vmatrix},$$

nella quale bisogna porre lo zero in luogo delle $S^{(x)}_i$, *per cui non si abbia* $0 \leq i \leq s + 1$, *e inoltre l'unità in luogo di* $S^{(x)}_0$ (**).

(*) *Intorno ad un determinante più generale, ecc.*, " Giorn. di Matem. ", 2, 1864, Nota I, pag. 151-158.

(**) Questa formola si potrebbe dedurre facilmente dalla relazione

$$\Delta(\alpha) = (-1)^{\nu} \,.\, \Delta_{\alpha} \,.\, \Delta(a),$$

conseguenza immediata di queste altre:

$$\Delta(\alpha) = (-1)^{\nu} \,.\, \rho \,.\, \Delta(a), \qquad \Delta_{\alpha} = \rho,$$

contenute a pag. 183, § 171-72, nell'*Invariantentheorie* (Leipzig, B. G. Teubner,

Per brevità non daremo altri esempi di formole duali tra loro.

6. — Formole relative alla condizione perchè due equazioni abbiano più radici in comune.

Facciamo ora alcune applicazioni della formola duale di quella del TRUDI.

Indichiamo con $M(s, t, p; x, y)$, ove $s \geq t \geq p \geq 0$, la matrice di $s+t+2-2p$ linee e $s+t+2-p$ colonne nella quale gli elementi della colonna $(i+1)^{\text{sima}}$ $(i = 0, 1, \ldots, s+t+1-p)$ sono rispettivamente

$$S_i^{(x)}, S_{i-1}^{(x)}, \ldots, S_{i-t+p}^{(x)}, S_i^{(y)}, S_{i-1}^{(y)}, \ldots, S_{i-s+p}^{(y)},$$

ove bisogna porre lo zero in luogo delle $S_i^{(x)}$ per cui non si abbia $0 \leq i \leq s+1$ e delle $S_i^{(y)}$ per cui non si abbia $0 \leq i \leq t+1$, inoltre l'unità in luogo di $S_0^{(x)}$ e di $S_0^{(y)}$. Per la formola duale di quella del TRUDI si trae la seguente proposizione:

Il determinante formato dalle colonne $(\mathrm{k}_0+1)^{\text{sima}}, (\mathrm{k}_1+1)^{\text{sima}}, \ldots, (\mathrm{k}_{s+t+1-2p}+1)^{\text{sima}}$ *della matrice* $\mathrm{M}(\mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{p}; \mathrm{x}, \mathrm{y})$ *è uguale a*

$$\Sigma \pm \{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)} \cdot \{h_0', h_1', \ldots, h_t'\}^{(y)},$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i valori dei numeri interi h, h′, *per cui*

1° $\quad h_0 < h_1 < \ldots < h_{s-1} < h_s, \quad h_0' < h_1' < \ldots < h'_{t-1} < h_t'$;

2° p *dei numeri* h *e* p *dei numeri* h′ *siano uguali a* $\mathrm{k}_0', \mathrm{k}_1', \ldots, \mathrm{k}'_{p-1}$, *essendo* $\mathrm{k}_0', \mathrm{k}_1', \ldots, \mathrm{k}'_{p-1}$ *ciò che diventa la serie dei numeri* $0, 1, \ldots, \mathrm{s}+\mathrm{t}+1-\mathrm{p}$ *quando si tolgano i numeri*

$$s+t+1-p-k_{s+t+1-2p}, \ldots, s+t+1-p-k_1, \; s+t+1-p-k_0:$$

1885), vol. 1° di P. GORDAN. Il GORDAN deduce le due precedenti relazioni, con metodo affatto diverso da quello seguito nel nostro lavoro, da un teorema sulle matrici corrispondenti. Così si vede come il nostro principio di dualità, applicato in un caso particolare, permette di riunire in una sola due formole affatto diverse (almeno finora), quella del TRUDI e la sua duale, cioè quella formola che si può dire contenuta implicitamente nell'*Invariantentheorie* del GORDAN. Quindi emerge l'importanza della Geometria Numerativa dello SCHUBERT, perchè lo studio puramente algebrico, che ci ha condotti al nostro principio di dualità, si sarebbe potuto sopprimere pensando all'interpretazione simbolica della legge (geometrica) di dualità nel problema degli spazî secanti, come è accennato nell'osservazione del § 11 della mia citata memoria (cfr. la prima nota del seguente § 8).

3° *la serie dei numeri* $h_0, h_1, \ldots, h_s, h'_0, h'_1, \ldots, h'_t$ *privata dei numeri* h *uguali a* $k_0', k_1', \ldots, k'_{p-1}$ *e dei numeri* h′ *pure uguali a* $k_0', k_1', \ldots, k'_{p-1}$ *sia una permutazione* D *del gruppo* G *di numeri che si ottiene dal gruppo* $0, 1, \ldots, s+t+1-p$ *escludendo i numeri* $k_0', k_1', \ldots, k'_{p-1}$; *a ciascun termine si dà poi il segno* +, *oppure* —, *secondochè la permutazione* D *dei numeri del gruppo* G *è pari, oppure dispari.*

Ricordando la formola di W. Scheibner (*) relativa alla condizione necessaria e sufficiente, affinchè due equazioni abbiano più radici in comune dalla proposizione precedente si trae

Teorema. — *Affinchè due equazioni*

$$\sum_{i=0}^{i=s+1} (-1)^i S_i^{(x)} x^{s+1-i} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=t+1} (-1)^i S_i^{(y)} y^{t+1-i} = 0$$

abbiano $p+1$ *radici in comune, è necessario e sufficiente che siano nulle le* $\binom{s+t+2-p}{p}$ *funzioni* $R_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ (*ove* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *è una qualunque combinazione di* p *dei numeri* $0, 1, \ldots, s+t+1-p$), *essendo*

$$R_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \Sigma \pm \{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)} \cdot \{h_0', h_1', \ldots, h_t'\}^{(y)},$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i valori interi delle h *e delle* h′ *per cui*

$$1^\circ \quad h_0 < h_1 < \ldots < h_{s-1} < h_s, \quad h_0' < h_1' < \ldots < h'_{t-1} < h_t';$$

2° p *dei numeri* h *e* p *dei numeri* h′ *siano uguali a* $i_1, i_2, \ldots, i_p$;

3° *la serie dei numeri* $h_0, h_1, \ldots, h_s, h_0', h_1', \ldots, h_t'$, *privata dei numeri* h *uguali a* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *e dei numeri* h′ *pure uguali a* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *sia una permutazione* D *del gruppo* G *di numeri, che si ottiene dal gruppo* $0, 1, \ldots, s+t+1-p$ *escludendo i numeri* $i_1, i_2, \ldots, i_p$; *inoltre a ciascun termine si dà il segno* +, *oppure* —, *secondochè la permutazione* D *dei numeri del gruppo* G *è pari, oppure dispari.*

Ricordando una nota formola sulla risultante di due equa-

(*) *Mathematische Bemerkungen*, " Leipzig. Berichte ", 40, 1888. — Una semplice dimostrazione (che il Weierstrass accenna nelle sue lezioni) della formola citata si trova in Garbieri, *Sulla teoria della eliminazione fra due equazioni*, " Acc. Gioenia di Catania ", (4), 6, 1893.

zioni ed applicando la proposizione precedente (oppure quella di pag. 18) per $p=0$ si ottiene la formola:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &(x_0+y_0)(x_0+y_1)\dots(x_0+y_t)\cdot \\ &\cdot(x_1+y_0)(x_1+y_1)\dots(x_1+y_t)\cdot \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ &\cdot(x_s+y_0)(x_s+y_1)\dots(x_s+y_t)= \\ &=\Sigma\,\}i_0, i_1, \dots, i_s\{^{(x)}\cdot\}i_0', i_1', \dots, i_t'\{^{(y)}, \end{aligned}$$

ove la sommatoria del secondo membro è estesa a tutti i valori interi delle i e delle i' per cui

$$i_0<i_1<\dots<i_{s-1}<i_s,\quad i_0'<i_1'<\dots<i_t'$$

e inoltre tali che $i_0, i_1, \dots, i_s, i_0', i_1', \dots, i_t'$ sia una permutazione dei numeri $0, 1, \dots, s+t+1$.

Rispetto all'importanza di questo risultato cfr. il § 8.

7. — Dimostrazione d'una notevole formola (dello Schubert) **duale di se stessa.**

Considerando una funzione simmetrica caratteristica $\}h_0, h_1, \dots, h_s\{^{(x)}$ diciamo h_{s-l} quella h_i, d'indice minimo, maggiore di s; allora, posto $a_i=h_{s-i}-s$ $(i=0,1,\dots,l)$ e detto c_r $(r=0,1,\dots,l+1)$ il numero (può essere anche zero) delle h_i per cui $h_i=i+r$, col simbolo

$$\}a_0, a_1, \dots, a_l;\ c_{l+1}, c_l, \dots, c_0\{^{(x)}$$

s'indicherà la funzione simmetrica caratteristica $\}h_0, h_1, \dots, h_s\{^{(x)}$.

Indicando con $b_0, b_1, \dots, b_l$ *numeri interi, tali che sia*

$$b_i=s-c_0-c_1-\dots-c_i-i\qquad (i=0, 1, \dots, l),$$

vale la formola (dello Schubert):

$$\}a_0, a_1, \dots, a_l;\ c_{l+1}, c_l, \dots, c_0\{^{(x)}=$$

$$=\begin{vmatrix} \}a_0; b_0,\ s-b_0\{^{(x)} & \}a_0; b_1,\ s-b_1\{^{(x)} & \dots & \}a_0; b_l,\ s-b_l\{^{(x)} \\ \}a_1; b_0,\ s-b_0\{^{(x)} & \}a_1; b_1,\ s-b_1\{^{(x)} & \dots & \}a_1; b_l,\ s-b_l\{^{(x)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \}a_l; b_0,\ s-b_0\{^{(x)} & \}a_l; b_1,\ s-b_1\{^{(x)} & \dots & \}a_l; b_l,\ s-b_l\{^{(x)} \end{vmatrix},$$

ove i numeri interi a *sono tali che* $a_0 > a_1 > \ldots > a_{l-1} > a_l > 0$. *(Non occorre osservare che è* $c_{l+1} = b_l$, $b_0 > b_1 > \ldots > b_{l-1} > b_l \geq 0$*).*

Per quanto diremo nel § 8, abbiamo attribuito questa formola allo Schubert. È facile vedere che la duale della formola dello Schubert è ancora la stessa formola dello Schubert (cambiate le lettere però); cioè la formola dello Schubert è duale di se stessa.

Siccome la formola in considerazione è evidente quando $l=0$, per provare che è vera in qualunque caso basterà dimostrare le seguenti due proposizioni:

1° La formola dello Schubert è vera per $l=p$ $(p \geq 1)$ quando $b_i = b_i' + 1$ $(i=0, 1, \ldots, p)$, $b_p' \geq 0$, se si ammette tale quando $b_i = b_i'$ $(i=0, 1, \ldots, p)$.

2° La formola dello Schubert è vera per $l=p$ $(p \geq 1)$ quando $b_p = 0$, se si ammette tale per $l=p-1$.

Si dimostrerà solo la prima proposizione, perchè si accennerà anche al caso $b_p' = -1$ (limitandoci però in questo caso, per mancanza di spazio, a mostrare solo le modificazioni principali); del resto si può far subito la dimostrazione della seconda proposizione, quando si conosce quella della prima.

Posto

$$c'_{p+1} = b_p' + 1, \quad c_i' = b'_{i-1} - b_i' - 1 \quad (i=1, \ldots, p), \quad c_0' = s - b_0' - 1,$$

dalla formola del Trudi (cfr. § 5) segue facilmente:

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_p;\ c'_{p+1}, c'_p, \ldots, c_0'\}^{(x)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i V_{a_i}^{(x)} \cdot \{a_0 + 1, \ldots, a_{i-1} + 1,\ a_{i+1} + 1, \ldots, a_p + 1, 1;$$

$$c'_{p+1} - 1,\ c_p', \ldots, c_1', c_0' + 1\}^{(x)}$$

$$+ (-1)^{p+1} \{a_0 + 1, a_1 + 1, \ldots, a_p + 1;\ c'_{p+1} - 1, c_p', \ldots, c_1', c_0' + 1\}^{(x)}.$$

Si deve osservare che nel secondo membro della relazione precedente manca il termine

$$(-1)^{p+1} \{a_0 + 1, a_1 + 1, \ldots, a_p + 1;\ c'_{p+1} - 1, c_p', \ldots, c_1', c_0' + 1\}^{(x)},$$

quando la funzione simmetrica caratteristica $\{a_0, a_1, \ldots, a_p;\ c'_{p+1}, c_p', \ldots, c_0'\}^{(x)}$ scritta nella forma $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}^{(x)}$ è tale che non si abbia $h_{s-p-1} = s$, e quindi non esista alcuna h_i d'indice minore di $s-p$ per cui $h_i = i+p+1$, cioè tale che sia $c'_{p+1} = 0$.

Per l'ipotesi fatta si ricava:

$$\}a_0+1,\ldots,a_{i-1}+1,\ a_{i+1}+1,\ldots,a_p+1,1;\ c'_{p+1}-1,\ c_p',\ldots,c_1',\ c_0'\{^{(x)}=$$

$$=\begin{vmatrix} \}a_0+1;b_0',s-b_0'\{^{(x)} & \}a_0+1;b_1',s-b_1'\{^{(x)}\ldots & \}a_0+1;b_p',s-b_p'\{^{(x)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \}a_{i-1}+1;b_0',s-b_0'\{^{(x)} & \}a_{i-1}+1;b_1',s-b_1'\{^{(x)}\ldots & \}a_{i-1}+1;b_p',s-b_p'\{^{(x)} \\ \}a_{i+1}+1;b_0',s-b_0'\{^{(x)} & \}a_{i+1}+1;b_1',s-b_1'\{^{(x)}\ldots & \}a_{i-1}+1;b_p',s-b_p'\{^{(x)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \}a_p+1;b_0',s-b_0'\{^{(x)} & \}a_p+1;b_1',s-b_1'\{^{(x)}\ldots & \}a_p+1;b_p',s-b_p'\{^{(x)} \\ S^{(x)}_{b_0'+1} & S^{(x)}_{b_1'+1} & S^{(x)}_{b_p'+1} \end{vmatrix};$$

dove non occorre osservare che $S^{(x)}_h=\}1;h-1,\ s+1-h\{^{(x)}$, $(1\leq h\leq s+1)$.

Dalla formola (1) del § 2 risulta la relazione

$$\}k+1;h,s-h\{^{(x)}=V^{(x)}_k\cdot S^{(x)}_{h+1}-\}k;h+1,s-h-1\{^{(x)}\quad(0\leq h\leq s,\ k\geq 1)$$

(evidentemente se $h=s$, $\}k;h+1,\ s-h-1\{^{(x)}$ è uguale a zero), la quale, applicata successivamente ai termini delle linee p^{sima}, $(p-1)^{\text{sima}},\ldots,\ (i+1)^{\text{sima}}$ del determinante precedente permette di scrivere la relazione:

$$V^{(x)}_{a_i}\cdot\}a_0+1,\ldots,a_{i-1}+1,a_{i+1}+1,\ldots,a_p+1,1;\ c'_{p+1}-1,c'_p,\ldots,c_1',c_0'\{^{(x)}=$$

$$=\begin{vmatrix} \}a_0+1;\ b_0',\ s-b_0'\{^{(x)} & \}a_0+1;\ b_1',\ s-b_1'\{^{(x)} & \ldots & \}a_0+1;\ b_p',\ s-b_p'\{^{(x)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \}a_{i-1}+1;\ b_0',\ s-b_0'\{^{(x)} & \}a_{i-1}+1;\ b_1',\ s-b_1'\{^{(x)} & \ldots & \}a_{i-1}+1;\ b_p',\ s-b_p'\{^{(x)} \\ \}a_i;\ b_0'+1,\ s-b_0'-1\{^{(x)} & \}a_i;\ b_1'+1,\ s-b_1'-1\{^{(x)} & \ldots & \}a_i;b_p'+1,s-b_p'-1\{^{(x)} \\ \}a_{i+1};b_0'+1,s-b_0'-1\{^{(x)} & \}a_{i+1};b_1'+1,s-b_1'-1\{^{(x)} & \ldots & \}a_{i+1};b_p'+1,s-b_p'-1\{^{(x)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \}a_p;b_0'+1,s-b_0'-1\{^{(x)} & \}a_p;b_1'+1,s-b_1'-1\{^{(x)} & \ldots & \}a_p;b_p'+1,s-b_p'-1\{^{(x)} \end{vmatrix}+$$

$$
+\begin{vmatrix}
\}a_0+1;\, b_0',\, s-b_0'\{^{(x)} & \}a_0+1;\, b_1',\, s-b_1'\{^{(x)} & \dots & \}a_0+1;\, b_p',\, s-b_p'\{^{(x)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\}a_{i-1}+1;\, b_0'\, s-b_0'\{^{(x)} & \}a_{i-1}+1;\, b_1',\, s-b_1'\{^{(x)} & \dots & \}a_{i-1}+1;\, b_p',\, s-b_p'\{^{(x)} \\
\}a_i+1;\, b_0',\, s-b_0'\{^{(x)} & \}a_i+1;\, b_1',\, s-b_1'\{^{(x)} & \dots & \}a_i+1;\, b_p',\, s-b_p'\{^{(x)} \\
\}a_{i+1};b_0'+1,s-b_0'-1\{^{(x)} & \}a_{i+1};b_1'+1,s-b_1'-1\{^{(x)} & \dots & \}a_{i+1};b_p'+1,s-b_p'-1\{^{(x)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\}a_p;b_0'+1,s-b_0'-1\{^{(x)} & \}a_p;b_1'+1,s-b_1'-1\{^{(x)} & \dots & \}a_p;b_p'+1,s-b_p'-1\{^{(x)}
\end{vmatrix}
$$

$$(i=0, 1, \dots, p).$$

(Quando $c'_{p+1}=0$ (e quindi $b_p'=-1$), se $i=p$, è identicamente nullo il 2° determinante della relazione precedente).
Quindi per la formola

$$
\begin{gathered}
\}a_0, a_1, \dots, a_p;\, c'_{p+1}, c_p', \dots, c_0'\{^{(x)} = \\
=\sum_{i=0}^{i=p}(-1)^i V_{a_i}^{(x)}\cdot\}a_0+1, \dots, a_{i-1}+1, a_{i+1}+1, \dots, a_p+1, 1; \\
c'_{p+1}-1, c_p', \dots, c_1', c_0'+1\{^{(x)} \\
+(-1)^{p+1}\}a_0+1, a_1+1, \dots, a_p+1;\; c'_{p+1}-1, c'_p, \dots, c'_1, c_0'+1\{^{(x)}
\end{gathered}
$$

si conclude subito tanto se $c'_{p+1}=0$, come se $c'_{p+1}>0$, la verità della prima proposizione; e per quanto si disse sopra è vera la formola dello Schubert.

8. — Interpretazione simbolica dei risultati precedenti nella Geometria Numerativa.

Per l' osservazione del § 11 della mia citata memoria si possono interpretare simbolicamente nel problema di Geometria Numerativa degli *spazî secanti* le formole relative alle funzioni simmetriche caratteristiche. Alcune delle formole trovate in questo lavoro daranno formole già note (*), altre no. Così è importante interpretare la formola, che noi abbiamo chiamato *formola dello* Schubert; essa ci fornisce una formola enunciata,

(*) La formola duale di quella del Trudi, interpretata simbolicamente, dà la formola VI della mia citata memoria.

senza dimostrazione, dallo SCHUBERT in un recente lavoro sulle formole di *posizione speciale* (*). Noi avendo dimostrato la formola corrispondente relativa alle funzioni simmetriche caratteristiche, abbiamo pure dimostrato questa importante formola sul problema degli spazî secanti. Essa si può così enunciare:

Detto [n] *lo spazio fondamentale, se conveniamo di indicare una condizione caratteristica* $(f_0, f_1, \ldots, f_s)$, *imposta ad uno spazio* [s], *col simbolo* $(a_0, a_1, \ldots, a_t; c_{t+1}, c_t, \ldots, c_0)$, *dove, essendo* t *l' indice massimo delle* f_i *per cui si ha* $f_i < n-s$, *abbiamo posto* $a_i = n - f_i - s$ $(i = 0, 1, \ldots, t)$ *e abbiamo chiamato* c_r $(r = 0, 1, \ldots, t+1)$ *il numero (può essere anche zero) delle* f_i *per cui* $f_i = n - s + i - r$, *vale la formola* (**):

$$(a_0, a_1, \ldots, a_t;\ c_{t+1}, c_t, \ldots, c_0) =$$

$$\begin{vmatrix} (a_0; b_0, s-b_0) & (a_0; b_1, s-b_1) & \ldots & (a_0; b_t, s-b_t) \\ (a_1; b_0, s-b_0) & (a_1; b_1, s-b_1) & \ldots & (a_1; b_t, s-b_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_t; b_0, s-b_0) & (a_t; b_1, s-b_1) & \ldots & (a_t; b_t, s-b_t) \end{vmatrix},$$

in cui

$$b_i = s - c_0 - c_1 - \ldots - c_i - i \qquad (i = 0, 1, \ldots, t).$$

Applicando poi opportunamente questa formola dello SCHUBERT, si può eseguire qualsiasi prodotto di condizioni caratte-

---

(*) *Gleichungen zwischen Bedingungen bei specieller Lage linearer Räume*, " Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg „, 1903, pag. 104.

(**) In questa formola si sono usati simboli simili, ma non identici, a quelli dello SCHUBERT; infatti lo SCHUBERT rappresenta con $(a_0, a_1+1, \ldots, a_t+t, c_{t+1}, c_t, \ldots, c_0)$ la condizione caratteristica da noi indicata con $(a_0, a_1, \ldots, a_t; c_{t+1}, c_t, \ldots, c_0)$; inoltre scrive $(a_0, 1b_0, 0s-b_0)$, $(a_1, 1b_0, 0s-b_0)$, $(a_1, 1b_1, 0s-b_1)$, ecc. invece di $(a_0; b_0, s-b_0)$, $(a_1; b_0, s-b_0)$, $(a_1; b_1, s-b_1)$, ecc. Vi è poi anche qualche diversità rispetto alle lettere usate da noi e dallo SCHUBERT.

ristiche, cioè risolvere in un altro modo il problema degli spazi secanti.

Ho creduto poi opportuno dimostrare direttamente il principio di dualità nelle funzioni simmetriche caratteristiche, perchè, essendo principio relativo alle identità algebriche, si deve poter dimostrare senza far uso di concetti geometrici e del principio della conservazione del numero, che non è ancora ben inteso.

La formola (*) conseguenza della formola duale di quella del Trudi (cfr. § 6) ci servirà per risolvere, in un prossimo lavoro, il problema della determinazione dell' ordine della varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice di forme (*). Le altre formole relative alla condizione, perchè due equazioni abbiano più radici in comune, saranno da noi applicate in una teoria generale sulle formole di incidenza e di posizione speciale.

Osservo infine che occorre spingere *convenientemente* lo studio delle funzioni simmetriche caratteristiche, perchè esiste anche una interpretazione simbolica, che permette di semplificare qualsiasi ricerca sulla determinazione di una condizione imposta a più spazi contenuti in un altro spazio.

(*) La formola, che risolve questo problema, sarà presto enunciata in una nota della R. Acc. dei Lincei. La dimostrazione di questa formola poi si troverà il prossimo novembre negli Atti della R. Accad. di Torino.

Sopra alcuni avanzi di Cervidi Pliocenici del Piemonte.

Nota del Dr. GIULIO DE ALESSANDRI.

(Con una Tavola).

Gli autori che si sono occupati degli avanzi dei Cervidi, rinvenuti fossili nel Piemonte, s'intrattennero generalmente su quelli quaternarii.

L'Allioni (1), il Faujas (2), il Brocchi (3), il Cuvier (4) ed il Breislak (5), fin dallo scorcio del secolo XVIII e sul principio del secolo XIX, illustrarono avanzi di Cervi delle alluvioni padane.

Dopo di loro il Risso (6), prendendo in esame i fossili delle breccie ossifere di Nizza, annoverava denti e frammenti di corna spettanti a Cervidi, mentre, poco appresso, il Borson (7) illustrava grandi esemplari di Cervi a corna gigantesche rinvenuti nelle alluvioni di Arena-Po, dei quali si erano già incidentalmente occupati il Brocchi ed il Breislak.

Successivamente il Gastaldi, descrivendo nel 1858 i vertebrati fossili del Piemonte (8), s'intratteneva sugli avanzi di *C. euryceros* Aldov. di Arena-Po, e su parecchie altre specie di Cervi rinvenuti parte nelle formazioni sovrastanti alle alluvioni plioceniche dell'Astigiano, e parte nelle breccie ossifere di Nizza.

---

(1) Allioni C., *Orictographiae pedemontanae spicimen exibens corpora fossilia terrae adventitia.* Parisiis, 1757.

(2) Faujas M., *Essai de Géologie*, pag. 20.

(3) Brocchi G. E., *Conchiologia fossile subapennina.* Milano, 1808.

(4) Cuvier G., *Recherches sur les ossements fossiles*, IIe édit. Paris, 1822.

(5) Breislak S., *Descrizione geologica della prov. di Milano.* Milano, 1822.

(6) Risso A., *Histoire naturelle des princip. product. de l'Europe mérid. et partic. de celles des environs de Nice et des Alpes maritimes.* Paris, 1826.

(7) Borson L., *Mémoire sur quelques ossements fossiles trouvés en Piémont*, " Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXVI, 1833.

(8) Gastaldi B., *Cenni sui vertebrati fossili del Piemonte*, " Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino ", serie II, vol. XIX, 1858.

Più tardi il Cornalia (1), occupandosi dei mammiferi fossili della Lombardia, riprendeva l'esame dei resti di Arena-Po, ed il Gastaldi (2) illustrava minutamente un altro esemplare di *C. euryceros* Aldov. rinvenuto nel quaternario fra Crescentino e Fontaneto.

Infine il prof. A. Portis descriveva nel 1883 una mandibola spettante al comune *C. elaphus* L. della torbiera di Trana (3), e recentemente il dott. Bogino (4), prendendo in esame una ricca fauna di vertebrati raccolta nella stessa formazione, dava minuti ragguagli sopra importanti resti di *C. elaphus* L. e di *C. capreolus* L.

Gli avanzi raccolti nel Pliocene del Piemonte non furono mai oggetto di studi speciali.

Solo il Boyd Dawkins citando in uno dei suoi elenchi (5) la specie pliocenica *C. etuerianum* Croiz. et Job., dice, che essa fu da lui determinata sul materiale del Museo di Bologna, e su quello del Valentino di Torino, senza ulteriori schiarimenti, ed il Sacco nel suo *Catalogo paleontologico* (6) annovera avanzi pliocenici di *Cervus* sp. dell'Astigiano, avanzi, che già Eugenio Sismonda aveva indicato negli stessi giacimenti molti anni prima (7).

Io ho accolto quindi con vivissimo gradimento l'invito fattomi dal prof. Parona di prendere in esame le vestigia fossili dei Cervidi pliocenici del Piemonte, che si conservavano nel R. Museo Geologico dell'Università di Torino.

Questi fossili provengono da due località differenti: la maggior parte di essi fu raccolta durante i lavori per la ferrovia

---

(1) Cornalia E., *Mammifères fossiles de Lombardie.* Milano, 1871.

(2) Gastaldi B., *Cenni sulla giacitura del " Cervus euryceros „,* " Atti della R. Accad. dei Lincei „, serie II, t. II, 1875.

(3) Portis A., *Il Cervo della torbiera di Trana,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XVIII, 1883.

(4) Bogino F., *I mammiferi fossili della torbiera di Trana.* " Boll. della Soc. Geol. ital. „, vol. XVI, 1897.

(5) Boyd Dawkins W., *On the classification of the tertiary period by means of Mammalia,* " Quat. Journ. of the Geol. Soc. of London „, vol. XXXVI, 1880.

(6) Sacco F., *Catalogo Paleontologico del bacino terziario del Piemonte,* " Boll. Soc. Geol. Ital. „, vol. IX, 1890, pag. 298.

(7) Sismonda E., *Osteografia di un " Mastodonte angustidente „,* " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino „, Serie II, vol. XII, 1851.

Torino-Genova, fra Dusino e San Paolo, nella Valle del Tanaro a breve distanza da Villanova; il rimanente proviene da Cortiglione Monferrato, presso Incisa, lungo la Valle del Tiglione. Quest'ultimo materiale fu recentemente acquistato dal prof. Parona.

Le località di San Paolo e di Dusino non hanno bisogno per i cultori della Paleontologia di nuova illustrazione. Il Borson, il Sismonda, il Gastaldi, il Baretti (1) ed il Sacco (2) se ne sono occupati con ispeciali cure, alcuni nell'occasione del rinvenimento in esse di grandi Vertebrati, altri nello studio sistematico delle specie rinvenute.

I grandi vertebrati che ivi furono raccolti spettano generalmente a Proboscidei (*Mastodon*, *Elephas*), ma non mancarono anche esemplari di *Rhinoceros, Hippopotamus, Equus* e *Bos*. La formazione che li conteneva assieme ai Cervi è costituita da sabbie grigio-giallastre che in alcuni punti passano a ghiaie e ciottoli in istrati od in lenti e che superiormente sono ricoperte da strati di argilla o di marna tenera, friabile, di colorazione rossiccia (*Loehm*). Tale formazione costituisce un sedimento tipicamente fluvio-lacustre, che in alcuni punti rappresenta veri delta deposti sul fondo marino. Lo attestano le conchiglie terrestri e lacustri che vi si rinvengono, conchiglie frammiste talora a quelle marine, alcune delle quali si raccolsero anche aderenti agli avanzi dei grandi Vertebrati.

Cronologicamente queste formazioni rappresentano depositi sincroni a quelli delle sabbie gialle, marine, costituenti il Pliocene superiore (*Astiano*) e ne attestano una *facies* speciale conosciuta col nome di *villafranchiano*.

L'altra località di Cortiglione Monferrato è costituita da formazioni identiche: sabbie, argille e ghiaie, fra le quali in alcuni punti sono numerose concrezioni calcaree, a guisa di agglutinamenti compatti ed irregolari, simili a quelli che sulla collina di Torino si conoscono col nome di *Mürs*.

L'età e l'origine di questi sedimenti sono identiche a quelle del *villafranchiano* di Dusino.

---

(1) Baretti G., *Sui resti fossili di Rinoceronte nel territorio di Dusino*, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XV, 1880, pagg. 678-682 e 731-734.

(2) Sacco F., *Le Rinoceros de Dusino* (*Rhinoceros etruscus* Falc., var. *astensis* Sacco), " Arch. du Museum d'Histoire natur. de Lyon ", t. VII, 1895.

Prima di chiudere questi brevi cenni mi sia dato esprimere vivissimi ringraziamenti al prof. C. F. Parona, al prof. L. Camerano, ed al prof. G. Tuccimei, per gli aiuti ed i consigli dei quali mi furono cortesi.

Milano, Museo Civico, 15 Aprile 1903.

Cervus (Axis) pardinensis Croiz. et Job.

Tav. I, figg. 1-2.

1828. *Cervus pardinensis.* Croizet et Jobert, *Recherches sur les ossements fossiles du département du Puy-de-Dôme*, pl. VI bis, fig. 4, pl. XI, figg. 4-5, pl. XIII, fig. 5.

1854. Id. id. Pomel M., *Catalogue méthodique et descriptif des vertébrés fossiles découverts dans le bassin hydrograph. de la Loire*, pag. 106.

1859. Id. id. Gervais P., *Zoologie et Paléontologie françaises*, pag. 148.

1879. Id. id. Boyd Dawkins W., *Contribut. of the hystory of the Deer of the European Miocene and Pliocene strata*, " Quarterl. Journ. of the Geol. Soc. of London „, vol. XXXIV, pag. 409, fig. 5.

1883. Id. id. Rütimeyer L., *Beiträg. zu einer natürlich. der Hirsche*, " Abhand. d. Schweiz. paläontol. Gesellsch. „, vol. VII, VIII, X, pag. 104, tav. X, figg. 9 e 18-21.

1884. Id. id. Depéret C., *Nouvelles études sur les ruminants pliocènes et quaternaires d'Auvergne*, " Bull. de la Soc. Géol. de France „, serie III, t. XII, pag. 262, pl. VI, figg. 3 et 4.

1893. Id. id. Delafond F. et C. Depéret, *Les terrains tertiaires de la Bresse et leur gîtes de lignites et de minerais de fer.* Études des gîtes minéraux de France. Paris, pag. 237, pl. XIII, figg. 5-7.

1898. Id. id. Tuccimei G., *Sopra alcuni cervi pliocenici della Sabina e della provincia di Roma*, " Mem. della Pontif. Accad. dei Nuovi Lincei „, vol. XIX, pag. 11, tav. V, fig. 1.

1898. Id. id. Trouessart E. L., *Catalogus mammalium tam viventium quam fossilium.* Berolini, fasc. IV, pag. 877.

1902. Id. id. Ugolini R., *Vertebrati fossili del bacino lignitifero di Barga (Val di Serchio)*, " Atti della Società Tosc. di Scienze naturali „, Processi verbali, vol. XIII, pag. 31.

Gli avanzi che io riferisco a questa specie sono, relativamente agli altri, abbastanza rari, e rappresentano frammenti di corna, generalmente in buono stato di conservazione.

Il pezzo più interessante consiste nella porzione inferiore del corno destro, il quale presenta anche il pugnale oculare e la rosetta.

Il peduncolo manca; la rosetta, larga, frastagliata, con tubercoli, è posta in un piano quasi perpendicolare all'asse principale.

Il pugnale oculare è conico, breve, ha l'estremità lievemente ricurva in fuori, e fa un angolo di circa 20° col ramo principale al quale è unito con una larga palmatura.

Il ramo principale è caratteristico per la sua linea quasi retta, spostata solamente un poco indietro ed in fuori nell'attacco del pugnale oculare.

La sezione tanto del ramo principale quanto di quello oculare è ovunque suborbiculata.

La superficie di questo frammento inferiore di corno è ovunque solcata da numerosi solchi ben distinti, ma poco profondi, i quali sono più spiccati nella parte superiore.

Riferisco pure a questa specie un frammento superiore del ramo principale di un corno, probabilmente spettante alla parte sinistra, il quale conserva completo il secondo pugnale.

Esso si differenzia dal ramo già descritto per essere più sottile, e per avere la sezione ovunque circolare, meno presso alla congiuntura del secondo pugnale, ove è largamente palmato.

Quest'ultimo è lungo, ricurvo all'indietro, ma ha l'estremità rivolta in fuori, forma col ramo principale un angolo alquanto maggiore di quello fatto dal pugnale oculare dell'altro frammento (25° circa).

Dimensioni.

1° esemplare.

Circonferenza alla base del corno . . . . cm. 8

Distanza della rosetta dalla forcatura del pugnale oculare . . . . . „ 8,2

2° esemplare.

Circonferenza alla forcatura del 2° pugnale „ 7,5

Lunghezza del 2° pugnale . . . . . „ 14 circa.

Le figure alle quali maggiormente corrisponde il mio esemplare più grande sono quelle del Depéret, tav. V, figg. 3 e 4 e sopratutto a quest'ultima per la notevole rettezza del ramo principale, per la palmatura espansa e per la distanza ragguardevole fra la rosetta e la base del pugnale oculare.

Gli esemplari figurati dal Croizet et Jobert appartengono ad individui notevolmente più adulti; hanno meno evidente la palmatura, ma si accostano al mio esemplare per avere la rosetta posta in un piano non perfettamente perpendicolare al ramo principale.

L'esemplare figurato dal prof. Tuccimei corrisponde maggiormente al frammento superiore da me illustrato, per l'appiattimento considerevole di entrambi i rami presso alla biforcazione e per l'angolo fra loro interposto.

Il *C. pardinensis* è specie essenzialmente pliocenica; esso fu raccolto nelle alluvioni rossastre della montagna di Perrier (*Pardines*), di Cros-Roland, di Vialette (*Bacino del Puy*) ed a Issoire.

In Italia un bellissimo esemplare consistente in una notevole porzione del corno sinistro, venne primieramente rinvenuto dal prof. Tuccimei nelle marne di S. Valentino (*Sabina*) e fu da lui illustrato in un pregievolissimo studio sui Cervi dei dintorni di Roma.

Alcuni altri avanzi di ossa mandibolari e frammenti di corna, provenienti dalle argille e dalle ligniti di Cava delle Fornaci e Grotta del Birro nel bacino lignitifero di Barga, furono recentemente riferiti a questa specie dal dott. R. Ugolini.

Gli esemplari da me descritti e numerosi altri frammenti, spettanti probabilmente alla stessa specie, furono raccolti nelle formazioni plioceniche fluvio-lacustri (*villafranchiane*) dell'Astigiano fra San Paolo e Dusino.

Fu già notato come in Italia si rinvenga di frequente un'altra specie pliocenica che ha strette affinità col *C. pardinensis*. Essa è il *C. Perrieri* Croiz. et Job. di Valdarno.

Ed invero tanto gli esemplari che di quest'ultima specie si conservano al Museo Civico di Milano, quanto le figure tipiche di essa del Croizet et Jobert (Tav. IV, fig. 2) e sopratutto quelle del Depéret (Tav. VI, fig. 7) hanno grandi analogie col *C. pardinensis*. Ma gli esemplari di corna completi spettanti a queste due specie sono distinti dal numero dei pugnali, che è di tre nel *C. Perrieri* e di due nel *C. pardinensis*. Se gli esemplari, come succede generalmente, sono incompleti, giova a distinguere la prima specie dalla seconda, la mancanza di palmatura fra i rami principali ed i pugnali, l'angolo quasi retto che nella prima il pugnale oculare fa con il ramo principale e la sinuosità dei pugnali stessi.

Cervus (Axis) etuerianum Croiz. et Job.

Tav. I, fig. 3.

1828. *Cervus etuerianum.* Croizet et Jobert, *Recherches sur les ossements fossiles du département du Puy-de-Dôme,* pl. VI, fig. 1, pl. VI bis, figg. 1-2, pl. VII, figg. 1-5, pl. VIII, figg. 1-5, pl. IX, figg. 1, 2, 3 e 6 et pl. X.

1854. Id. id. Pomel M., *Catalogue méthodique et descriptif des vertébrés fossiles découverts dans le bassin hydrograph. de la Loire,* pag. 106.

1859. Id. id. Gervais P., *Zoologie et Paléontologie françaises,* 2e édit. Paris, pag. 148.

1878. Id. id. Boyd Dawkins W., *Contrib. to the history of the Deer of the european miocene and pliocene strata,* " Quat. Journ. of the Geol. Soc. of London „, t. XXXIV, pag. 410, fig. 6.

1880. Id. id. (?) Newton E. T., *Notes on the Vertebrate of the Pre-Glacial Forest-Bed Series of the East of England,* " Geol. Magaz. „, t. VII, pag. 450.

1884. Id. id. Depéret C., *Nouvelles études sur les ruminants pliocènes et quaternaires d'Auvergne,* " Bull. de la Soc. géol. de France „, s. III, t. XII, pag. 265, pl. VI, fig. 5.

1885. Id. id. Lyddeker R., *Catalogue of the fossil Mammalia in the British Museum,* part II, pag. 107.

1885. Id. id. (?) Forsyth Mayor C. J., *On the mammalian fauna of the Val d'Arno,* " Quat. Journ. of the Geol. Soc. of London „, vol. XLI, p. 2.

1893. Id. id. De Lafond F. et Depéret C., *Les terrains tertiaires de la Bresse et leur gîtes de lignites et de minerais de fer.* Études des gîtes minéraux de France. Paris, pag. 237, pl. XII, fig. 8.

1898. Id. id. Tuccimei G., *Sopra alcuni Cervi pliocenici della Sabina e della prov. di Roma,* " Mem. della Pontif. Accad. dei Nuovi Lincei „, vol. XIV, pag. 16, tav. IV, figg. 1-2.

1898. Id. id. Trouessart E. L., *Catalogus Mammalium tam viventium quam fossilium.* Berolini, fasc. IV, pag. 877.

Questa specie è rappresentata nel Pliocene piemontese da numerosi frammenti di corna di diversa mole e spettanti ad individui di differente età e sviluppo. Tutti però sono in pessimo stato di conservazione.

Il frammento principale consta della parte inferiore di un corno sinistro e presenta il pugnale oculare completo per circa $^2/_3$ della sua lunghezza.

Sono caratteristici in questo esemplare l'angolo abbastanza aperto col quale il pugnale oculare si congiunge al ramo principale, la mancanza di palmature e la tendenza del ramo principale ad incurvarsi all'indietro.

La sezione è completamente circolare in ogni punto, meno presso alla forcatura del pugnale.

La rosetta manca e la sua posizione sembra indicata dalla linea di rottura inferiore del ramo principale.

La superficie del pugnale oculare è solcata da numerose strie, più spiccate ed irregolari nella parte basilare, strie che si osservano altresì nel ramo principale, sopratutto presso alla biforcazione, ove assumono più grandi dimensioni e passano a veri solchi.

Questo modo di presentarsi della superficie del mio esemplare sembrerebbe in piena contraddizione coi caratteri generalmente attribuiti a questa specie e ciò mi ha reso alquanto dubbio sul riferimento specifico.

Infatti il Depéret nella diagnosi del *C. etuerianum* osserva dapprincipio: " il ramo è tondo, divergente e liscio „; poc' oltre però descrivendo un esemplare di perfetta conservazione della Montagna di Perrier, nota: " la superficie è liscia eccetto verso la base ove è un poco striata, come la parte inferiore del ramo oculare „.

Questi caratteri si osservano pure spiccatissimi nel grosso esemplare di questa specie proveniente dal terziario superiore de la Bresse (Delafond et Depéret, op. cit., pl. XII, fig. 5) illustrato recentemente dal Depéret.

Anche il Pomel, a proposito del *C. etuerianum* dice che il ramo è poco striato, quasi liscio, debole ed a forma tondeggiante e le figure che di esso hanno dato i sig[i]. Croizet et Jobert confermerebbero la mancanza o meglio lo scarso sviluppo delle strie lungo il ramo.

Il prof. Tuccimei tuttavia aveva già notato in proposito che: " le strie del tronco principale di questa specie sono generalmente invisibili, e quando ci sono, appariscono scarse e poco profonde; non così nel ramo frontale dove le più grosse si alternano con le più sottili „.

Sembrerebbe quindi che il corno di questa specie presenti nel maggior numero dei casi la superficie liscia, meno nella parte inferiore ove non di rado si riscontrano strie.

Il mio esemplare rappresentando appunto la parte inferiore del ramo è striato su quasi tutta la sua superficie.

Non so d'altra parte se la presenza o la mancanza di strie

sulla superficie esterna delle corna possa costituire un carattere costante e di vero valore tassonomico.

Ove si eccettuino queste piccole differenze della superficie, il mio esemplare, tanto per la forma, quanto per le dimensioni relative, corrisponde pienamente a quelli tipici della Montagna di Perrier (*Étouaires*), nonchè a quelli di ottima conservazione della Sabina.

Assieme a questi esemplari, come già dissi, furono raccolti altri frammenti spettanti probabilmente alla stessa specie, ma il loro pessimo stato di conservazione non permette di pronunciarmi in proposito.

Tutti provengono dalle sabbie *villafranchiane* poste fra Dusino e San Paolo (Astigiano).

Il *C. etuerianum* fu rinvenuto abbondante in Francia nell'Alvernia presso Étouaires, come pure nelle ligniti della Bresse ed a Chany; in Inghilterra fu annoverato con dubbio dal Newton fra i Vertebrati pre-glaciali del Forest-Bed.

In Italia fu già citato da parecchi anni fra i fossili di Val d'Arno, dal Boyd Dawkins, dal Lyddeker e dubitativamente dal Forsyth-Mayor.

Recentemente il prof. Tuccimei rinveniva due corna di questa specie appartenenti ad uno stesso individuo, a Moronte presso Montopoli nella Sabina.

Cervus pliotarandoides n. sp.

Tav. I, figg. 4-5.

Premetto che nella classificazione degli avanzi spettanti a questa specie io ho adottato il nome generico di *Cervus* nel suo senso più lato, indipendentemente dalle suddivisioni che i moderni sistematici hanno introdotto nei suoi vari gruppi.

Ho adottato questo consiglio perchè i miei avanzi, per un gran numero di caratteri comuni, hanno grandissima affinità col gen. *Rangifer*, e probabilmente ad esso si devono riferire. Ma considerando che nella sistematica di questo genere è talora necessario, oltre che ai caratteri delle corna, ricorrere a quelli del cranio, e non avendo io di quest'ultimo potuto rinvenire avanzi,

così ho dovuto accontentarmi di un riferimento meno deciso e di natura provvisoria.

A ciò mi ha spinto anche la considerazione che il gen. *Rangifer* finora non fu raccolto fossile in formazioni anteriori al quaternario antico.

D'altra parte, se dall'esame delle corna si può arrivare alla conclusione che esse sono affini per forma a quelle delle Renne attuali, non è escluso il caso, che le medesime abbiano appartenuto a forme notevolmente diverse, nelle quali il fenomeno della convergenza avesse fatto assumere caratteri simili a quelli delle Renne viventi.

I resti più importanti che a questa specie riferisco constano di un grande corno destro di buona conservazione, il quale presenta quasi tutto il ramo principale, parte del primo pugnale e tutto il secondo.

Il fusto principale nella parte inferiore è leggermente ricurvo in avanti, poscia all' indietro fino a $^2/_3$ circa della sua lunghezza; da questo punto si piega quasi ad angolo retto nuovamente in avanti, fino alla sua estremità che è incompleta per rottura.

In tutta la parte disposta verticalmente al cranio la sezione è circolare, mentre nella parte posta orizzontalmente ad esso e che rappresenta la regione distale, la sezione è notevolmente appiattita.

Caratteristica è in questo corno la mancanza del pugnale oculare, il quale sembra rappresentato solo da un piccolo bitorzolo intermedio fra la rosetta ed il primo pugnale.

Il primo pugnale è incompleto, forma un angolo quasi retto col ramo principale, dal quale si distacca senza palmature; esso si dirige orizzontalmente in dentro, è curvo a semicerchio ed ha ovunque sezione circolare.

Il secondo pugnale è posto alla ripiegatura del ramo principale, è meno sviluppato del primo, diretto in alto, ed ha l'estremità ricurva in fuori. La sua sezione è pure circolare.

Tutta la superficie di questo corno è solcata da scannellature irregolari, non molto fitte, nè profonde, ma però assai distinte.

La rosetta alla base del corno è poco distinta, ed è posta in un piano obliquo all'asse del ramo principale.

Dimensioni.

Lunghezza dalla base alla ripiegatura distale	cm.	43
„ della regione distale	„	36
„ del primo pugnale (*incompleto*) . .	„	15 $^1/_2$
„ del secondo „	„	13
Circonferenza del ramo principale presso alla rosetta	„	21
„ di base del primo pugnale . . .	„	14
„ di base del secondo pugnale . .	„	13 $^1/_2$.

Oltre a questo corno spettano alla stessa specie e furono rinvenute con essa, alcune punte ed una porzione notevole del ramo principale, porzione che con tutta probabilità spetta al ramo sinistro.

Tutti questi resti, che si conservano al Museo Geologico di Torino, provengono dal *villafranchiano* di Cortiglione Monferrato, ove furono rinvenuti nell'aprile 1903.

Già dissi che questi avanzi di corna hanno grandissima affinità con quelli del gen. *Rangifer*, anzi a me sembra che in nessun altro gruppo essi riscontrino maggiori analogie.

Al Museo Civico di Milano esiste un bellissimo esemplare di grandi dimensioni spettante a *Rangifer tarandus* L. e proveniente dalla Russia settentrionale, del quale ho riprodotto in fototipia il corno destro (Tav. I, fig. 6).

Il semplice confronto col mio esemplare fossile, meglio di qualunque descrizione, ci mostra quanto queste corna corrispondano fra di loro nella forma, nelle dimensioni delle singole parti, nella posizione loro, nella caratteristica mancanza del pugnale oculare. Le dimensioni dell'esemplare vivente sono però meno sviluppate di quelle del fossile.

Nella stessa raccolta del Museo di Milano si conserva un altro esemplare della stessa specie proveniente dalla stessa località, ma che visse lungamente in ischiavitù nel R. Parco di Monza.

Esso ha dimensioni alquanto più piccole del primo, le sue corna sono meno sviluppate, hanno lungo peduncolo, ma nella forma loro, nella posizione e sviluppo dei pugnali corrispondono

assai bene sia a quelle del primo esemplare, come a quelle del fossile di Cortiglione.

Delle Renne viventi, finora furono descritte pochissime corna e pochi sono i disegni che gli autori diedero di esse. Se eccettuiamo le figure del Cuvier (1), due disegni del Nitsche (2), una figura del Murray (3), noi dobbiamo giungere fino alla recente monografia del prof. Camerano (4) prima di aver sott' occhio riprodotto un materiale abbondante e vario delle corna di questi ruminanti.

Notiamo anzitutto come le corna delle Renne, nella loro forma generale, nello sviluppo e nella forma delle loro diramazioni, variino straordinariamente non solo da specie a specie, o da individuo ad individuo, ma financo in quelle dello stesso individuo. Dimodochè non mi ha punto sorpreso il fatto che le figure date dagli autori sopracitati corrispondano assai poco al mio esemplare, come d'altronde corrispondono pochissimo fra di loro.

Dal loro esame tuttavia (Cuvier, tav. 165, figg. 1, 2, 4, 6, e Camerano, tav. II, fig. 1) possiamo constatare come il ramo oculare non di rado manchi e sia allora rappresentato da una breve espansione a guisa di bitorzolo del ramo principale, come appunto si verifica nel mio esemplare.

Dalla pregiata monografia del prof. Camerano risulta altresì che " nelle corna delle Renne in cui il terzo pugnale è sviluppato si nota nel fusto principale una ripiegatura più o meno brusca verso lo innanzi, nella regione ove sorge il terzo pugnale stesso ". Fatto che si osserva perfettamente nel corno fossile di Cortiglione.

Un' altra osservazione del distinto zoologo che pure concorda assai bene coll'ambiente ove visse questo cervo pliocenico è questa: " complessivamente considerate le corna di Renne si

---

(1) Cuvier G., *Recherches sur les ossèments fossiles*, t. VI, pag. 116, tav. 16, figg. 1-21.

(2) Nitsche H., *Bemerkungen über zwei aus Spitzbergen stammende Rentierschädel*, " Jahresb. des Vereins für waterlandischer Naturkunde in Wurtemberg ", 1883.

(3) Murray A., *The geographical distribution of mammals*. London, 1866, pag. 154, fig. 9.

(4) Camerano L., *Ricerche intorno alle Renne delle isole Spitzberghe*, " Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino ", serie II, t. LI, 1901.

possono dividere in due tipi: uno, nel quale il fusto principale tende ad allungarsi ed a divenire cilindrico per la quasi totalità della sua lunghezza, l'altro, nel quale il fusto principale tende ad accorciarsi e ad allargarsi a modo di lamina, per una maggiore o minore parte della sua lunghezza. Al primo tipo spettano le Renne che abitano località a clima rigido e privo di foreste, al secondo quelle che abitano regioni a clima mite e ricche di foreste „.

Il mio esemplare notevolmente appiattito nella regione distale, visse appunto in un clima mite, anzi caldo, come si ritiene quello del Pliocene superiore.

Sarebbe cosa oltremodo interessante poter confrontare questi avanzi di Cervidi con quelli delle Renne fossili rinvenuti nel quaternario dell'Europa centrale e settentrionale. Purtroppo le pubblicazioni in proposito sono quasi sempre prive di illustrazioni di corna.

Gli avanzi così abbondanti delle alluvioni antiche dell'Alvernia, che il Bravard (1) aveva descritto sotto i nomi di *C. parentignacus*, *C. rangiceros*, *C. tarandoides* (*pars*) e che recentemente il Depéret (2) dimostrò spettare a *C. tarandus*, constano generalmente di frammenti degli arti o di mascellari più o meno incompleti.

Anche quelli delle caverne della Francia (Bize, Sallères, Bruniquel, Aurignac, Lourdes, La Vache presso Tarascon, Espalungue, ecc.), che Marcel de Serres (3) e De Christol avevano riferiti a *Cervus Reboulii*, a *Capreolus Leufroyi* ed a *Capreolus Tournali* e che il Gervais (4) ritenne doversi ascrivere a *C. tarandus*, constano quasi sempre di avanzi frammentizii, molte volte rotti e lavorati dalle industrie umane, primitive.

---

(1) Bravard A., *Monographie de la Montagne de Perrier*, 1828. — *Considérations sur la distribution des Mammifères terrestres fossiles du Puy-du-Dôme*, 1845. *Lettre à M. Pomel sur les animaux fossiles de l'Auvergne*, " Bull. de la Soc. géol. de France „, serie II, vol. III, 1846.

(2) Depéret C., Op. cit., pag. 283.

(3) Marcel de Serres, *Notices sur les cavernes à ossements du département de l'Aube*, in-4°, Montpellier, 1839 e *Recherches sur les ossements fossiles des cavernes de Lunel-Viel*, 1832.

(4) Gervais P., " Compt. Rendus de l'Acad. des Sciences „, Paris, t. LVIII, 1864, pag. 230 et *Zoologie et Paléontologie générales*. Paris, 1867-69, pag. 57.

Gli avanzi di *Cervus* (*tarandus*) *martialis* Gervais (1) che già il De-Christol (2) aveva illustrato sotto i nomi di *Cervus alces, C. tarandus* e *C. megaceros* e provenienti dalle sabbie antiche del Riége presso Pézenas rappresentano porzioni più o meno incomplete di corna, che per il loro modo di ramificarsi e per l'appiattirsi rammentano quelle delle Renne; ma il loro pessimo stato di conservazione non acconsente proficui confronti.

Uniche figure di corna ben conservate, spettanti a Renne fossili, che mi fu dato osservare, sono quelle del *Cervus tarandus priscus* Cuvier (3). Rappresentano esse individui di non grande sviluppo e si possono dividere in due gruppi assai distinti. Nel primo gruppo (tav. 167, figg. 10-13) si nota, oltre al ramo principale, traccie del pugnale oculare e del secondo pugnale; nel secondo gruppo (tav. 167, figg. 14-17) manca il ramo oculare e quindi in esso sono manifeste affinità più strette coll'esemplare da me illustrato.

Gli avanzi illustrati dal Cuvier provengono dalle alluvioni quaternarie di Étampes; però, secondo il Cuvier stesso, altre corna della stessa forma e dello stesso sviluppo si sarebbero raccolte nella caverna di Brengues (Départ. du Lot).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. *Cervus pardinensis* Croiz. et Job. Frammento inferiore del corno destro. Grand. $^1/_3$ circa del natur.

Fig. 2. Id. id. Frammento superiore del ramo principale. Grand. $^1/_3$ circa del natur.

Fig. 3. *Cervus etuerianum* Croiz. et Job. Frammento inferiore del corno sinistro. Grand. $^1/_3$ circa del natur.

Figg. 4-5. *Cervus pliotarandoides* n. sp. Corno destro visto dalla parte esterna e da quella interna. Grand. $^1/_4$ circa del natur.

Fig. 6. *Cervus (Rangifer) tarandus* L. Corno destro di un esemplare del Museo Civico di Milano. Grand. $^2/_{11}$ circa del natur.

---

(1) Gervais P., *Zoologie et Paléontologie françaises*, Paris, 1848, pag. 144, tav. 21, figg. 2-6.

(2) De Christol, " Ann. Soc. Scienze Nat. ", 2ª serie, t. IV, pag. 266.

(3) Cuvier G., Op. cit., pag. 180, tav. 167, figg. 16-17.

Atti R. Accad. delle Scienze
di Torino. Vol. 38

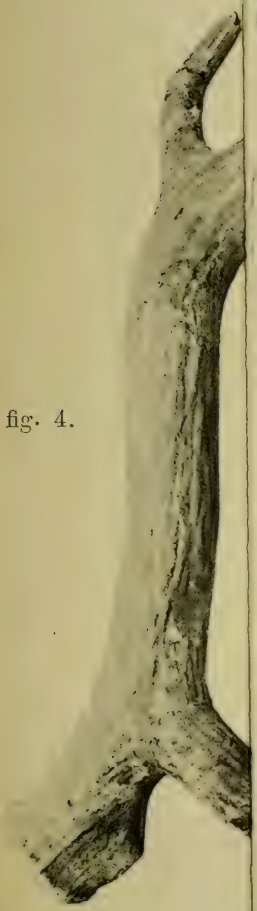


fig. 4.

fig. 5.

Atti R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. 38

E. Forma fot.

Stab. Eliotipico Ing. Molfese-Torino

Contributo allo studio della dispersione elettrica nell'atmosfera.

Nota del Prof. G. B. RIZZO.

(Con una Tavola).

Lo studio dell'elettricità atmosferica, intrapreso in Italia dal Beccaria e dal Volta, ha fatto recentemente dei notevoli progressi; e le nuove ipotesi elettro-ioniche sembrano bene adatte per collegare insieme molteplici fenomeni che prima apparivano sconnessi o anche in contraddizione fra loro. In questo campo di ricerche sono importantissime le belle misure di Elster e Geitel (*) e di Ebert (**) sulla ionizzazione dell'aria racchiusa; e siccome il Lenard (***), confermando un'antica esperienza del Volta, aveva dimostrato che intorno alle cascate d'acqua l'aria prende una forte carica negativa, mentre l'acqua medesima si elettrizza positivamente, mi parve bene di studiare la conduttività dell'aria in una grotta, nella quale vi sia una cascata d'acqua.

A questo studio si presta mirabilmente la caverna di Bossea, nelle Alpi Marittime, presso Mondovì; la quale è una grotta che si apre nella roccia calcarea, per una lunghezza di oltre 500 m., ed è meritamente celebre, sia per le bellezze naturali che racchiude, sia per gli importanti resti fossili che vi furono scoperti: la pianta qui unita serve a dare un'idea della sua configurazione.

La prima serie di misure si fece all'imbocco del corridoio per cui si entra nella grotta: un corridoio tortuoso, stretto ed irregolare, che ha la lunghezza di quasi 100 metri.

Al termine di questa galleria la grotta si apre in una sala così grande che, con la ordinaria illuminazione a candele, stando nel mezzo, non se ne scorgono le pareti. All'ingresso di

(*) Elster e Geitel, " Phys. Zeit. „, 2, 590, 1901.
(**) Ebert, " Ber. ü. Luftelektr. Arb. „, Göttingen, 1902.
(***) Lenard, " Wied. Ann. „, 46, 584, 1892.

questa sala, chiamata *delle frane,* il sentiero si biforca e un ramo sale verso la maggior lunghezza della caverna, l'altro ramo conduce in basso verso uno scoscendimento, in fondo al quale rumoreggia un torrente: nel punto dove avviene la biforcazione del sentiero fu fatta la seconda misura.

Di qui il sentiero principale, con una serie di risvolti e di gradinate intagliate nella roccia, sale portando il visitatore fin presso alla parete opposta della sala; e quivi si fece la terza misura.

Oltrepassato questo punto di un centinaio di metri la caverna si restringe di nuovo in modo che non presenta più se non una larghezza di dieci o dodici metri; ma si riapre poi al di là in una magnifica sala, detta la *sala del tempio*, dove si giunge per un sentiero tortuoso e ripido, fatto a gradini scavati nella roccia, al quale i primi visitatori della grotta diedero il nome di *Monte Calvario:* la quarta misura si fece all'estremità di quest'erta.

Da questo punto il sentiero è più facile, e fra tranquilli laghetti di acqua limpidissima e ardite guglie calcari conduce ad un lago più grande, il così detto *lago delle fate*, che è come la mèta di chi visita la grotta di Bossea. In questo lago si precipita con una bellissima cascata l'acqua di un torrente che erompe da una stretta apertura, alta una quindicina di metri, e produce un misterioso fragore proiettando tutto all'intorno una nebbia di finissime goccioline d'acqua. Sulla riva di questo lago, alla distanza di circa 5 metri dalla cascata fu fatta l'ultima serie di misure.

La dispersione elettrica fu determinata col metodo di Elster e Geitel e con un apparecchio portatile costruito dal Müller-Uri. Nell'oscurità della grotta — dove i prodotti della combustione delle sorgenti luminose comunemente adoperate avrebbero alterata la conduttività dell'aria — le letture del cronometro e dell'elettrometro si fecero alla luce di una piccola lampada elettrica portatile, alimentata da una pila chiusa.

L'isolamento dell'elettrometro era sufficiente perchè si possa calcolare il coefficiente di dispersione colla formola:

$$a = \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{t} \log_e \frac{V_0}{V} ,$$

dove a è il coefficiente cercato,

n il rapporto fra la capacità dell'elettrometro e la capacità totale: nel caso nostro $n = 0,5$,

t l'intervallo di tempo espresso in minuti primi, fra l'istante in cui il potenziale ha il valore V_0 e quello in cui ha il valore V.

Ecco ora i risultati ottenuti:

(I) *Nell'imbocco del corridoio d'ingresso, a due metri dall'origine; poco lungi verso l'interno della grotta vi è un abbondante stillicidio:*

Temperatura 13°.0; umidità ass. 9mm.2; stato igr. 83.

$V_0 = -145.7$ $\quad V = -136.7$

$t = 10^m$ $\quad a_- = 0.012$

$V_0 = +148.5$ $\quad V = +130.5$

$t = 10^m$ $\quad a_+ = 0.026.$

(II) *Al principio della sala delle frane:*

Temperatura 10°.0; umidità ass. 8mm.9; stato igr. 94.

$V_0 = -127.0$ $\quad V = -113.6$

$t = 1^m$ (*) $\quad a_- = 0.218$

$V_0 = +133.5$ $\quad V = -110.5$

$t = 1^m$ $\quad a_+ = 0.379.$

(III) *All'estremità superiore della gradinata nella sala delle frane:*

Temperatura 9°.4; umidità ass. 8mm.7; stato igr. 97.

$V_0 = -133.5$ $\quad V = -120.5$

$t = 1^m$ $\quad a_- = 0.205$

$V_0 = +133.5$ $\quad V = +103.0$

$t = 1^m$ $\quad a_+ = 0.518.$

(*) Facendo le letture coll'intervallo di 10m, l'elettrometro si scarica quasi completamente.

(IV) *Nella sala del tempio:*

Temperatura 9°.4; umidità ass. $8^{mm}.7$; stato ig. 97.

$V_0 = -136.7$ $V = -96.0$

$t = 1^m$ $a_- = 0.707$

$V_0 = +136.7$ $V = +99.0$ $a_+ = 0.635.$

(V) *Vicino alla cascata:*

Temperatura 9°.4; umidità ass. 8.7; stato igr. 97.

$V_0 = -170.0$ $V = -142.4$

$t = 1^m$ $a_- = 0.354$

$V_0 = +136.7$ $V = +78.5$

$t = 1^m$ $a_+ = 1.109.$

Si ottengono presso a poco i medesimi valori calcolando la dispersione per 100 *volta* e riferendola al potenziale medio fra le due osservazioni; si avrebbero così i risultati seguenti:

(I) $\begin{cases} a_- = 1.3 \text{ per 100 volta e per minuto.} \\ a_+ = 2.6 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} a_- = 22.3 \\ a_+ = 37.7 \end{cases}$

(III) $\begin{cases} a_- = 20.5 \\ a_+ = 51.7 \end{cases}$

(IV) $\begin{cases} a_- = 70.3 \\ a_+ = 63.9 \end{cases}$

(V) $\begin{cases} a_- = 35.4 \\ a_+ = 108.8 \end{cases}$

A (MONDOVÌ)

le misure

Lit. Salussolia - Torino

PIANTA DELLA GROTTA DI BOSSEA (MONDOVÌ)

(1), (2), (3), (4), (5) Luoghi nei quali si fecero le misure

Lit. Salvadori - Torino

Le misure fatte nella grotta di Bossea dimostrano che quivi *la conduttività dell'aria è molto grande, e, in generale, è tanto maggiore per l'elettricità positiva, quanto più ci troviamo vicini all'acqua che, nel movimento, si riduce in goccioline.*

Nella cantina di Monaco, dove fece le sue misure l'Ebert, egli aveva trovato, tenendo in comunicazione col suolo il cilindro che protegge il corpo disperdente:

$$a - = 25\ \%$$
$$a + = 37\ \text{„}.$$

Insieme alla dispersione ho anche misurato la caduta di potenziale in diversi punti della grotta, ed ecco alcuni dei risultati ottenuti.

Nella sala del tempio si ebbe la caduta di potenziale di

$$-38^{v} \text{ per metro.}$$

Nell'ultimo punto dove si misurò la dispersione, cioè a 5 metri dalla cascata, l'aria presentava una fortissima carica negativa; alla distanza di 15 metri l'elettrometro si caricava e si scaricava ancora incessantemente: più indietro, alla distanza di 20 metri si aveva una caduta di

$$-240^{v} \text{ per metro}$$

e a 30 metri di distanza dalla cascata si aveva

$$-38^{v} \text{ per metro,}$$

come nel mezzo della sala del tempio.

In un'altra gita alla caverna di Bossea mi propongo di studiare se vi si manifestino dei fenomeni di radioattività indotta. Qui mi è caro di ringraziare il Dott. A. Pochettino che mi fu compagno nell'escursione e mi ha efficacemente coadiuvato nelle misure.

Sul comportamento dell'ossido di carbonio nell'organismo.

Nota 1ª di PIERO GIACOSA.

Il modo con cui l'ossido di carbonio si elimina dall'organismo dopo essersi fissato sulla sostanza colorante del sangue non è ancora perfettamente schiarito. È assodato che in un animale che sopravvive ad una intossicazione anche grave, il sangue dopo un periodo di tempo variabile, cessa di contenere emoglobina ossicarbonica (1).

Questa scomparsa non avviene più quando il sangue avvelenato estratto dal corpo si conservi ermeticamente chiuso, o rimanga nel cadavere; essa è dunque legata ai fenomeni che hanno luogo durante la vita. Hoppe-Seyler (2) verificò questi fatti tanto sul sangue ossicarbonico, quanto sulle soluzioni di emoglobina ossicarbonica. Tuttavia le osservazioni accurate fatte posteriormente hanno assodato che una certa quantità di CO scompare anche nel sangue conservato in provette sul mercurio (3); la perdita è insignificante rispetto a quella che si constata avvenire nel sangue ossicarbonico attraverso al quale si spinge una corrente d'aria

(1) Questo periodo di tempo deve ritenersi superiore a 6 ore. Bernard (*Leçons sur les anesthétiques*, Paris, 1865, p. 452) constata che un coniglio che ha nel sangue 2 cc. % di CO, dopo sei ore ne ha ancora 1,33: tre giorni dopo ogni traccia è scomparsa. Gréhant (" Compt. rend. „, 76, p. 233 (1873)) constatò che quattro ore dopo l'avvelenamento il sangue di un cane aveva perduto 11 cc. di CO, ma ne conteneva ancora 4.7 cc. Altre esperienze di Gréhant (" Compt. rend. „, 133, p. 951 (1901)) dànno per risultato che un cane che ha 14,7 % di CO nel sangue, dopo 50 minuti ne contiene ancora 10,2. Respirando ossigeno la eliminazione del CO è assai più rapida. De Saint-Martin (" Compt. rend. „, 115, p. 835 (1892)) trova che nei conigli che respirano nell'ossigeno per tre ore consecutive, non scompare tutto il CO del sangue: in un coniglio la quantità scese da 25,17 a 2,90; in un altro da 23,17 a 3,82. Cfr. quanto è detto a pag. 7 a proposito delle esperienze di Gaglio.

(2) " Medicin. chem. Untersuchungen „, II, 1867, p. 202.

(3) De St. Martin, " Compt. rend. „, 112, p. 1232 (1891).

o d'ossigeno. In quest'ultimo caso la dissociazione della carbossiemoglobina è assai rapida. Una corrente d'idrogeno e di protossido d'azoto o anche di anidride carbonica (1) agisce nello stesso modo; anche il vuoto dissocia la carbossiemoglobina (2). Ma per quanto rapido sia questo fenomeno, il sangue non riesce mai a spogliarsi dell'ossido di carbonio così rapidamente come quando circola in un animale vivente.

Ho potuto constatare che anche la carbossiemoglobina cristallizzata lasciata a lungo all'aria si decompone. Una certa quantità di cristalli preparati nell'inverno 1901 e messi in un essiccatore su un vetrino d'orologio, in capo ad un anno si trovarono ridotti in una massa bruna, dura, friabile, senza struttura cristallina, solubile in acqua.

La soluzione di color rosso brunastro allo spettroscopio si comportava come la metaemoglobina. Ho verificato che gr. 0,34 di questa sostanza sciolti in acqua e fatti bollire con KHO facendo passare una corrente d'aria non davano tracce di riduzione del cloruro di palladio. L'ossido di carbonio era completamente scomparso. Hoppe-Seyler (3) afferma che uguale trasformazione ha luogo nelle soluzioni di carbossiemoglobina conservate a lungo.

Se lo scomparire dell'ossido di carbonio dal sangue o dalle soluzioni di sostanza colorante del sangue è un fatto indiscusso, non avviene così per quanto ha relazione alla modalità del fenomeno e sopratutto alla forma nella quale l'ossido di carbonio si elimina. Si svolge esso immutato dal sangue, oppure si ossida in tutto o in parte? La questione venne sopratutto studiata per la carbossiemoglobina circolante negli animali avvelenati, per constatare se l'organismo vivente avesse il potere di ossidare la molecola CO in CO^2.

L'opinione prevalente da principio fu, che l'ossidazione potesse avvenire: Bernard (4), pur criticando le esperienze di

---

(1) Donders, " Pflüger's Arch. „, 5, p. 20 (1872). Dal sunto in " Maly's Jahrsb. „ dello stesso anno, p. 81.

(2) Vedi Zuntz, in " Maly's Jahrsb. „, 1872, p. 81, per i particolari dell'eliminazione in questo caso.

(3) *Handb. der physiol. u. path. chemischen Analyse*, VII ediz., 1903, p. 354.

(4) Loc. cit., p. 458 e segg.

Pokrowsky (1) che dimostrerebbero tale ossidazione, tuttavia inclina ad ammetterla e non accetta le conclusioni di Gréhant che la negherebbe: egli constata che il sangue ossicarbonico che penetra in un muscolo — sopratutto se è in contrazione — all'uscita è diventato venoso. Crede che l'ossidazione si compia nel corpuscolo rosso stesso e sia più facile per il sangue contenente poco ossido di carbonio, che per quello che è saturato.

Il metodo seguìto dal Pokrowsky infatti si presta alla critica; egli misura la quantità di anidride carbonica eliminata da un animale sano durante un dato periodo e la raffronta con quella eliminata nello stesso tempo dal medesimo animale avvelenato con CO. In questo ultimo caso constata un lieve aumento nel CO^2 emesso, ch'egli attribuisce a quello formatosi per ossidazione del CO. È chiaro che non esiste tale costanza e regolarità nella eliminazione dell'acido carbonico per espirazione da poter dare una attribuzione così precisa ad un leggero aumento.

La prova diretta della avvenuta ossidazione dell'ossido di carbonio in anidride carbonica è difficile a darsi in un animale vivente se si pon mente ai disturbi respiratori e alle alterazioni del ricambio che caratterizzano l'avvelenamento per CO; la tenue quantità di questo gaz sufficiente non solo a dare tali disturbi ed alterazioni, ma ad uccidere l'animale, non può dare per ossidazione tanta anidride carbonica che esca dai limiti delle oscillazioni imputabili ai fenomeni dell'intossicazione.

Ma per via indiretta può aversi con assai maggiori probabilità la prova della avvenuta ossidazione.

Se si constata infatti lo scomparire della carbossiemoglobina nel sangue, mentre nell'aria espirata non si trova ossido di carbonio o se ne trova assai meno di quanto corrisponde alla quantità scomparsa dal sangue, conviene ammettere che l'ossido di carbonio si sia ossidato. Pokrowsky e in seguito Gréhant (2) non trovano ossido di carbonio nell'aria espirata da animali che inalarono questo gaz o lo ebbero injettato sottocutaneamente, o nel retto. Risultati analoghi ottiene Kreis (3) che introduce insetti, rane, topi in atmosfere chiuse contenenti CO e lo vede scompa-

(1) " Virchow's Arch. „, vol. 30, p. 525 (1864).
(2) Bernard, *Leçons etc.*, p. 460.
(3) " Maly's Jahresb. „, 1881, p. 387.

rire in gran parte; che constata che il coniglio non espira CO benchè abbia avuto injettati 100 cc. di CO nelle vene; e che verifica cessare nelle rane ogni eliminazione di CO, quando il sangue spettroscopicamente lo rivela ancora. Anche Gruber (1) crede alla ossidazione del CO in CO^2.

Ma altre esperienze contraddicono a queste; Gréhant stesso nel 1893 (2) trova CO nell'aria espirata da un cane avvelenato per inalazione e da un altro a cui s'era injettato per la giugulare sangue carbossicarbonico. Ne conclude che il CO non si ossida, benchè, sia per il metodo da lui usato, sia per la mancanza di dati numerici, non possa affermare che *tutto* l'ossido di carbonio scomparso dal sangue sia stato eliminato inalterato. La presenza di CO nell'aria espirata da animali avvelenati con ossido di carbonio risulta anche da numerose altre esperienze che non sto a citare; le quali tuttavia non permettono di escludere che una parte almeno dell'ossido di carbonio possa realmente ossidarsi nell'organismo.

Gaglio (3) ha posto dei conigli in un ambiente chiuso in cui immetteva quantità di ossido di carbonio oscillanti fra 2,4 e 7 cc. per litro; provvedeva a impedire l'accumularsi dell'anidride carbonica e a rinnovare l' ossigeno necessario. Allorchè l'animale era profondamente avvelenato aspirava l'aria della campana, sostituendola con aria ed ossigeno puri; infine dopo che l'animale si era completamente riavuto egli aspirava in diverse riprese tutta l'aria della campana. L'esperimento terminava circa 4 ore dopo manifestatisi i sintomi più gravi dell'avvelenamento. L'aria raccolta durante l'esperimento (60 a 75 litri) spogliata della anidride carbonica veniva fatta passare su ossido di rame rovente e l'acido carbonico formatosi si raccoglieva e pesava come nell'analisi elementare organica.

I risultati del Gaglio sono concordi nell'indicare nell'atmosfera in cui visse l'animale una quantità di CO leggermente inferiore a quella introdotta (2,8 % in media in meno). L'esperienza di paragone dà lo stesso errore nello stesso senso. Queste

---

(1) " Arch. f. Hygiene ", I, 145 (1883).
(2) " Compt. rend. ", 76, p. 233 (1873).
(3) " Archiv für exp. Pathol. u. Pharmakol. ", 22, p. 235 (1887).

esperienze vennero considerate come probative ad escludere la possibilità d'ossidazione dell'ossido di carbonio nell'organismo.

Ma deve notarsi che le differenze trovate e gli errori del metodo sono pressapoco nei limiti della quantità di CO che avrebbe potuto ossidarsi, sopratutto quando si considera che l'avvelenamento intenso, a cui gli animali erano stati assoggettati, fino quasi a morirne, poteva avere una influenza sulle funzioni dalle quali dipende l'ossidazione dell'ossido di carbonio. Gruber (1) ha constatato che il sangue in cui il CO è molto diluito se ne libera più presto che non nelle condizioni opposte; De Saint Martin (2) dimostra lo stesso fatto. Non risulta poi che Gaglio abbia constatato se i suoi conigli dopo ristabiliti avessero ancora CO nel sangue, il che è quasi certo avvenisse, sapendosi che animali d'apparenza normale possono avere un sangue ricco d'ossido di carbonio (3) e se si tiene conto della durata delle esperienze del Gaglio (4).

Ad onta della precauzione presa di adottare animali a digiuno, altri gaz capaci di dare CO^2 per ossidazione potevano accumularsi nell'atmosfera. Il sangue stesso ne contiene (Desprez, Nicloux e De St. Martin (5)). L'anidride carbonica pesatasi non può dunque calcolarsi tutta in CO, ma è imputabile ad altri gaz eliminati dai polmoni o dall'intestino.

Haldane e Smith (6) che accettano i risultati di Gaglio, li confermano con un altro esperimento; essi radunano in una vescica tanto l'aria da inspirarsi, come quella espirata da un *soggetto* (gli autori non dicono di che soggetto si tratti) che ha il sangue saturato con CO al 30 %.

Siccome, date le condizioni dell'esperimento, non poteva eliminarsi per i polmoni una quantità apprezzabile di CO, ne consegue che se tal saturazione del sangue diminuisce, si dovrebbe ammettere una ossidazione. In realtà però durante un' ora in cui l'esperienza ha durato la saturazione del sangue fu sempre

---

(1) " Archiv f. Hygiene ", I, p. 145.

(2) " Compt. rend. ", 112, p. 1233.

(3) Il fatto è già affermato da Bernard, *Leçons etc.*, pp. 433-454.

(4) Cfr. la nota 1, p. 1.

(5) Vedi nei " Compt. rend. " del 1898 i lavori di questi autori sulla questione.

(6) " The Journal of Physiology ", vol. XX, p. 514, 1896.

costante. Appena il soggetto respirò all'aria aperta il contenuto del sangue in CO cominciò a scemare.

Gli autori non si accertarono se nell'aria della vescica si contenesse in realtà ossido di carbonio e quanto; non determinarono la quantità di questo gaz emessa dai polmoni quando l'animale respirava in aria libera.

La loro osservazione può al più escludere che una ossidazione abbia luogo nelle condizioni in cui essi si sono posti. La questione non può dunque considerarsi decisa dalle esperienze di Gaglio e di Haldane e Smith.

De Saint Martin dal suo canto (1) aveva portato dati positivi in favore della dottrina opposta; egli determina l'ossido di carbonio assorbito da un animale, quello eliminato colla respirazione e quello residuo nel sangue, e trova un *deficit* considerevole fra la cifra del primo e la somma dei due secondi. Un coniglio assorbe 25,17 cc. di CO; ne elimina per espirazione 14,44, ne rimangono nel sangue 2,90 cc. Totale 17,34. CO scomparso (ossidato) 7,83 cc., cioè circa un terzo della quantità assorbita.

Un'altra esperienza in cui un coniglio riceve 23,17 cc. di CO dà un *deficit* di 5,03 cc.; la quantità ossidata è poco meno di un quarto.

L'anno seguente De Saint Martin torna sullo stesso argomento e dimostra che tenendo dei conigli parzialmente avvelenati in condizioni in cui l'eliminazione in natura è impossibile, si constata una distruzione parziale dell'ossido di carbonio, tanto più attiva quanto meno profonda è l'intossicazione (2).

Nel 1899 Wachholtz (3) riprese le esperienze di Kreis: constatò che le larve della farina distruggono l'ossido di carbonio nell'atmosfera in cui sono messi e vide che i topolini che respirano (in una campana chiusa) ossigeno contenente da 1,3 a 3 per mille di ossido di carbonio, in 24 ore fanno scomparire quest'ultimo; la quantità di CO perduta corrisponde a 60 % del volume del topo. Nelle rane avvelenate con ossido di carbonio si elimina bensì una parte di questo gaz nella espirazione, ma questa eliminazione ben tosto cessa, benchè il sangue spet-

---

(1) " Compt. rend. „, 115, p. 835, 1892.
(2) " Compt. rend. „, 116, p. 260 (1893).
(3) " Pflüger's Archiv „, vol. 74, p. 174 (1899).

troscopicamente mostri ancora di contenere carbossiemoglobina, la quale poco a poco scompare.

In un lavoro uscito poco dopo quello del Wachholtz, Haldane ripete le stesse esperienze sui topi, tenuti in una campana piena d'aria in cui si introduce una quantità indeterminata di ossido di carbonio e si fa giungere ossigeno a sostituire quello consumato. Dopo un'ora di soggiorno dell'animale nella campana, l'autore procede a una prima determinazione dell'ossido di carbonio nell'atmosfera della campana e successivamente analizza altri campioni a distanza sempre maggiore (da $4\,^1/_2$ a 29 ore). Egli trova sempre la stessa percentuale di ossido di carbonio. Nel dar conto di questi risultati che sono in diretta contraddizione con quelli di Wachholtz, Haldane confessa di non sapersi spiegare la disparità dei risultati. Ma deve notarsi che egli non dosò l'ossido di carbonio appena introdotto, ma quello esistente un'ora ed anche più (after a delay of an hour or more) dacchè gli animali vi respiravano, e quando apparivano avvelenati. Non è dunque possibile determinare se una parte dell'ossido di carbonio sia scomparsa. Di più nelle esperienze di Wachholtz i topi si introducevano in una atmosfera d'*ossigeno puro* contenente *allo inizio* 1,4 per mille di ossido di carbonio, mentre in quelle di Haldane dopo un'ora e più l'*aria* conteneva ancora 1,7 a 3,1 per mille di CO; in queste condizioni il sangue dei topi era saturato al 67 % con ossido di carbonio, ed uno di essi morì, mentre gli altri mostravano i soliti sintomi di avvelenamento. Nelle esperienze di Wachholtz i topi vissero senza altro inconveniente che un po' di dispnea. La differenza di comportamento è certo in relazione colla presenza d'ossigeno e colla percentuale dell'ossido di carbonio; Wachholtz osservò infatti, che se il tenore *iniziale* del CO nell'ossigeno sale a 4,2 per mille, esso non è più tutto distrutto. Come già dissi, anche De Saint Martin ha constatato che la distruzione dell'ossido di carbonio è tanto più attiva quanto meno profonda è la intossicazione.

Haldane stesso non esclude che nelle concentrazioni da lui usate una distruzione (ossidazione) possa aver luogo, ma la limita al massimo al 3 per cento della quantità contenuta nel sangue.

Da quanto sono venuto esponendo appare che la questione sulla ossidabilità dell'ossido di carbonio del sangue è ancora dibattuta, benchè parecchi, e fra questi distinti trattatisti, l'abbiano risolta in senso negativo (1).

Le mie esperienze al proposito vennero iniziate nel corso di indagini che da lungo tempo ho intrapreso sulla azione farmacologica dell'ossido di carbonio e di cui finora ho dato soltanto un breve cenno preventivo alla R. Accademia di medicina di Torino (2). Il metodo da me adottato fu il seguente:

Estraevo una quantità di sangue per lo più di 50 cc. da un animale (cane o coniglio); defibrinavo immediatamente, poi vi facevo gorgogliare per 20 minuti circa una corrente di ossido di carbonio puro ben lavato. Durante il quale tempo il sangue rimaneva a 38°.

Il sangue così saturato di CO si divideva in due porzioni di volume esattamente eguali e si metteva entro due tubi di vetro lunghi 32 cent., larghi 2,4, muniti al fondo di tre bolle. I tubi erano chiusi da tappi di gomma a due fori; per uno scendeva fino al fondo la canna di vetro destinata all'immissione dell'aria o dell' ossigeno; un'altra canna corta serviva all'uscita, e per mezzo di un tubo di cautsciù metteva negli apparecchi d'assorbimento per l'ossido di carbonio.

Adottai il cloruro di palladio e il dosaggio secondo il metodo di Fodor (3) che se è ben eseguito è affatto sicuro. È bensì vero che il cloruro di palladio può esser ridotto da molte altre sostanze che non siano l'ossido di carbonio, come Hempel (4) fa notare. Ma nel caso presente, come già altri hanno constatato ed io stesso verificai con saggi diversi, non è da temersi questa causa d'errore. Aria fatta passare attraverso a sangue normale sia

---

(1) Kobert nel suo *Lehrbuch der Intoxicationen* (Stuttgard, 1893, p. 525), benchè cauto nello accettare le interpretazioni correnti sull' azione farmacologica del CO, pure afferma la inossidabilità del veleno nell'organismo. Egli scrive pure che l'azione tossica si sviluppa in egual modo sia che il gas sia inalato, o iniettato sottocutaneamente, o introdotto sotto qualsiasi altra forma, il che non è.

(2) " Giorn. della R. Acc. di Medicina di Torino ", 1902.

(3) " Deutsche Vierteljahrsschrift für öff. Gesundheitspflege ", vol. 12, p. 397 (1880).

(4) *Gasanalytische Methoden*, III Aufl., p. 202.

fresco che putrefatto non altera la soluzione di palladio: appena invece il sangue contenga una traccia di CO la riduzione ha luogo. Perchè il dosaggio sia esattamente quantitativo, cioè che la riduzione sia regolare e completa, sì da osservarsi regolarmente progredire dalla prima alle altre bolle del tubo di Liebig e lasciare integro il secondo tubo fino a che il primo sia tutto saturato, conviene procedere di guisa che le bolle si seguano lente, a intervallo di cinque a sei secondi. Se si va più velocemente la riduzione non è regolare.

L'aria che si faceva passare attraverso ai tubi contenenti il sangue avvelenato era affatto libera da ossido di carbonio. Essa era chiusa entro grandi damigiane di vetro sotto la pressione di circa m. 1,50 d'acqua regolando il deflusso allo scopo sopra indicato.

I tubi di Liebig in numero di due, destinati a trattenere l'ossido di carbonio, erano preceduti da due boccie di lavaggio, la prima contenente una soluzione d'acetato di piombo, la seconda acido solforico diluito.

Le esperienze preliminari avevano confermato il fatto che il sangue ottenuto da un animale avvelenato con ossido di carbonio, oppure saturato dello stesso gaz dopo estratto da un animale sano e defibrinato in entrambi i casi, introdotto nei tubi tenuti a bagno maria in un grosso bicchiere a temperatura di 38°, emette ossido di carbonio per alcune ore, dapprima intensamente, poi con minore attività; finchè dopo 15-16 ore non si ha più traccia di CO nell'aria che esce dal sangue. Volli vedere quale influenza il tessuto polmonare fresco potesse esercitare su questa dissociazione.

I polmoni perfettamente sani si toglievano dal coniglio, immediatamente dopo averlo salassato per ottenerne il sangue da saturarsi poi con CO; l'estrazione si faceva con tutte le cautele operative; poi, con forbici sterilizzate si tagliuzzavano in minuti pezzi, i quali si introducevano in uno dei due tubi in cui si distribuiva in volumi eguali il sangue intossicato. L'altro tubo riceveva sangue solo; entrambi si collocavano nello stesso grande bagno a 38° e si faceva passare aria lentamente. La riduzione del palladio in queste circostanze suole osservarsi per lo più già dopo 15 a 20 minuti; per alcune ore essa progredisce visibilmente, finchè anche la prima bolla del

secondo tubo Liebig incomincia ad imbrunire. Allora si staccava il primo Liebig già ridotto, si metteva il secondo al suo posto aggiungendogliene un altro in coda. In questo modo si poteva continuare l'operazione finchè i due tubi non si alterassero più

Già al semplice aspetto le due prove di sangue, quella cioè contenente polmoni e quella contenente sangue puro, mostrano differenze notevoli. Anzi tutto la riduzione del palladio nelle prime ore è più viva nel tubo in comunicazione col sangue puro che in quello che comunica col sangue contenente polmoni. Passato qualche tempo questi fenomeni sembrano invertirsi; inoltre si osserva uno iscurirsi del sangue con polmoni, iscurirsi che esordisce nelle porzioni che contorniano i singoli frammenti di polmone e poi si diffonde al resto del liquido. Il sangue puro invece conserva a lungo il suo colore rosso rutilante, che però perde la tinta ciliegia per passare in ultimo a quella del sangue arterioso. Se nel momento in cui non si osserva più riduzione della soluzione di palladio si esaminano i due sangui allo spettroscopio non si scorge più lo spettro della CO emoglobina. Tuttavia non è ancora scomparso tutto l'ossido di carbonio, perchè diluendo il sangue, aggiungendovi secondo il precetto di Gaglio (1) un pezzettino di KHO, scaldandolo a b. m. mentre lo si fa traversare da una corrente d'aria, si può avere ancora una riduzione del palladio.

Un'altra differenza ancora deve notarsi: mentre il sangue ossicarbonico, solo, si mantiene inalterato, il sangue con polmoni si putrefà dopo poche ore continuando ancora a contenere CO; per conseguenza verso la fine del dosaggio dell'ossido di carbonio dal tubo contenente polmoni e sangue possono svilupparsi traccie di idrogeno solforato che imbruniscono leggermente il tubo che s'immerge nella soluzione di piombo, senza poter alterare il colore della soluzione stessa. La corrente d'aria che passa attraverso ai due tubi (sangue puro e sangue con polmoni) trascina ingenti quantità di CO^2 che intorbida la soluzione d'acetato di piombo.

In alcuni casi invece di aria impiegai ossigeno, compresso in cilindri di ferro a pressione di 10 atmosfere; anch'esso esente da CO e da ozono.

Ora ecco i particolari di alcune esperienze:

---

(1) Loc. cit.

I. — Il 30 gennaio 1903 al mattino avveleno un coniglio facendogli inalare ossido di carbonio; allorchè è presso a morire gli sottraggo il sangue dalla carotide, lo defibrino e ne peso 52 gr. Osservato allo spettroscopio si dimostra ossicarbonico. Le mucose e gli organi del coniglio sono rosei.

Due porzioni di 25 cc. ciascuna di questo sangue s'introducono nei tubi appositi per il passaggio dell'aria; in uno dei quali s'aggiungono frammenti di tessuto polmonare dello stesso coniglio (tubo *A*); nel tubo *B* il sangue è solo.

I due tubi sono a bagno maria nello stesso recipiente a 38°: la corrente d'aria si fa passare contemporaneamente nei due tubi e colla stessa pressione e velocità: dopo 30-40 minuti il passaggio di CO si fa evidente coll'oscurarsi del cloruro di palladio nella prima bolla di entrambi i tubi Liebig.

L'esperienza continua per circa 12 ore; si sospende durante la notte per 10 ore, lasciando i tubi nello stesso bagno che man mano scende alla temperatura della stanza: si riprende il giorno seguente.

Il tubo *A* dà debole riduzione che scompare affatto, dopo 6 ore: il tubo *B* continua a ridurre energicamente per tutto quello e per due altri giorni.

Allorchè la corrente d'aria ebbe cessato di ridurre il palladio, entrambi i sangui fatti bollire con potassa in corrente d'aria non diedero più se non traccie insignificanti di riduzione.

Il cloruro di palladio ridottosi durante l'esperimento si raccolse su filtri, si lavò accuratamente e si sciolse in acqua regia a caldo, colla quale si lavarono anche i tubi Liebig per ottenere il palladio rimasto come specchio aderente al vetro. La soluzione in acqua regia si svaporò a secco a b. m., si riprese con qualche goccia d'acido cloridrico e d'acqua, si riportò a secco onde cacciare ogni traccia d'acido nitrico, poi si disciolse in poca acqua con l'aggiunta di 2 goccie d'acido cloridrico.

In questa soluzione acida di cloruro di palladio perfettamente limpida, nella stessa capsula tenuta a b. m. bollente si versò a goccie la soluzione di joduro di potassio 1,486 ‰ colle cautele indicate da Fodor. Con un poco di pratica il dosaggio riesce facilissimo ed assai esatto. Il risultato fu che il palladio ridotto dall'aria passata nel tubo *A*, corrispondeva a 5,8 cc. di soluzione di KJ: quello del tubo *B* corrispondeva a 14,5 della stessa soluzione.

Ogni cent. cub. della soluzione di palladio corrisponde a 0,1 cc. di CO a 0° e 760 mm. Hg: dunque 100 gr. di sangue in presenza di polmoni avevano emesso 2,32 cc. CO, mentre 100 gr. di sangue puro ne avevano emessi 5,8. Differenza 3,48 cc. CO (cioè il 60 °/₀ della quantità emessa dal sangue) emessi in meno in presenza di polmoni.

II. — 27 gennaio 1903; si salassa un cane dalla carotide, si estrae un 150 cc. circa di sangue che si defibrina tosto. Si mettono in una boccia in una stanza verso i 0°. Dopo due giorni si satura il sangue con CO, e lo si lascia in una atmosfera di questo gaz per altri quattro giorni alla stessa temperatura. Il 3 febbraio il sangue non è per nulla alterato, i corpuscoli sono intieri, non c'è odor di putrido. Allo spettroscopio si constata carbossiemoglobina.

Nello stesso giorno si procede come nelle esperienze precedenti. *A* riceve 25 cc. sangue + 25 gr. polmone del cane sagrificato al momento; *B* riceve 25 cc. sangue. La riduzione avviene regolarmente circa $^1/_2$ ora dopo avviata la corrente d'aria. L'esperienza cominciata alle 10 continua regolarmente tutta la giornata e tutta la notte e il giorno seguente.

Il tubo *A* incomincia a dar segno di putrefazione il mattino del 4; una goccia di sangue diluita in acqua dà ancora lo spettro della carbossiemoglobina; si continua la corrente d'aria finchè non si ha più traccia di riduzione.

A ridusse tanto di palladio corrispondente a 15,5 cc. KI: cioè a 6,2 cc. CO per cento di sangue.

B ridusse tanto di palladio corrispondente a 23,5 cc. di KI: cioè a 9,5 cc. di CO per cento.

Differenza 3,3 cc. di CO emessi in meno da 100 cc. sangue in presenza di polmoni: cioè il 38 °/₀ circa della quantità emessa dal sangue.

Ho già accennato che seguendo il corso delle esperienze si scorge un comportarsi diverso dei fenomeni di riduzione nei due sangui. Il sangue solo si conserva rosso rutilante; soltanto in fine la tinta porporina propria del sangue ossicarbonico passa al rosso arterioso: il sangue con polmoni in poche ore accenna a diventar venoso e i processi putrefattivi si iniziano assai presto. La riduzione poi del palladio dà questi risultati: comincia per lo più contemporaneamente, ma per il sangue solo appena ini-

ziata prosegue rapida ed energica nelle prime ore, e continua poi per uno o due giorni sempre meno accentuata. Per il sangue e polmoni avviene un fatto inverso. Nelle prime ore riduzione scarsa, poi abbondantissima in modo da eliminare tutto il CO contenuto nel sangue in tempo assai più breve. Ecco una esperienza che illustra quantitativamente questo fatto.

III. — 5 maggio. Coniglio: si salassa alla carotide, si defibrina subito e si satura il sangue con ossido di carbonio.

A sangue ossicarbonico 17,5 cc. più 10 gr. di polmone fresco.

B sangue ossicarbonico 17,5 cc.

Corrente lenta d'aria temp. 38°. L' esperimento comincia alle 9,25; alle 9,38 in *B* si ha già forte riduzione, nulla in *A*, dove soltanto alle 10,30 si ha un debole specchio nel poco liquido della prima bolla del tubo Liebig. Alle 11 tutto *B* è intensamente ridotto. Sì che è necessario sostituirlo con un altro: in *A* è appena ridotta la seconda bolla. Alle 18,45 si sospende la operazione, gli apparecchi si tengono chiusi in modo che del contenuto gassoso nulla può uscire. Il palladio ridottosi in questa giornata si dosa a parte.

6 maggio. Si riprende l'operazione; si porta l'acqua a 38° e nei due tubi *A* e *B* si fa passare una corrente d'ossigeno puro compresso a 10 atmosfere, colla solita lentezza. L'ossigeno caccia con molta prontezza il CO dal sangue. L'operazione dura 10 ore, dalle 9 alle 19. Riduzione del palladio pronta e contemporanea nei due apparecchi. Malgrado la corrente d'ossigeno poco a poco in *A* il sangue s'oscura, in *B* si fà arterioso, non più porporino. Anche queste porzioni di palladio si dosano a parte.

7 maggio. Per cacciare il CO residuo in *A* e *B* si diluisce il sangue di ciascuno, si aggiunge un frammento di KHO solido e si fa passare una corrente d'aria, scaldando a b. m. bollente: si continua finchè non c'è più traccia di riduzione del palladio, si raccoglie il palladio ridotto e si dosa a parte.

Risultati:

1ª Giornata. *A* vuole 4,9 cc. KI pari a 2,8 cc. CO °/₀ emessi.
„ „ *B* vuole 10,6 cc. KI pari a 6,08 cc. CO °/₀ emessi.

Differenza 3,25 cc. CO emessi in meno in presenza di polmoni; cioè 35,8 °/₀ della quantità emessa dal sangue.

2ª Giornata. *A* vuole 21,5 cc. KI pari a 12,2 cc. °/₀ CO.
„ „ *B* vuole 16,00 cc. KI pari a 9,71 cc. °/₀ CO.

Differenza 2,49 emessi in meno dal sangue puro; cioè 2,03 °/₀ del CO emesso dal sangue con polmoni.

3ª Giornata. *A* vuole 2 cc. KI pari a 1,14 cc. °/₀ CO.
„ „ *B* vuole 5,4 cc. KI pari a 3,08 cc. °/₀ CO.

Differenza 4,46 cc. CO emessi in meno dal sangue più polmoni; cioè 82,5 °/₀ della quantità emessa dal sangue.

Questa esperienza è molto istruttiva. Anzi tutto se per mettersi nelle condizioni delle esperienze precedenti si sommano insieme le quantità di CO emesse da *A* e *B* si trova che *A* ha emesso in tutto 16,14 cc. CO °/₀ e *B* 18,84.

Differenza 2,70; cioè 14,3 °/₀ del totale CO emesso dal sangue sono scomparsi.

Se poi si viene ai particolari delle singole giornate si vede che nel primo giorno il sangue in presenza di polmoni emise assai meno ossido, che da solo. La differenza fra le due quantità emesse è di 53,8 °/₀. Ma essa deve essere ragguagliata alla quantità totale emessa dal sangue che è, come si vide, di cc. 18,84 °/₀. In tale modo si vede che nella prima giornata dal polmone si emisero in meno 17,2 cc. °/₀ di CO, quantità che differisce poco dal 14,3 °/₀ del totale, sul quale deve notarsi che tutti gli errori si accumulano.

Nella seconda giornata la presenza dei polmoni inverte il fenomeno, e fa che il sangue si liberi di quasi tutto l'ossido di carbonio che contiene mentre nel sangue solo il fenomeno procede più lentamente.

Ecco ora un'altra esperienza che illustra e conferma la precedente.

IV. — 11 maggio. 12 cc. di sangue fresco di coniglio, saturati con CO si mettono nel solito apparecchio a 38° con corrente d'aria. La riduzione comincia dopo 10 minuti e prosegue regolarmente. Dopo un' ora, il tubo di Liebig è intensamente ridotto; lo stacco, apro l'apparecchio e scaccio con una corrente d'aria l'ossido di carbonio che contiene, aggiungo al sangue i polmoni dell'animale estratti sul momento, innesto un nuovo tubo Liebig e avvio di nuovo la corrente: dopo 14 minuti primo leggero imbrunimento; seguito per un'ora nel qual tempo si è formato un

sottile specchio di palladio sulla prima bolla. La differenza fra i due tubi è così manifesta che l'esperimento sarebbe raccomandabile per la lezione, se non vi fosse l'ostacolo della sua durata. Il risultato fu che nella prima ora il sangue puro ridusse tanto palladio da corrispondere a 9,3 cc. di KI; nella seconda ora, in presenza di polmoni, il palladio corrispondeva a 2,5 cc. KI: cioè nel momento in cui l'eliminazione d'ossido di carbonio *inalterato* è più avviata, la presenza di polmoni basta a farla diminuire del 73 %. È probabile che la eliminazione del CO avrebbe anche potuto scender più basso, quando, come nelle esperienze precedenti, i polmoni fossero immersi completamente nel sangue; ma per questo è necessario introdurre prima nel tubo i polmoni e poi versarci sopra il sangue, tenendoli fermi al fondo con una bacchetta. Nel caso presente i polmoni, introdotti più tardi, ad onta di ogni tentativo, rimasero solo in parte bagnati dal liquido sanguigno.

Il *deficit* avutosi nelle esperienze che ho descritto non può interpretarsi se non come l'espressione di una ossidazione che ha luogo di una parte dell'ossido di carbonio. Le mie operazioni confermano i risultati ottenuti dal De Saint Martin e dagli altri già citati.

La prova diretta della produzione di CO^2 a spese del CO, che Pokrowski aveva tentato di dare è fornita dalla seguente esperienza:

V. — 13 febbraio 1903. Si salassa un cane dalla carotide: 55 cc. del sangue defibrinato si introducono nel solito tubo a bolle, aggiungendo 25 gr. del polmone fresco dello stesso cane, finamente tagliuzzato.

Un'altra porzione dello stesso sangue è stata saturata con CO: 25 cc. si mettono in un altro tubo con 25 gr. polmone come sopra e 25 cc. si introducono in un terzo tubo senz'altra aggiunta. I tubi si mettono tutti a b. m. a 38° e si fanno traversare da una lenta corrente d'aria. L'esperienza dura dalle 9,20 alle 23.

Alla fine dell' esperienza, il sangue (solo) ossicarbonico è ancora rosso rutilante; così quello ossicarbonico con polmone: quello sano con polmoni è scuro: nessun indizio di putrefazione in nessuno dei tre tubi.

L'aria che penetra nei tubi è privata dell'acido carbonico coi soliti mezzi usati nell'analisi organica elementare; quella che ne esce traversa una boccia di Drechsel con acido solforico concentrato, poi un tubo ad U contenente pietra pomice imbevuta d'acido solforico concentrato, poi un tubo Geissler contenente soluzione KHO come per le combustioni.

Il risultato è che nello stesso periodo di tempo il sangue sano in presenza di polmoni produsse gr. 0,0558 di CO^2; il sangue ossicarbonico in presenza di polmoni gr. 0,0371 e quello ossicarbonico solo gr. 0,0135.

Anche qui dunque i risultati s'accordano colle ipotesi della ossidazione. Ma ripeto qui quanto dissi a proposito delle esperienze di Pokrowski, che cioè in esperienze di questa sorta concorrono molti elementi ignoti. È evidente che il sangue sano non deve comportarsi come quello avvelenato, e infatti messo in presenza di polmoni esso produce più CO^2 che non l'altro nelle stesse condizioni: ma noi non sappiamo come il polmone si comporti in contatto con sangue avvelenato; potrebbe anche succedere che si modificassero i fenomeni che conducono alla produzione di CO^2 indipendentemente da una ossidazione del CO. Il fatto è tuttavia poco probabile, e può ritenersi fino a prova contraria che il CO^2 emesso in più dal sangue ossicarbonico in presenza di polmoni derivi dalla ossidazione dell'ossido di carbonio.

È importante il fatto che il potere ossidante del tessuto polmonare si manifesta solo per pochissimo tempo dopo che il polmone fu estratto dal corpo; ciò sta ad indicare che tale potere è in relazione con elementi i quali si alterano facilmente, e cessano di funzionare man mano che il polmone muore.

Questa transitorietà della funzione può condurre nelle esperienze troppo prolungate a risultati erronei, in quanto che l'eccesso di ossido di carbonio che si emette in seguito per l'influenza dissociante del tessuto polmonare copre il *deficit* primitivo dovuto alla ossidazione. Il 28 aprile una esperienza che durò 14 ore consecutive diede 3,33 % di CO dal sangue solo e 2,76 da quello con polmoni.

In un' altra esperienza precedente (21 aprile) in cui avevo preso una piccola quantità di sangue, in 8 ore si eliminarono dal sangue puro 6,3 % di CO, da quello con polmoni 5,9. La differenza è sempre nello stesso senso, ma tende a farsi più piccola.

Non ho stabilito se il potere ossidante sia in relazione con una ossidasi, la quale si altererebbe in poco tempo. Una esperienza fatta sostituendo al tessuto polmonare quello muscolare (1) non ha mostrato che avesse le proprietà del primo.

La dottrina della ossidabilità dell'ossido di carbonio mi pare possa ormai ritenersi assodata, almeno nelle circostanze delle esperienze degli autori citati e delle mie (2). Molto rimane ancora a studiarsi sulla modalità di tale ossidazione: se essa si compia direttamente sulla carbossiemoglobina o si operi sul CO allo stato libero eventualmente dopo essere stato dissociato: come agisca su di essa la tensione del CO nell'atmosfera e nel sangue: come vi influisca l'ossigeno. Ho già intrapreso indagini a questo scopo sulle quali mi riservo di riferire quando saranno ultimate.

Un'altra evidente azione del tessuto polmonare consiste nel favorire la dissociazione della carbossiemoglobina colla successiva eliminazione di ossido di carbonio. Oltre ai dati delle esperienze già citate che dimostrano in modo evidente tale azione, la quale, come dissi, può mascherare l'azione ossidante, ricorderò qui un' altra esperienza assai convincente e che si può fare in iscuola. Si fa un miscuglio di aria e ossido di carbonio (nel mio caso il CO rappresenta il 3,4 per mille); volumi eguali si fanno gorgogliare attraverso a sangue puro, e attraverso a sangue con polmoni, entrambi a 38°. Il sangue puro diventa rosso ciliegia; quello con polmoni si fa sempre più nero: esso si libera del CO assai più presto che il sangue puro. Il palladio si riduce rapidamente in corrispondenza del tubo coi polmoni, lentamente in quello col sangue. È probabile che tale azione dissociante sia contemporanea alla ossidazione; certo essa ne è ben distinta ed è in relazione con elementi che non s'alterano così facilmente quando il polmone è esportato dal corpo.

Già Gréhant aveva fatto circolare il sangue ossicarbonico nei polmoni e l'aveva visto riacquistare la sua capacità respiratoria (3). Montuoro (4) ripetè l'esperienza di Gréhant cogli stessi

---

(1) Cfr. A. Bernard, *Leçons sur les anesthétiques*, p. 463.

(2) Come è noto, anche il dogma della inossidabilità dell'acido ossalico nell'organismo è sfatato.

(3) " Compt. rend. „, 76, p. 233 (1873).

(4) " Rendiconti della R. Accad. delle scienze fis. e mat. di Napoli „, 1900, p. 17.

risultati, poi la variò mettendosi nelle condizioni che io adottai in queste mie esperienze, cioè ponendo a contatto polmoni e sangue estratti dall'animale.

Egli dimostrò che per ottenere la dissociazione è necessario il tessuto polmonare integro e non un estratto di esso. Esperienze di Nicloux (1) sul passaggio dell'ossido di carbonio dalla madre al feto dimostrano che la dissociazione può aversi per opera della placenta: lo stesso autore (2) trovò che le branchie dei pesci agiscono nello stesso modo sulla carbossiemoglobina sciolta nell'acqua in cui nuotano.

È ancora da stabilirsi se i tessuti che posseggono la proprietà di dissociare la carbossiemoglobina possano anche distruggere (ossidare) l'ossido di carbonio, almeno in parte. Per ciò che si riferisce al sangue, De Saint Martin dimostrò che il CO che vi è contenuto scompare anche quando lo si chiude sul mercurio; si avrebbe dunque una ossidazione che egli avrebbe trovato più manifesta nelle soluzioni più diluite di carbossiemoglobina (3).

Wachholtz è di parere che se tale ossidazione pure si compie, essa sia scarsissima (4).

Per contro il sangue possiede in alto grado la proprietà di dissociare la carbossiemoglobina sì che essa può già osservarsi nel sangue chiuso in presenza d'una atmosfera limitata, sopratutto se è ricca d'ossigeno. Ma le quantità di CO che si liberano in queste condizioni sono senza paragone minori di quelle che s'ottengono facendo gorgogliare attraverso al sangue una corrente d'aria. Questa dissociazione è evidentissima nelle mie esperienze a cui rimando, e in numerose altre che eseguii nel corso di mie indagini (5).

Come era da aspettarsi, l'ossigeno, sopratutto ad alta pres-

---

(1) " Compte rendu du cinquième congrès internat. de physiol. „. Turin, 1901, p. 101.

(2) Ib., e " Compt. rend. Soc. biol. „, 53, 955.

(3) " Compt. rend. „, 112, p. 1232 (1891).

(4) " Pflüger's Arch. „, 74, p. 180 (1899).

(5) Montuoro nelle sue esperienze citate non osservò la dissociazione nel sangue, ed ammette che si operî soltanto in presenza di polmoni. Ma il metodo da lui adottato di fare assorbire il CO emesso dal sangue, per osservarlo poi spettroscopicamente, è imperfetto, poichè la dimostrazione spettroscopica della COemoglobina in presenza di ossiemoglobina non può aversi se non in presenza di grandi quantità della prima.

sione come io lo usai (cilindri d'ossigeno compresso a 10 atmosfere), agevola la dissociazione e scaccia pressochè tutto l'ossido di carbonio dal sangue. È una azione di massa, che venne studiata diligentemente da Hüfner. Ho potuto osservare che in una corrente d'ossigeno alla pressione indicata non si ha più quel *deficit* di CO nelle prime ore in presenza di polmoni, che ho attribuita ad una ossidazione. Non posso ancora avere dati sufficienti ad affermare se in queste condizioni la ossidazione si abolisca per una possibile alterazione degli elementi dei tessuti che la determinano o se sia solo mascherata dalla dissociazione intensa.

Durante il passaggio della corrente d'ossigeno attraverso al miscuglio di sangue ossicarbonico e polmoni, si osserva il rapido scomparire della tinta caratteristica e l'oscurirsi del sangue, come se i processi riduttivi a cui tale iscurirsi è dovuto fossero intensificati dalla presenza dell'ossigeno.

Ricerche sull'acido colico.

Nota del Dr. LODOVICO BECCARI, assistente.

L'acido colico, prodotto di scissione caratteristico degli acidi biliari, costituisce ancora uno degli argomenti più oscuri della chimica fisiologica; la sua genesi nell'organismo, le sue trasformazioni e tutte le questioni, che a queste prime si connettono, sono evidentemente subordinate alla conoscenza esatta della struttura di questo corpo. Ora tali conoscenze mancano quasi totalmente o sono del tutto insufficienti a fornire una idea della costituzione dell'acido colico.

Su questo corpo possediamo tuttavia una vasta letteratura, ma può dirsi che, eccettuati alcuni lavori fondamentali, essa non ha, al riguardo, che un valore storico o rappresenta una serie di tentativi più o meno infruttuosi. Un esame critico ed ordinato di tutte le ricerche su questo argomento non troverebbe qui luogo acconcio, nè porterebbe luce al problema. Il lavoro dello Strecker (1), che scoperse e studiò con rara perizia la compo-

(1) " Ann. „, Bd. 67, s. 1-60.

sizione e le proprietà principali dell'acido colico, rimane anche oggi uno degli esempî classici nel campo della chimica fisiologica, e, se poco si è aggiunto, assai meno si è corretto dei suoi risultati. La formola $C^{24}H^{40}O^{5}$ data dallo Strecker, e che diede pure luogo a lunghe discussioni, è quella che oggi deve accettarsi, perchè confermata dalle osservazioni più esatte.

Lavori posteriori degni di particolare menzione sono quelli di Mylius (1), i quali stabiliscono con precisione alcuni fatti relativi alla cristallizzazione dell'acido colico e dimostrano l'esistenza di tre gruppi alcoolici e di un carbossile nella molecola di questa sostanza. A questo possono compendiarsi i risultati fino ad oggi avuti sulla costituzione dell'acido colico, che, però, può rappresentarsi così:

$$C^{20}H^{31}\left\{\begin{array}{l}(CH^{2}.OH)^{2}\\ CH.OH\\ CO.OH\end{array}\right.$$

Molti altri risultati interessanti si ebbero sui derivati più o meno immediati dell'acido colico, ma tutti o non fanno che confermare le precedenti conclusioni di Mylius o non portano alcuna luce nuova sulla oscura costituzione di questo acido.

Altri autori, tanto in passato che negli ultimi anni, hanno tentato, con mezzi chimici estremamente energici, di studiare gli ultimi prodotti più semplici di ossidazione e di scissione dell'acido colico, ma con fortuna troppo scarsa, poichè i risultati, in gran parte contraddittori o incerti, non recano nessun utile contributo alla conoscenza della natura di questo acido.

L'acido colico, contenuto in quantità rilevante nella bile di parecchi animali, sarebbe un materiale di studio abbondante, se la preparazione sua allo stato di purezza non presentasse qualche difficoltà o non richiedesse notevole lavoro. I diversi metodi usati dai varî autori, che più specialmente si occuparono dell'argomento (Strecker, Mylius, Tappeiner, Hüfner, ecc.), si fondano tutti su la scissione degli acidi biliari (acido glico- e tauro-colico)

(1) " Ber. „, Bd. XIX, s. 369 e s. 2000, 1886.

mercè l'ebollizione con alcali caustici. Dalla soluzione alcalina, che così si ottiene, dopo separazione dell'omologo acido coleico e degli acidi grassi come sali insolubili di bario, l'acido colico viene precipitato per acidificazione della soluzione, e purificato per lo più mediante ripetute cristallizzazioni dall'alcol. Questa purificazione riesce più o meno pronta ed agevole a seconda che la saponificazione degli acidi biliari fu più o meno perfetta ed a seconda della quantità di impurezze, specie di materie coloranti, che l'acido colico ha somma tendenza a trascinare con sè dalle soluzioni.

Nella preparazione dell'acido colico dalla bile di bove, io non ho seguito esclusivamente l'uno o l'altro dei metodi descritti, ma mi sono valso, a volta a volta, dei procedimenti che la pratica mi andava dimostrando più appropriati alle singole operazioni.

Al trattamento diretto della bile di bove con alcali caustici, che, pure abbreviando il tempo necessario alla saponificazione degli acidi biliari, dà un prodotto greggio inquinato da troppe impurità, ho preferito operare sull'estratto alcolico della bile stessa. A tal fine la bile, mescolata a sabbia lavata ed a carbone animale, veniva evaporata a secchezza, ed il residuo, polverato grossolanamente, veniva esaurito con alcol a 95° all'ebollizione; la soluzione alcolica, ancora colorata in giallo-bruno, veniva evaporata, ed il residuo sottoposto all'ebollizione con alcali caustici. In questa seconda operazione ho dato la preferenza alla barite, perchè, sebbene essa richieda una ebollizione più prolungata che non la potassa o la soda caustica, il prodotto che si ottiene riesce più puro e più agevolmente cristallizzabile: la soluzione baritica di acido colico così ottenuta viene filtrata e liberata dall'eccesso di barite mediante corrente di CO^2, a caldo, indi resa acida con lieve eccesso di HCl, con che precipita l'acido colico in masse da prima amorfe e pastose, che poi divengono friabili e cristalline. L'acido greggio, lavato accuratamente con acqua e seccato all'aria, è colorato più o meno in giallognolo, e può essere direttamente purificato mediante cristallizzazione dall'alcol concentrato.

In questa operazione è da aversi molta attenzione alla facile formazione di etere dell'acido colico, il che ostacola assai la separazione dei cristalli; la presenza di tracce di HCl agevola

assai l'eterificazione con l'alcol etilico. Ho pure, con vantaggio, usato di purificare l'acido greggio col trasformarlo in sale di bario, che può ottenersi dalle soluzioni concentrate in begli aghi cristallini bianchi, e poscia col mettere da questo in libertà l'acido colico per mezzo dell'acido cloridrico.

Ma, sia l'uno o l'altro il mezzo impiegato, per ottenere un prodotto *puro*, occorre ripetere le cristallizzazioni dall'alcol concentrato finchè l'acido colico si presenti in bei cristalli tetraedrici od ottaedrici, incolori, aventi i caratteri stabiliti esattamente da Strecker e da Mylius, cioè il punto di fusione a 197° e una molecola di alcool di cristallizzazione, che perdono a 110°-115°.

Nel determinare i caratteri di purezza dell'acido colico da me preparato ho avuto occasione di ripetere alcune osservazioni, che possono essere qui riferite a conferma di quelle antecedenti, e di farne altre, che, se non di capitale importanza, pure possono chiarire alcuni punti relativi alle proprietà generali di questa sostanza.

L'acido colico preparato e cristallizzato dall'alcol presentava appunto il p. f. 197° e dava la seguente perdita di peso per riscaldamento a 110°:

Gr. 1,2214 di sostanza perdettero a 110° gr. 0,1292, da cui

trovato	calcolato per $C^{24}H^{40}O^5 + C^2H^6O$
10.5	10.13

L'analisi elementare dell'acido seccato a 110° diede pure valori ottimi:

I. Gr. 0,2424 di sostanza diedero gr. 0,6251 CO^2 e 0,2128 H^2O
II. „ 0,1882 „ „ „ 0,4867 CO^2 e 0,1676 H^2O

	trovato		calcolato per $C^{24}H^{40}O^5$
	I	II	
C %	70.3	70.5	70.7
H „	9.8	9.9	9.8

Riconoscimento dell'alcool di cristallizzazione. — Mylius, correggendo le deduzioni errate di Strecker su dati analitici invero esatti, ha dimostrato che l'acido colico tetraedrico (cristallizzato dall'alcol) contiene 1 molec. di alcol di cristallizzazione, rilevandone la presenza direttamente. Disponendo di sufficiente materiale ho potuto ripetere l'osservazione di Mylius, che qui riporto brevemente.

Alcuni grammi di acido colico cristallizzato dall'alcol furono posti in una piccola storta, congiunta con un collettore raffreddato con ghiaccio; la storta venne riscaldata in bagno d'olio a 120° per due ore. Nel collettore si condensò circa 1 gr. di distillato limpido, incoloro, mobile, di grato odore alcolico caratteristico, intenso.

Per la sua quantità, il distillato non bastava ad una determinazione del punto di ebollizione, ma diede tutte le altre reazioni proprie dell'alcol: bruciava con fiamma incolora, con spugna di platino dava immediatamente arrossamento della carta di tornasole (ossidazione in acido acetico), dava la reazione del jodoformio, quella dell'etere acetico e si colorava in verde con bicromato potassico e acido solforico.

$C^{24}H^{40}O^5+H^2O$. — Lo Strecker, cristallizzando l'acido colico ancora umido dall'etere etilico, ottenne cristalli appartenenti al sistema rombico, i quali all'analisi dimostravano un diverso contenuto di acqua di cristallizzazione. Questo contenuto corrispondeva ad 1 mol. di H^2O, cioè al 4,2 % dell'acido colico così cristallizzato, che nella vecchia notazione chimica era rappresentata da due così detti atomi o equivalenti di acqua (HO).

Lo Strecker notò subito il diverso comportamento di questo acido colico tanto nel perdere quest'acqua di cristallizzazione, quanto nel punto di fusione: riscaldando i cristalli a 100° per lungo tempo, egli notò che essi perdevano per lo più solo un atomo ($^1/_2$ molecola) di acqua, e non potè precisare a quale temperatura essi perdessero il secondo atomo ($^1/_2$ mol.). Egli ebbe anzi risultati contraddittorî: così in un caso dopo *14* giorni di riscaldamento a 100° l'acido aveva perduto il 3,2 % e solo a 130° perdette fino al 4,0 %. Nell'acido colico cristallizzato dall'alcool diluito lo Strecker notò un comportamento simile: in una prova l'acido perdette a 100° il 2,4 % e successivamente a 140° il 4,8 %; al disopra di questa temperatura l'acido fon-

deva parzialmente colorandosi in giallo. Mentre adunque l'acido cristallizzato dall' alcol concentrato ($C^{24}H^{40}O^5+C^2H^6O$) perde già a 100° l'alcool di cristallizzazione e può essere riscaldato a temperature superiori senza che si alteri, fondendo solo a 197°, invece l'acido che cristallizza con 1 mol. H^2O ($C^{24}H^{40}O^5+H^2O$) perde a 100° solo una parte di questa e a 150° è già fuso.

Lo Strecker, perciò, data l'identità dei due acidi, considerava le due forme come due modificazioni di uno stesso acido, analoghe a quelle da lui osservate per l'acido glico-colico. La forma con una molecola di acqua di cristallizzazione si ha sempre quando o si cristallizzi l'acido da liquidi acquosi, come l'alcol diluito (30-50 %), l'acido acetico diluito (Mylius), ecc., o si precipiti dalle soluzioni acquose dei suoi sali mediante acido acetico o cloridrico. Quest' acqua di cristallizzazione non è perduta se non con estrema difficoltà e lentezza; anzi ho notato che l'acido fonde e ingiallisce anche sotto 150°, quando venga riscaldato troppo rapidamente al di sopra di 120°. A 115° non perde tutta l'acqua di cristallizzazione nè meno dopo 2 giorni (1).

Ed ho pure notato che il punto di fusione della sostanza varia assai a seconda che essa ha perduto più o meno di acqua, potendo esso giungere talora a 160°, sempre però, come si vede, di molto al di sotto del p. f. dell'acido perfettamente anidro (197°).

Mi sono occupato alquanto di questo punto non ancora ben definito, per vedere se l'acido con 1 mol. H^2O, qualora sia disidratato completamente e senza alterazione, presenti lo stesso punto di fusione dell' acido anidro e di quello tetraedrico (con 1 mol. C^2H^6O), il che escluderebbe qualsiasi diversità di costituzione fra le diverse forme di cristallizzazione.

Come aveva verificato lo Strecker, e come io stesso ho sempre constatato, non solo l' acido colico con 1 molecola H^2O perde quest'acqua con estrema difficoltà, ma se viene riscaldato un po' rapidamente sopra 120°, ingiallisce e fonde in una massa vetrosa, la quale non si discioglie più facilmente nè completamente nei carbonati alcalini ma soltanto negli alcali caustici all'ebollizione. Ciò dimostra un' alterazione dell' acido ed è probabile che dipenda da trasformazione parziale di questo in anidridi.

(1) Questo fatto, che ho potuto accertare, contrasta assai con le determinazioni dell'acqua di cristallizzazione date da alcuni autori. Cfr. ad es.: Bulnheim, " Zeitschr. f. physiol. Ch. „, Bd. 25, s. 296, 1898.

Il mezzo migliore per sottrarre completamente ed in tempo abbastanza breve l'acqua di cristallizzazione all'acido colico senza alterazione alcuna di questo, si è il riscaldamento nel vuoto, o, per essere più esatti, a pressione fortemente ridotta. A tale scopo mi valsi di una stufa apposita, a doppia parete, in cui la pressione interna era mantenuta al livello voluto mediante una pompa ad acqua; il riscaldamento facevasi mercè lo xilene, posto nel vano della doppia parete, e veniva graduato esattamente regolando l'ebollizione di questo liquido. La disidratazione dell'acido si compiva così perfettamente in poche ore (2-4) con una temperatura costante di 115° ed una depressione di circa cm. 60 di Hg. L'acido disidratato poteva allora venire riscaldato a temperatura superiore senza subire più alcuna alterazione, ed il suo p. f. saliva esattamente a 197°, come quello appunto dell'acido anidro e del tetraedrico.

Delle molte prove fatte, tutte concordanti, riferisco le seguenti:

I. Acido colico cristallizzato dall'etere etilico, sciogliendo direttamente l'acido precipitato dalla soluzione acquosa dei suoi sali nell'etere stesso.

Gr. 0,7010 di sostanza scaldati a 115° e alla pressione suddetta fino a peso costante, perdettero gr. 0,0308 del loro peso.

	trovato	calcolato per $C^{24}H^{40}O^5 + H^2O$
H^2O %	4.3	4.2

Riscaldata ulteriormente a 120° e 130° la sostanza non perde più di peso, e fonde nettamente a 197°.

II. Acido colico precipitato dalla soluzione acquosa di colato potassico, seccato all'aria; temperatura e pressione come sopra:

1) Gr. 0,5656 di sostanza perdettero gr. 0,0248
2) „ 0,9983 „ „ „ 0,0414

	trovato	
H^2O %	4.3	4.15

Il punto di fusione sale anche qui a 197°.

Lo stesso acido con 1 molec. H^2O può ottenersi dall'alcol diluito o dall'acido acetico diluito. Si noti che, come ha fatto

osservare Mylius, dall'alcol diluito si possono avere miscele di cristalli in parte con alcol e in parte con acqua di cristallizzazione, le quali possono trarre in errore nelle determinazioni per perdita di peso; di tali miscele parlerò più oltre. Qui voglio ricordare soltanto che si può avere il solo acido colico con 1 mol. H^2O cristallizzandolo dall'alcol a 30-40 % al massimo: allora esso si prepara in bei cristallini esagonali lamellari, costituiti da elementi rombici, come può vedersi con l'esame microscopico.

È tolto così ogni dubbio sulla identità assoluta delle varie forme di cristallizzazione dell'acido colico; l'acqua di cristallizzazione è unita alla molecola molto solidamente, forse con legami speciali, tantochè, non solo essa si stacca con grande difficoltà e lentezza, ma quando ne venga sciolta rapidamente a temperatura un po' troppo elevata, si provocano contemporaneamente alterazioni di struttura dell'acido stesso. Da ciò dipende appunto la fusione dell'acido colico non disidratato a temperatura inferiore al p. f. dell'acido anidro.

$C^{24}H^{40}O^5$ *anidro.* — Una terza forma di cristallizzazione dell'acido colico è quella *anidra*, già notata da Mylius ed assai poco studiata. Questo autore attesta infatti, che, per raffreddamento dall'acqua bollente, cristallizza l'acido colico in cristalli microscopici, che a 130° non perdono affatto di peso, che fondono nettamente a 197° e che analizzati corrispondono alla formola $C^{24}H^{40}O^5$ perfettamente.

Ho cercato di ottenere questo acido anidro nel modo indicato dal Mylius, cioè lasciando raffreddare una soluzione acquosa bollente di acido colico, ottenuto per cristallizzazione dall'alcol e seccato completamente a 120°. Ma le molte prove fatte mi hanno dimostrato, che per semplice raffreddamento della soluzione acquosa satura bollente si ottiene non tutto acido colico anidro, ma una miscela di acido anidro e di acido cristallizzato con 1 mol. di H^2O, in rapporti variabili a seconda della rapidità del raffreddamento della soluzione. Le determinazioni sulla perdita di peso dell'acido così cristallizzato, fatte col metodo descritto sopra, cioè a 115° e a pressione ridotta, dànno sempre valori inferiori al 4,2 % come si calcola per $C^{24}H^{40}O^5+H^2O$, ma tali da non potere ammettere che tutti i cristalli sieno anidri. I seguenti risultati servano di esempio:

I.	Gr. 0,2314	di sostanza	perdettero	gr. 0,0060	= 2,5 %
II.	„ 0,3286	„	„	„ 0,0096	= 2,9 %
III.	„ 0,3798	„	„	„ 0,0138	= 3,6 %

Si noti ancora che l'acido così ottenuto presenta il fenomeno della fusione parziale al di sotto di 197°, mentre il suo p. f. sale esattamente a questa temperatura dopo completa disidratazione.

L'acido perfettamente anidro non si ottiene che evaporando una soluzione acquosa satura bollente direttamente alla fiamma; con tal mezzo l'acido colico si separa lentamente in cristallini microscopici a forma di piccoli prismi esagonali piramidati, anidri e fondenti a 197°.

Le osservazioni sopra riferite sulle condizioni e sui modi diversi di cristallizzare dell'acido colico vengono a completare in certo modo quelle già fatte per primo dal Mylius, e possono servire a spiegare razionalmente molti risultati ottenuti in passato nell'analisi di acido colico diversamente ottenuto, risultati che devonsi riferire certamente a miscele di queste diverse forme di cristallizzazione dell'acido stesso.

Peso molecolare dell'acido colico. — Scarsissimi dati si hanno sul peso molecolare dell'acido colico.

Bulnheim (1) ha applicato il metodo crioscopico per tale determinazione, valendosi dell'acido acetico glaciale come solvente. Quantunque il risultato di Bulnheim corrisponda abbastanza bene alla formola di Strecker, pure bisogna osservare, che il metodo crioscopico male si presta in questo caso per la poca solubilità dell'acido colico ed il suo elevato peso molecolare, il che porta abbassamenti troppo esigui per determinazioni attendibili.

Meglio risponde il metodo ebullioscopico, ed io l'ho applicato impiegando sia l'alcol etilico sia l'acetone come solventi, ed usando l'apparecchio proposto da v. Ribber, e che ho trovato di facile ed utile impiego. Tanto con l'uno che con l'altro solvente l'acido colico si comporta normalmente, e si ottengono valori concordanti; l'acido colico puro, cristallizzato dall'alcol assoluto,

(1) Loc. cit.

veniva seccato completamente a 120° prima di essere usato alla determinazione.

I. Solvente: *acetone*. Apparecchio v. Ribber.

Sostanza gr. 0,5640 } $\Delta = 0°,165$.
Solvente „ 13,9910 }

	trovato	calcolato per $C^{24}H^{40}O^{5}$
Peso molecolare	407	408

II. Solvente: *alcol etilico*.

Sostanza gr. 1,1303 } $\Delta = 0°,195$.
Solvente „ 15,6527 }

	trovato	calcolato
Peso molecolare	425	408

Azione del bromo sull'acido colico. — Si è tentato da diversi autori di studiare l'azione degli alogeni sull'acido colico, ma con poco o niun successo.

L'azione del bromo è stata studiata da Landsteiner (1) facendo agire l'alogeno sia sull'acido colico secco sia sulla soluzione di questo in acido acetico glaciale, ma senza ottenere risultato. In verità il bromo agisce molto facilmente sull'acido colico alla temperatura ordinaria; infatti facendo agire il bromo allo stato di vapore sull'acido secco, si ha sviluppo notevole di HBr, mentre la sostanza si converte in una massa amorfa, colorata in giallo-bruno, e da cui non si riesce a separare alcun prodotto analizzabile. Similmente facendo agire il bromo sull'acido colico disciolto in solventi anidri (acido acetico glaciale, etere etilico, ecc.), si osserva una rapida decolorazione parziale della soluzione, e da questa si separa una sostanza amorfa, resinosa, colorata in giallo-bruno ed incapace a cristallizzare. Tutti i tentativi da me fatti per ottenere bromurazione dell'acido colico senza alterazione della sostanza, riescirono vani; il bromo agisce energicamente sull'acido colico, dando HBr in copia e resinifica il prodotto, probabilmente per un' azione anidrificante di quest'ultimo.

(1) " Zeitschr. f. physiol. Ch. „, Bd. 19, s. 288, 1894.

Per contro a Landsteiner riescì di ottenere facilmente il derivato bromurato dell'acido deidrocolico $C^{24}H^{33}O^5Br$, il che mostra come si debba alla presenza dei gruppi alcolici dell'acido colico tale suo comportamento col bromo.

Facendo, al contrario, agire il bromo in un mezzo acquoso sull'acido colico, si ottiene una reazione più complessa, la quale merita uno studio approfondito e che qui riferisco solo sommariamente, riservandomi di trattare particolarmente la questione in una prossima nota.

Se si tratta l'acido colico secco e finamente diviso con acqua di bromo alla temperatura ordinaria in vaso chiuso ed agitando continuamente, si nota dapprima un lieve ingiallimento della sostanza, poi una decolorazione completa sia di questa che della soluzione; nel liquido, privo di bromo, si riscontra HBr. Eseguendo l'operazione quantitativamente potei verificare che 1 mol. di acido colico è capace di reagire con ben 4 mol. di bromo; il prodotto della reazione, che va fatta assai lentamente ed aggiungendo il bromo a piccole porzioni, è bianco, e raccolto su filtro e lavato con acqua, indi seccato completamente, può essere cristallizzato dall' alcol o dall' etere, da cui si separa in piccoli cristalli prismatici incolori. Il rendimento della preparazione è più o meno abbondante a seconda che l'operazione è stata condotta con maggiore o minore diligenza. Il prodotto ottenuto è insolubile in acqua, è solubile discretamente in alcol e in etere. Esso contiene bromo e cristallizza anidro. Portato al grado voluto di purezza, esso fonde con decomposizione progressiva verso 130° dando una massa giallognola che più non cristallizza.

L'analisi del prodotto ha dato i seguenti risultati:

I. Grammi 0,1720 di sostanza diedero gr. 0,3708 CO^2 e gr. 0,1090 H^2O;

II. Grammi 0,1845 di sostanza diedero gr. 0,3942 CO^2 e gr. 0,1178 H^2O;

III. Gr. 0,1669 di sostanza diedero gr. 0,0854 Ag Br;

IV. „ 0,2200 „ „ „ 0,1136 Ag Br.

	I	II	III	IV
C %	58.7	58.1	—	—
H „	7.0	7.2	—	—
Br „	—	—	21.7	21.9

dai quali si perviene alla formula $C^{18}H^{25}BrO^{3}$, per cui si calcola:

C	%	58.5
H	„	6.8
Br	„	21.6

Questo prodotto ha carattere acido e si scioglie agevolmente nei carbonati alcalini. Tuttavia per azione prolungata di questi, e sopra tutto per opera degli alcali caustici si altera facilmente, donde una certa difficoltà ad ottenere i diversi sali. Infatti, trattata con alcali caustici, specie se concentrati, la sostanza si colora in un bel giallo cromo, che lentamente svanisce; con KOH alcolica questa reazione è evidentissima, la soluzione a poco a poco si fa incolora, mentre formasi un precipitato di KBr.

Il bromo vi è debolmente combinato.

La sostanza descritta merita, a mio parere, speciale attenzione, perchè rappresenta un nuovo derivato dall'acido colico assai più semplice dei primi e più immediati prodotti di ossidazione o di riduzione finora ottenuti; esso differisce dall'acido colico per un gruppo di 6 atomi di C, che non possono essere soltanto rappresentati dalle catene alcoliche laterali già note, ma che in parte appartengono al nucleo fondamentale di costituzione ancora sconosciuto.

L'andamento completo della reazione con l'acqua di bromo, lo studio dei prodotti secondarî dovuti a questi 6 atomi di C distaccati, le ulteriori ricerche sul composto da me ottenuto e sui suoi derivati, possono gettare luce sulla struttura dell'acido colico, ed è appunto su tale argomento che volgono ora le mie ricerche e che mi riservo di riferire.

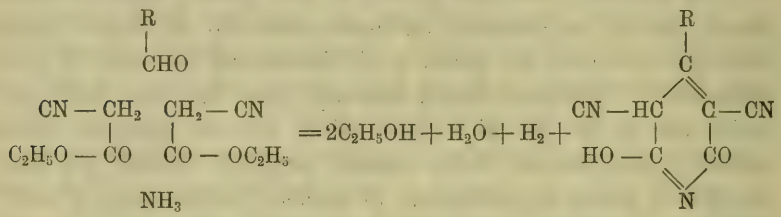
Dal Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica
della R. Università - Torino - Novembre 1902.

Condensazione dell'etere cianacetico con l'aldeide cinnamica ed il piperonalio.

Nota del Dott. GALEAZZO PICCININI.

Ho intrapreso, per consiglio del prof. Guareschi, lo studio dei derivati di condensazione dell'aldeide cinnamica e del piperonalio con l'etere cianacetico, per riscontrare se anche nel caso di aldeidi non sature o diossigenate si formino, come già è noto per tutte le altre aldeidi provate, i sali ammonici della ββ'-dicianglutaconimide sostituita.

Nella sintesi espressa dall'equazione:



accanto ai sali ammonici di queste diciandiossipiridine si hanno come prodotti secondarii le amidi di formula generale

$$R - CH_2 - CH \begin{cases} CN \\ CONH_2 \end{cases}$$

alle quali dà origine, secondo Guareschi (1), l'idrogeno che si sviluppa per la chiusura dell'anello piridico; e alcuni composti non ancora ben definiti a funzione mista di etere e di amide, che possono considerarsi come l'unione di una molecola delle amidi

$$R - CH = C \begin{cases} CN \\ CO - NH_2 \end{cases}$$

con una molecola di etere:

$$R - CH = C \begin{cases} CN \\ COOC_2H_5 \end{cases}$$

(1) I. Guareschi, *Sulle diciandiossipiridine,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIV.

In nessuna, però, delle reazioni provate si era verificato il caso che l'idrogeno si fissasse sul nucleo stesso del derivato idropiridinico.

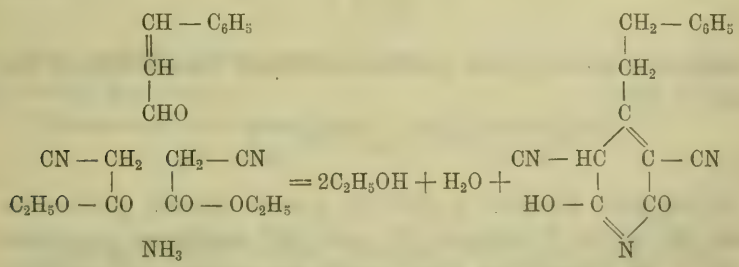
Nella reazione, da me studiata, dell'aldeide cinnamica con etere cianacetico e ammoniaca, ho ottenuto un sale ammonico, che contiene due atomi di idrogeno in più del derivato cinnamico, quale avevo pensato doversi ottenere, rispondente cioè alla formula $C^{15}H^{14}N^3O^2$ in luogo della formula $C^{15}H^{12}N^3O^2$.

Varie prove fatte con acqua di bromo, con bromo in soluzione acetica han dimostrato che questo composto non addiziona il bromo.

Con ciò resta stabilito che non esiste più legame doppio nella catena laterale cinnamica e si confermano i dati analitici, dimostrando trattarsi di una dicianglutaconimide sostituita in γ da un residuo saturo.

Avviene dunque in questa reazione una trasposizione molecolare, per la quale l'idrogeno, che si deve eliminare per la chiusura dell'anello, resta fissato nella molecola stessa, convertendo il doppio legame in semplice.

L'equazione riportata sopra resta dunque trasformata nell'altra:



Contemporaneamente ho notato che in questa reazione non si forma come prodotto secondario l'amide:

$$C_6H_5 - CH = CH - CH_2 - CH \begin{cases} CN \\ CO - NH_2 \end{cases}$$

ma soltanto una piccola quantità di etere cinnamenilcianacrilico

$$C_6H_5 - CH = CH - CH = C \begin{cases} CN \\ COOC_2H_5 \end{cases}$$

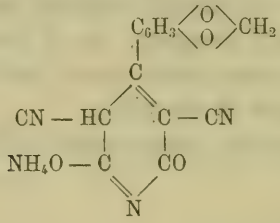
già ottenuto da Fiquet (1) eterificando l'acido cinnamenilcianacrilico.

Il meccanismo di questa reazione dunque conferma anche, indirettamente, che le amidi sature sono veramente originate dall'azione dell'idrogeno che si separa nella chiusura dell'anello.

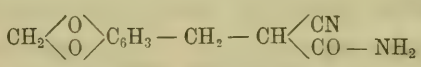
Una preparazione fatta per mezzo della cianacetamide (2 mol.), aldeide cinnamica (1 mol.) in presenza di 1 mol. di ammoniaca, mi diede lo stesso sale ammonico contenente la stessa quantità d'idrogeno, ben cristallizzato e con rendimento assai vicino al teorico.

Sarebbe interessante lo studio di altre aldeidi non sature per riscontrare se il fatto, notato per l'aldeide cinnamica, sia suscettibile di generalizzazione.

La reazione fra piperonalio etere cianacetico e NH_3 procede come in tutti i casi studiati dal prof. Guareschi; ho ottenuto il sale ammonico della γ-piperonil-dicianglutaconimide



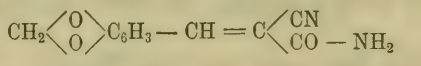
e accanto a questo come prodotti secondarii l'amide satura, fondente a 186°,



e un composto fondente a 209°, in piccoli cristalli gialli contenenti due atomi di idrogeno in meno del composto precedente e che si può considerare come l'amide non satura corrispondente.

Però questa trattata con bromo in soluzione acquosa, acetica, cloroformica, con bromo puro o esposta ai vapori di bromo dà sempre un derivato di sostituzione monobromurato fondente a 245° e non il derivato d'addizione.

Se dunque la sostanza fondente a 209° ha la costituzione indicata dalla formula:



(1) Fiquet, " Ann. de Phys. et Chim. ", serie 6ª, vol. 29°, pag. 495.

come lo dimostrano le relazioni che ha con l'amide satura, l'analogo comportamento con la barite all'ebollizione, bisogna ammettere che rispetto al bromo essa si comporti come un composto saturo.

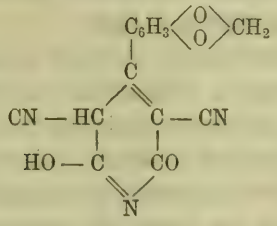
Del resto Carrick (1) ha descritto un etere fenilcianacrilico

$$C_6H_5 - CH = C\begin{cases} CN \\ COOC_2H_5 \end{cases}$$

non saturo, che non addiziona nè bromo nè idrogeno e le sue osservazioni sono confermate dal Fiquet (2).

La vicinanza dei gruppi elettronegativi CN deve avere una notevole influenza sul comportamento di queste sostanze non sature verso il bromo.

Infine decomponendo alcuni sali metallici della γ-piperonil-ββ'--dicianglutaconimide ho preparato il composto



che ha funzione acida assai spiccata e verso gli alcali energici si mostra monobasico.

Riassumerò ora brevemente i dati sperimentali.

I.

Condensazione dell'aldeide cinnamica con l'etere cianacetico in presenza di ammoniaca.

Ho fatto due preparazioni ripetendole nelle stesse condizioni. In boccia chiusa a tappo smerigliato a gr. 13,2 d'aldeide aggiungo gr. 22,6 di etere cianacetico; nella soluzione limpida verso a poco a poco cc^3 25 di NH_3 in sol. ($d = 0,900$) agitando di frequente. Il liquido si riscalda fortemente, diviene rosso e per agitazione e poi ancor più per raffreddamento lascia deporre

(1) " Journ. für prakt. Chem. „, anno 1890.

(2) Loc. cit.

cristalli di una sostanza gialliccia. Il liquido sovrastante ammoniacale è assai denso e vischioso. Lascio a sè per 24 ore, alla fine di questo tempo in fondo al recipiente noto un abbondante deposito di massa cristallina; il liquido colorato in rosso è sciropposo. Tratto con poca acqua (circa 2 vol. $^1/_2$) sbattendo fortemente. Si forma un liquido lattiginoso che tiene in sospensione una sostanza giallastra. Filtro alla pompa dopo riposo, lavando la sostanza finchè l'acqua passi incolora. La sostanza raccolta asciugata fra carta, indi all'aria pesa gr. 12. In un'altra preparazione dalle medesime quantità di aldeide ottenni gr. 16,7 di sostanza greggia. In questa avevo avuto cura di raffreddare un poco il liquido con acqua a 15° evitando così in parte la formazione di sostanze resinose.

Questo prodotto viene esaurito con etere e all'etere cede la massima parte della resina formata e un composto di cui parlerò in seguito e che chiamerò (A).

Dopo le estrazioni eteree lavo il prodotto più volte con alcool a 90 %, con questo trattamento lo si ottiene quasi incoloro e già fondente con decomposizione fra 208-210°. Ricristallizzo varie volte dall'alcool bollente (alcool a 90 %) fino ad ottenere una sostanza bianchissima pura, minutamente cristallina, in masse mamellonari e che fonde, decomponendosi, tra 215-220°; svolge a questa temperatura bollicine gassose e imbrunisce assai notevolmente.

La sostanza così ottenuta trattata a freddo con latte di magnesia sviluppa NH_3 lentamente, ma in modo assai netto. È pochissimo solubile in acqua.

Gr. 16,3275 di soluzione a 15° evaporati lentamente a b. m. lasciarono come residuo gr. 0,0058 cioè 1 p. si scioglie in 2814 p. di acqua a 15°.

A caldo si scioglie un poco più; meglio ancora se è presente dell'alcool. Nell'alcool a 90 % si scioglie bene a caldo, poco a freddo, nell'etere e cloroformio è quasi insolubile anche a caldo. Cristallizza anidra.

All'analisi la sostanza secca a 100-120° ha dato:

I. Gr. 0,1127 diedero gr. 0,2629 di CO_2 e gr. 0,0555 di H_2O.
II. Gr. 0,1153 diedero gr. 0,2712 di CO_2 e gr. 0,0566 di H_2O.
III. Gr. 0,1322 diedero cm^3 23,4 di N a 15° e 729 mm.

IV. Gr. 0,8572 fatti bollire in corrente di vapor d'acqua con latte di magnesia diedero gr. 0,6715 di cloroplatinato ammonico corrispondenti a gr. 0,0515 di NH_3.

	trovato				calcolato per	
					$C^{15}H^{14}N^4O^2$	$C^{15}H^{12}N^4O^2$
	I	II	III	IV		
C %	63.62	64.14	—	—	63.82	64.28
H „	5.47	5.45	—	—	4.96	4.28
N „	—	—	19.87	—	19.85	20.00
NH_3	—	—	—	6.00	6.03	6.02

Questi numeri sono stati calcolati per la formula del sale ammonico di una *cinnamenil* e di una *idrocinnamenil* -dicianglutaconimide.

La differenza che si riscontra solamente nell'idrogeno non può essere attribuita ad acqua di cristallizzazione, perchè il composto era stato seccato a 100-120° e non aveva accennato a perdita di peso e poi già la presenza di $^1/_2$ mol. di acqua porterebbe una così forte differenza nella percentuale del carbonio da far scartare subito questa ipotesi. Non è nemmeno ammissibile l'ipotesi che questo idrogeno sia andato a scindere uno dei doppi legami esistenti nel nucleo, perchè Δ, β-γ è resistentissimo agli agenti chimici, e se l'idrogenazione fosse avvenuta nel Δ, α'-*n* si sarebbe passati ad un composto che, oltre a contenere un doppio legame nella catena laterale del residuo cinnamico, avrebbe avuto tre funzioni distinte, chetonica, imidica e alcoolica secondaria. Questo si concilia male col carattere di forte stabilità di questo sale ammonico verso l'acido cloridrico anche fumante, col fatto ormai noto che la reazione acida delle glutaconimidi libere e la facile formazione di sali è dovuta all'ossidrile fenolico in posizione α'; infine non si concilia col fatto che la sostanza nè in soluzione acquosa nè in soluzione acetica assorbe bromo, come dovrebbe essere di un composto contenente ancora il doppio legame in una catena laterale. Restava dunque come ultima ipotesi che questo idrogeno si fosse addizionato sul doppio legame della catena laterale.

Allora ho sciolto gr. 1,1208 di sale ammonico in circa 120 cc. di acido acetico glaciale al quale ho aggiunto pochi centimetri

cubi di acqua. Poi ho trattato questa soluzione a freddo con una soluzione pure acetica di bromo (gr. 2,4648 di Br. in 21 cc.) aggiungendo cc. 5,4 di detta soluzione.

Il liquido rimane colorato in un bel giallo ranciato per qualche tempo, poi a poco a poco si scolora, dopo 3 ore la decolorazione è completa. Riduco tutto a volume di cc. 250 e sopra 100 cc. di questa soluzione doso l'acido bromidrico libero col nitrato d'argento.

Ottengo gr. 0,2966 di Ag Br.

Cioè in 250 cc. è contenuto gr. 0,3194 di HBr, da cui

	trovato
% HBr	28.49

Se un solo atomo di bromo si è sostituito nella molecola si deve sviluppare gr. 0,3222 di HBr cioè:

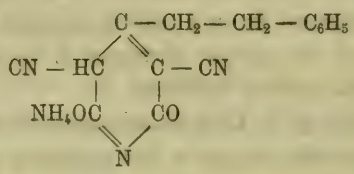
HBr % 28.72.

L'accordo completo mostra che il bromo non si è addizionato ma solo sostituito. Se si nota che l'aldeide cinnamica assorbe avidamente il bromo, si capisce come questo derivato possa considerarsi come un prodotto non contenente più il doppio legame cinnamico.

Per quanto abbia cercato di ottenere questo bromoderivato, il cui studio sarebbe stato certamente interessante, non ho potuto ottenere che una massa plastica, amorfa, resinosa, rossa, che non cristallizza da nessuno dei comuni solventi organici. L'alcool la scioglie bene, l'acqua produce nella soluzione alcoolica un liquido lattescente.

Forse la lunga evaporazione a b. m. del liquido acido che lo conteneva ha resinificato il prodotto.

Dai dati che ho qui riportati risulta chiaro che al sale ammonico fondente tra 215-220° con decomposizione è da assegnarsi la formula di un derivato idrocinnamico, cioè

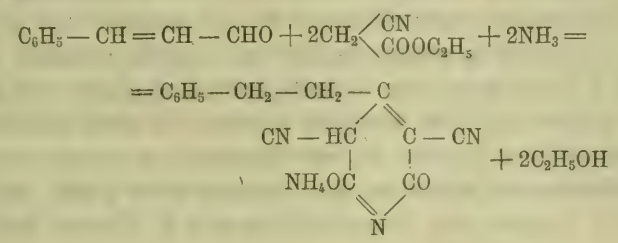


Questo sale è molto stabile all'acido cloridrico anche fumante; questo non riesce a togliergli neppure una traccia di NH_3; lo scioglie bensì e l'acqua riprecipita dalla soluzione acida il composto primitivo.

Meno stabile al calore, già a 120° comincia a svolgere NH_3, lo sviluppo si fa più notevole coll' aumentare la temperatura finchè a 215° si ha un abbondante sviluppo gassoso, mentre il sale fonde in un liquido rosso-bruno.

Data la poca solubilità di questo sale in acqua, non mi è stato possibile preparare sali ben cristallizzati e definiti.

Da tutto quel che ho fin qui detto risulta adunque che la reazione principale fra aldeide cinnamica, etere cianacetico e NH_3 è la seguente:



Gli estratti eterei, da cui venne ricuperato per distillazione l'etere, lasciano una sostanza (A) di color rossastro dall'aspetto resinoso, che si scioglie assai bene in poco alcool bollente in un liquido rosso, da cui per riposo e raffreddamento cristallizza in aghi uniti a forma raggiata una sostanza che purificata più volte per cristallizzazione fonde a 115-116°. È insolubile in acqua, solubile in acetone, alcool, etere.

All'analisi ha dato:

I. Gr. 0,1897 di sost. secca nel vuoto diedero gr. 0,5118 di CO_2 e gr. 0,1069 di H_2O.

II. Gr. 0,1070 diedero gr. 0,2896 di CO_2 e gr. 0,0562 di H_2O.

III. Gr. 0,1348 diedero cc. 7,8 di N a 17° e 743 mm.

IV. Gr. 0,2047 diedero cc. 12,2 di N a 17°,5 e 740 mm.

V. Determinazione del Peso-molecolare. (Apparecchio Riiber. Solvente acetone). Sostanza gr. 0,6427. Solvente gr. 12,6618. $\Delta = 0°,37$. Peso molecolare trovato = 229.

	trovato				calcolato per $C^{14}H^{13}NO^2$
	I	II	III	IV	
C %	73.58	73.81	—	—	74.09
H „	6.25	5.84	—	—	5.72
N „	—	—	6.58	6.61	6.17
	Peso molecolare = 229.				Peso molecolare = 227.

Questo prodotto alle proprietà ed all'analisi, è stato identificato con l'etere etilico dell'acido cinnamenil-cianacrilico, già ottenuto da Fiquet (1) facendo passare una corrente di HCl sulla soluzione alcoolica di acido cinnamenil-cianacrilico.

L'ammoniaca diluita ha una certa influenza sulla condensazione diretta tra l'aldeide cinnamica e l'etere cianacetico; infatti mentre a freddo e per sè stesse le due sostanze non si combinano, appena si aggiunga anche una piccola quantità di NH_3 diluita si forma subito una sostanza cristallina gialla; così greggia fonde a 112-113° e si dimostra identica all'etere cinnamiliden-cianfenilacrilico. L'etere da me ottenuto per quanto varie volte cristallizzato dall'alcool ha dato sempre come punto di fusione 115-116° (termometro immerso), mentre il Fiquet indica per questo composto 118-120°.

Azione della cianacetamide sull'aldeide cinnamica in presenza di ammoniaca.

Mi son servito in questa preparazione di aldeide cinnamica che avevo purificato distillandola in corrente d'idrogeno alla pressione di 20 cm. Ho mescolato intimamente 6 gr. di aldeide con 6,5 gr. di cianacetamide polverizzata finamente; ho aggiunto quindi cc. 3,5 di NH_3 liquida ($d = 0,900$) cioè circa 1 mol. per 1 di aldeide e 2 mol. di cianacetamide.

Agitando, la massa diviene fluida, quasi incolora, a poco a poco si depositano cristallini piccoli, finchè tutto il liquido si rapprende in massa cristallina.

Ho lasciato a sè per 16 ore, quindi ho trattato come precedentemente. Il prodotto secco pesava gr. 11.

Ho seguito nelle operazioni lo stesso metodo usato nelle

(1) Fiquet, loc. cit.

preparazioni precedenti, ottenendo lo stesso sale ammonico fondente verso 220° con decomposizione.

L'analisi ha dato:

I. Gr. 0,1356 di sost. secca a 100-120° diedero cc. 23,6 di N a 16° e 750 mm.

II. Gr. 0,1285 diedero gr. 0,3022 di CO_2 e gr. 0,0592 di H_2O.

	trovato I	trovato II	calcolato %
C %	—	64.14	63.82
H „	—	5.12	4.96
N „	20.05	—	19.85

Nella reazione precedente ho ottenuto dagli estratti eterei una piccola quantità di sostanza cristallina, che si è resinificata subito appena sciolta in alcool alla temperatura di 60° e che quindi non ho potuto analizzare.

Il rendimento di sale ammonico greggio, partendo dalla cianacetamide è quasi quantitativo, mentre è assai minore quando si parta dall'etere cianacetico, in causa di una certa quantità di sostanza resinosa che si forma.

II.

Azione dell'etere cianacetico sul piperonalio in presenza di ammoniaca.

Ho adoperato etere cianacetico purissimo ridistillato e bollente a 206-207°.

Come nelle preparazioni del derivato idrocinnamico pongo a reagire quantità di sostanze proporzionali ai pesi molecolari in modo che per 1 mol. di aldeide se ne trovino 2 di etere cianacetico e 3 di ammoniaca.

Gr. 15 di piperonalio sono disciolti in 22,6 gr. di etere cianacetico; aggiungo, agitando, cc. 27 di NH_3 (sol. acq. $d = 0,900$); dal liquido omogeneo gialliccio, che si forma, per agitazione si depositano dei cristalli piccoli, poi tutto il liquido si rapprende in una massa cristallina di color giallo-chiaro. La reazione è accompagnata da sviluppo di calore.

Dopo riposo (24 ore), diluisco con 2 vol. di acqua, filtro

alla pompa asciugando poi fra carta e all'aria. La massa cristallina greggia secca all'aria pesa gr. 27 circa.

Ho estratto con etere più volte la sostanza ottenuta finchè l'etere evaporato non lascia più residuo. Le estrazioni devono essere replicate molte volte per poter esser sicuri di aver tolto ogni traccia di amide.

In un' altra preparazione ho usato dell'estrattore Soxhlet, mettendovi la sostanza polverizzata e mescolata con vetro in pezzetti, ma il vantaggio non è grande ed è sempre difficile la separazione completa del sale ammonico della piperonil-dicianglutaconimide dalla miscela delle amidi e spesso, anche quando l'etere non estrae quasi più niente, rimangono traccie di amide nel prodotto, che sono assai difficili a togliersi per cristallizzazione.

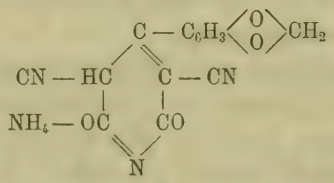
Ho trovato più vantaggioso sostituire l'etere con l'acetone; con questo solvente due o tre estrazioni sono sufficienti per togliere al sale di ammonio ogni traccia di amide e di colorazione gialla.

La sostanza bianca che lascia indisciolta, l'etere e l'acetone, si ricristallizza, dopo lavaggio con poco alcool assoluto, dall'acqua oppure dall'alcool diluito al 60 %.

In tal modo si ottengono degli aghi setacei bianchissimi, lunghi, che non fondono sotto 300°, ma imbruniscono già a 250°. Il rendimento è di gr. 18 circa di questo composto per 15 gr. di aldeide, cioè un rendimento del 53 %.

Trattata con latte di magnesia a freddo sviluppa ammoniaca; anche per riscaldamento per sè stesso dà ammoniaca.

Tutte le proprietà di questo composto hanno mostrato trattarsi del sale ammonico, della γ-piperonil-ββ′ dicianglutaconimide, avente la costituzione:



L'analisi ha dato:

I. Gr. 0,1146 di sostanza, secca nel vuoto e a 50-60°, diedero gr. 0,2361 di CO_2 e gr. 0,0345 di H_2O.

II. Gr. 0,1252 di sostanza diedero gr. 0,2584 di CO_2 e grammi 0,0406 di H_2O.

III. Gr. 0,1148 diedero cc. 18,8 di N a 14°,5 e 742 mm.

	trovato			calcolato per $C^{14}H^{10}N^4O^4$
	I	II	III	
C %	56.19	56.29	—	56.37
H „	3.34	3.60	—	3.36
N „	—	—	18.87	18.79

Questo sale è molto stabile, resiste energicamente anche al trattamento con acido cloridrico di densità 1,19. Non ugualmente resistente all'azione del calore comincia a svolgere NH_3 già a 70-80°. Stando all' aria e alla luce in parte si decompone ingiallendo; le soluzioni se mantenute vicino a 100° per qualche tempo, assumono una colorazione giallastra. Solubile in acqua a freddo, assai meglio a caldo. Solubile in alcool diluito a freddo e caldo, poco nell'alcool assoluto. L'etere e l'acetone non lo sciolgono quasi affatto. Le soluzioni acquose 1 : 500 trattate:

Con *nitrato d'argento* precipitano un sale bianco caseoso; insolubile anche a caldo.

Con *nitrato mercuroso* dànno un sale bianchissimo insolubile a caldo; lasciato all'aria e alla luce si decompone rapidamente passando al grigio e poi al nero.

Con *acetato di rame* (soluzione all'1 : 100) danno dopo riposo un sale cristallizzato verde solubile abbastanza a caldo. La soluzione acquosa di questo sale si decompone per ebollizione, dando origine a un sale più intensamente colorato.

Precipitato a caldo il sale ammonico con acetato di rame al 5 % si ottiene un sale pure verde insolubile di cui tratterò più innanzi.

Con *cloruro di bario* (soluz. al 5 %) si ha un sale cristallizzato in begli aghi lunghi incolori splendenti, assai facilmente solubili a caldo.

Con *cloruro di calcio* pure si ha un sale bianco solubile a caldo.

Con *nitrato di cobalto* si forma un sale roseo-ranciato cristallizzato in piccoli aghetti setacei solubili assai facilmente a caldo.

Con *solfato di nickel* si forma un precipitato dall'aspetto gelatinoso di color verde; si scioglie bene a caldo e per lento raffreddamento si ottiene sotto forma di aghi verdastri.

Con *solfato di magnesio* dà dopo lungo riposo dei cristalli duri prismatici assai belli. Questo sale è molto solubile in acqua.

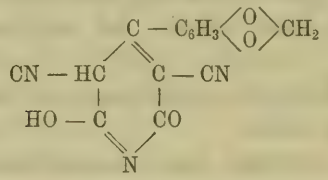
Con *cloruro ferrico* dopo qualche tempo si forma un sale colorato in rosso-bruno, solubile a caldo.

Coi *sali di piombo* pure si hanno precipitati bianchi abbondanti.

La soluzione ammoniacale di acetato di rame trattata con soluzione ammoniacale di sale ammonico lascia deporre il sale cuproammonico azzurrastro.

Prima di passare a descrivere i sali ottenuti accennerò al composto a funzione acida, che si ottiene per decomposizione di alcuni sali metallici cioè la γ-piperonil-ββ′-dicianglutaconimide.

γ-*piperonil*-ββ′-*dicianglutaconimide.*



Il composto libero a funzione acida si ottiene decomponendo il sale d'argento in sospensione nell'acqua con una corrente di idrogeno solforato a caldo, separando il solfuro d'argento e concentrando a b. m. a dolce calore. Si può ottenere più sollecitamente ancora decomponendo la soluzione calda del sale baritico con la quantità calcolata di acido solforico. Ho provato tutti e due i metodi, ottenendo sempre lo stesso prodotto bianco a funzione acida spiccata.

La sostanza secca a 130° diede all'analisi:

I. Gr. 0,2568 diedero cm³ 33 di N a 15° e 739 mm.

	trovato	calcolato per $C^{14}H^{7}N^{3}O^{4}$
N %	14.65	14.94

II. Determinazione del Peso-molecolare (App. Riiber. Solvente Acetone). Sost. gr. 0,3424. Acetone gr. 15,5214. $\Delta = 0°,13$. Peso molecolare trovato = 283,4. Calcolato 281.

Non fonde sotto i 300°, ma già verso 150° comincia a ingiallire; a 180° diviene bruno.

Cristallizza male dall'acqua e dà facilmente soluzioni sovrassature. È molto solubile in acqua a caldo, un po' meno a freddo, ma le soluzioni acquose lo lasciano deporre in cristalli microscopici prismatici, che formano all'aspetto una massa gelatinosa.

L'alcool lo scioglie bene; dalle soluzioni alcooliche si può ottenerlo cristallizzato precipitandolo con un forte eccesso di etere. L'acetone, l'acido acetico lo sciolgono bene a caldo, pochissimo a freddo.

Reagisce fortemente acido al tornasole, al metilorange e fenolftaleina.

Le soluzioni acquose alla luce e all'aria si alterano alla lunga assumendo colorazione rosea.

Ho determinato con una soluzione $\frac{N}{10}$ di NaOH la basicità di quest'acido, impiegando come indicatori la fenolftaleina e il metilorange.

Ambedue mostrano trattarsi di un acido monobasico.

I. Indicatore *fenolftaleina*. — Gr. 0,10 di sostanza sono neutralizzati da cm^3 3,5 di soluzione $\frac{N}{10}$ di NaOH e riportando ai pesi molecolari si ha: gr. 39,34 di NaOH per un peso molecolare di acido. Gr. 0,1287 di acido richiesero cc. 4,5 di detta soda: da cui gr. 39,3 di NaOH per 281 di acido.

II. Indicatore *metilorange*. — Gr. 0,1244 sono neutralizzati da cc. 4,4 di NaOH $\frac{N}{10}$: da cui per 281 di acido si richiedono gr. 39,75 di NaOH.

La media di queste determinazioni dà gr. 39,46 di soda per una molecola di acido mentre si calcolerebbe gr. 40. La combinazione quindi colle basi avviene molecola a molecola.

Il comportamento di acido monobasico, anche con un indicatore quale il metilorange, mostra che l'acido è abbastanza energico.

Le soluzioni acquose anche all' 1 : 300 precipitano i sali di argento, i sali di bario e di calcio, un poco più lentamente il nitrato di cobalto con formazione di un sale roseo tendente al color violaceo; con sali di rame e di nickel dopo qualche tempo

si hanno precipitati cristallini verdi. I sali di sodio e di ammonio precipitano con questa soluzione, quando sieno in soluzioni abbastanza concentrate.

Precipitano pure le soluzioni di alcuni alcaloidi, come il solfato di chinina neutro e di cinconina, il primo in forma gelatinosa, il secondo in polvere minutamente cristallina, formata da aghetti microscopici.

Ma notevole è l'insolubilità dei sali di potassio e di nicotina. Dalle varie prove posso concludere che una soluzione di acido 1 : 300 precipita abbondantemente il cloruro di potassio in soluzioni fino all' 1 : 800; assai bene ancora quando questo sale sia diluito fino all' 1 : 1000 (questa soluzione non è precipitata neppure dall'acido picrico). Con soluzioni di cloruro di potassio 1 : 2000 e 1 : 3000 si ottiene dapprima un intorbidamento e dopo qualche tempo (circa 2 ore) si forma una notevole quantità di aghetti incolori. Come reazione qualitativa anche in tali diluizioni servirebbe egregiamente a svelare il potassio. La precipitazione è favorita da un eccesso di acido. A caldo questo sale si scioglie prontamente e torna a depositarsi per raffreddamento in piccoli aghi incolori.

Le soluzioni di cloridrato di nicotina sono assai sensibili a questo reattivo in soluzione all' 1 : 300.

Trattando con questa, una soluzione di cloridrato di nicotina all' 1 $^0/_{00}$ si ottiene sempre un precipitato voluminoso, dall'aspetto gelatinoso, che al microscopio si mostra formato di aghi incolori.

Seguitano a precipitare prontamente le soluzioni di cloridrato all' 1 : 2000, 1 : 4000, 1 : 6000. Le soluzioni 1 : 8000 e 1 : 10000 dopo riposo dànno abbondanti fiocchetti bianchi. Si può giungere a svelare la nicotina anche in soluzione all' 1 : 16000.

Questo sale è solubilissimo in acqua a 70-80°; per raffreddamento cristallizza in aghi. Fonde verso 290° decomponendosi, già a 250° imbrunisce.

Il sale seccato a 100-120° ha dato:
Gr. 0,1183 diedero gr. 0,2741 di CO_2 e gr. 0,0447 di H_2O.

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{14}N^2.2C^{14}H^7N^3O^4$
C $^0/_0$	63.19	62.98
H „	4.19	3.86

Tre determinazioni della perdita in peso mi hanno dato risultati concordanti e tutte fanno conchiudere che questo sale cristallizzi con $^1/_2$ H_2O.

Sale d'argento. $C^{14}H^6N^3O^4Ag$. — Si ottiene bianco trattando la soluzione acquosa a 30-40° del sale ammonico con nitrato d'argento; precipitando a freddo si ottiene sotto forma di precipitato gelatinoso trasparente. È anidro. Alla luce si altera diventando un poco violaceo.

All'analisi:

I. Gr. 0,2440 di sale secco a 110-120° diedero gr. 0,0672 di Ag.
II. Gr. 0,2704 diedero gr. 0,0740 di Ag.

	trovato		calcolato per $C^{14}H^6N^3O^4Ag$
	I	II	
Ag %	27.55	27.38	27.84

Sale di bario $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ba + 4H_2O$. — Cristallizza benissimo in lunghi aghi brillanti incolori, lasciando raffreddare lentamente le soluzioni diluite di sale ammonico trattate con soluzione al 5 % di cloruro di bario. Solubilissimo a caldo. Ho dosato il bario sotto forma di solfato.

Diede all'analisi:

I. Gr. 0,5460 di sale secco all'aria, persero a 100° gr. 0,0201, a 110-115° gr. 0,0288, a 130° non perdono più di peso.
II. Gr. 0,2011 di sale anidro diedero gr. 0,0657 di $BaSO_4$ pari a gr. 0,0387 di Ba.
III. Gr. 0,5974 di sale secco all' aria scaldati a 130° persero gr. 0,0548.
IV. Gr. 4,2884 di sale secco all'aria diedero gr. 1,2812 di $BaSO_4$ pari a gr. 0,747 di Ba.

	trovato		calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ba+4H_2O$
	I	III	
H_2O %	8.95	9.17	9.34

			calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ba+4H_2O$
	II	IV	
Ba %	19.24	19.21	19.65

Sale di calcio $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ca + 5H_2O$. — A una soluzione fredda di sale ammonico aggiungo un eccesso di soluzione al 10 % di cloruro di calcio. Si deposita un sale cristallino in aghi che, ricristallizzato dall'acqua calda e seccato all'aria, ha dato i seguenti risultati:

Gr. 0,1784 di sale scaldato a 130°, indi a 150° persero in peso gr. 0,0240

	trovato	calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ca+5H_2O$
H_2O %	13.4	13.04

Gr. 0,1544 di sale anidro diedero gr. 0,0138 di CaO pari a gr. 0,00985 di Ca.

	trovato	calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Ca$
Ca %	6.38	6.66

Sale di rame $C^{14}H^6N^3O^4Cu$. — Cristallizza lentamente questo sale di un bel color verde, anidro, quando si aggiunga alla soluzione del sale ammonico a 30-40° un forte eccesso di soluzione di acetato di rame all' 1 %. È poco solubile in acqua anche a caldo; seccato all'aria non perde di peso neppure riscaldato a 150-160°.

Non ho innalzato oltre la temperatura per timore di decomposizione.

Gr. 0,1542 di sale diedero gr. 0,0366 di CuO pari a gr. 0,0292 di Cu

	trovato	calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)Cu$
Cu %	18.93	18.51

In altre condizioni, cioè precipitando verso 90° la soluzione di sale ammonico con la quantità calcolata di soluzione di acetato di rame ho ottenuto un sale insolubile verde, più scuro, che risponde alla costituzione di un sale complesso, formato dall'unione di 1 mol. di sale neutro per 2 mol. del sale basico suddetto.

Qui deve avere una influenza notevole la temperatura, la concentrazione della soluzione di acetato di rame e la quantità relativa del sale di rame presente per una stessa quantità di

sale ammonico. Di per sè stesso il fatto non è notevole perchè si hanno altri esempi di sali rameici neutri o basici a seconda delle condizioni in cui sono stati preparati. In fatto dalla ββ'-dician-γ-metilglutaconimide il dott. Quenda (1) ottenne con una soluzione di acetato di rame al 6 % il sale basico, mentre il dott. Grande (2) ottenne un sale neutro trattando la soluzione del sale ammonico corrispondente con soluzione satura di solfato di rame.

Del resto, molti di questi acidi derivati dalla glutaconimide sostituita mostrano la tendenza a combinarsi con un atomo di rame dando sali contenenti un eccesso di base, mentre poi sono monobasici rispetto alle soluzioni alcaline, ai sali d'argento e ai sali alcalino-terrosi. Questa tendenza resta ancor più accentuata se si considera il sale che si ottiene per ebollizione di questo sale complesso; si forma, come dirò più avanti, un composto contenente 3 mol. di base per 2 mol. di acido.

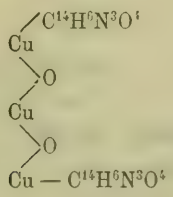
All'analisi questo sale complesso ha dato:

I. Gr. 0,2050 di sale diedero gr. 0,0375 di CuO pari a gr. 0,0299 di Cu.

II. Gr. 0,1257 diedero gr. 0,0227 di CuO pari a gr. 0,0181 di Cu.

	trovato		calcolato per $(C^{14}H^{6}N^{3}O^{4})^{2}Cu+2C^{14}H^{6}N^{3}O^{4}Cu$
	I	II	
Cu %	14.58	14.39	14.55

Questo sale bollito a lungo con acqua dà luogo a un sale basico contenente ancor più rame e che risponderebbe alla formula:



per la quale si calcola:

Cu % 26.18

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze ", vol. XXXII.
(2) Ibid.

Gr. 0,1433 di sale, secco a 150°, diedero gr. 0,0471 di CuO pari a gr. 0,0376 di Cu;

da cui trovato:

Cu % 26.23.

Sale cupro-ammonico. — Alla soluzione fortemente ammoniacale del sale ammonico aggiungo una soluzione pure ammoniacale di acetato di rame (soluzione al 5 %).

Temperatura delle soluzioni 30-40°. Lascio raffreddare lentamente; si depone un sale azzurro chiaro.

Seccato all'aria è di color azzurrognolo. Per riscaldamento a 100° passa al color verdastro; a 120° si fa color verde grigio; a 135-140° il color verde passa nettamente al grigio; a 150-160° diviene color caffè.

All'analisi:

I. Gr. 0,1749 di sale secco all'aria persero gr. 0,0103 a 100°, gr. 0,0013 a 125°, gr. 0,0016 a 140° e gr. 0,0060 a 150-160°. Totale: perdita in peso gr. 0,0192 e diedero per calcinazione gr. 0,0261 di CuO pari a gr. 0,0208 di Cu.

II. Gr. 0,2626 di sale secco all'aria, scaldati a 160°, persero gr. 0,0295 e diedero gr. 0,0387 di CuO pari a gr. 0,0310 di Cu.

III. Gr. 0,1314 persero gr. 0,0147 e diedero gr. 0,0194 di CuO pari a gr. 0,0155 di Cu.

IV. Gr. 0,1869 di sale secco all'aria decomposti, in corrente di vapor d'acqua, per ebollizione con latte di magnesia diedero gr. 0,2317 di $(NH_4)_2PtCl_6$ cioè gr. 0,0177 di NH_3.

da cui si ricava: %

	I	II	III	IV
Perdita a 150-160°	10.97	11.23	11.18	—
NH_3 totale	—	—	—	9.47
Cu (del sale secco all'aria)	11.89	11.79	11.80	—
Cu (del sale secco a 160°)	13.35	13.28	13.29	—

I dati analitici del sale cupro-ammonico descritto, come per un sale analogo ottenuto da Guareschi (1) dal sale ammonico

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze ", vol. XXXIV.

della γ-furfuril-ββ′-diciandiossipiridina, non concordano per un sale cupro-ammonico contenente il sale neutro $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Cu$ o il sale basico $C^{14}H^6N^3O^4Cu$, ma si accordano perfettamente alla formula:

$$[(C^{14}H^6N^3O^4)^2Cu + C^{14}H^6N^3O^4Cu + 6NH^3.H_2O]$$

per la quale si calcola %:

$(6NH_3 . H_2O)$	11.03 %
$6NH_3$	9.38 „
Cu	11.69 „

e per il sale secco a 160°:

$$(C^{14}H^6N^3O^4)^2Cu + C^{14}H^6N^3O^4Cu$$

Cu % 13.15.

A 100° esso perde $3NH_3 . H_2O$: infatti per $3NH_3 . H_2O$ si calcola una perdita in peso % 6,33 ed io ho trovato che gr. 0,1749 persero a 100° gr. 0,0103, cioè 5,89 %.

L'altra ammoniaca se ne va a poco a poco coll'innalzarsi della temperatura ed è contrassegnata dall'alternarsi dei colori che assume il sale passando per il verde grigio fino al color bruno.

Sale di cobalto. — Trattando una soluzione di 2 gr. di sale ammonico sciolti in 1250 cm³ di acqua, a 70-80° con soluzione di nitrato di cobalto al 10 % e lasciando raffreddare lentamente si depongono degli aghi di color roseo tendente al ranciato assai solubili in acqua a caldo.

Il sale ricristallizzato e asciutto all'aria perde una parte dell'acqua di cristallizzazione sul cloruro di calcio (1 mol.), un'altra parte (3 mol.) sull'acido solforico nel vuoto, nello stesso tempo si fa roseo tendente al violaceo; riscaldato a 100-130-150-170° perde ancora di peso diventando sempre più scuro, sino ad assumere una colorazione caffè.

All'aria e assai rapidamente riprende parte della sua acqua di cristallizzazione.

All'analisi:

I. Gr. 1,0000 di sostanza persero sul cloruro di calcio durante 24 ore gr. 0,0150, nel vuoto su H_2SO_4 gr. 0,0393 durante

96 ore; a 100° gr. 0,0464, a 150° ancora 0,0410, infine a 180° gr. 0,0093. Totale perdita in peso 0,1510.

II. Gr. 0,2342 di sale a 160-170° persero gr. 0,0354.

	trovata	
	I	II
Perdita di peso %	15.10	15.11.

Il sale anidro diede all'analisi:

I. Gr. 0,1332 diedero gr. 0,0096 di Co_3O_4 pari a gr. 0,0070 di Co.

II. Gr. 0,0816 diedero gr. 0,0059 di Co_3O_4 pari a gr. 0,0044 di Co.

	trovato	
	I	II
Co %	5.25	5.26.

Per nessuna formula di sale neutro o basico corrisponde questa percentuale di cobalto trovata; però lo sviluppo di NH_3, quando il sale è trattato con latte di magnesia a freddo, mi fece supporre trattarsi di un sale doppio di cobalto e del sale ammonico. Allora veniva pure naturale pensare che la temperatura elevata, in relazione al comportamento del sale ammonico verso il calore, dovesse eliminare ogni traccia di NH_3 insieme con l'acqua di cristallizzazione. La perdita in peso si accorda coll'eliminazione di $10H_2O + 2NH_3$ dal sale avente la costituzione:

$$[(C^{14}H^6N^3O^4)^2Co + 2C^{14}H^{10}N^4O^4 + 10H_2O]$$

per la quale si calcola:

$$(10H_2O \,.\, 2NH_3)\ \%\qquad 15.34.$$

In fondo il prodotto ch'io ottenevo dopo l'essiccamento a 170-180° non doveva contenere più ammoniaca o solamente in traccie e in fatti trattato con latte di magnesia nelle stesse condizioni non diede sviluppo di NH_3.

Quindi il sale ch'io avevo analizzato aveva la costituzione:

$$(C^{14}H^6N^3O^4)^2Co + 2C^{14}H^7N^3O^4$$

per il quale si calcola:

$$Co\ \%\qquad 4.99.$$

Questo sale acido, giacchè si può considerare come l'unione di 1 mol. di sale neutro con 2 mol. di acido, riprende soltanto parte dell'acqua di cristallizzazione primitiva, ripassando per toni di colore inversi a quelli osservati durante l'anidrificazione, senonchè si mantiene colorato in un roseo più intenso.

Ricristallizzato dall'acqua ha dato:

I. Gr. 0,5596 di sale persero sul cloruro di calcio gr. 0,0078, nel vuoto su H_2SO_4 gr. 0,0266, a 100° gr. 0,0221 a 130° gr. 0,0167. Totale gr. 0,0736.

II. Gr. 0,1552 di sale anidro diedero gr. 0,0108 di Co_3O_4.

	trovato	calcolato per $[(C^{14}H^6N^3O^4)^2Co + 2C^{14}H^7N^3O^4 + 10H_2O]$
H_2O %	13.15	13.22

		calcolato per $(C^{14}H^6N^3O^4)^2Co + 2C^{14}H^7N^3O^4$
Co %	5.11	4.99

Anche questo sale perde 1 mol. di acqua sul cloruro di calcio e parte sull'acido solforico, la rimanente si svolge innalzando la temperatura.

Nel comportamento e nella disidratazione questi due sali mostrano qualche relazione. Circa 4 molecole d'acqua nel primo, 4 $^1/_2$ nel secondo vengono eliminate sul cloruro di calcio e sull'acido solforico; ciò sta ad indicare che quest'acqua è combinata meno intimamente e in relazione è anche il fatto che il sale acido ottenuto per riscaldamento a 170° riprende soltanto 7 molecole d'acqua stando all'aria.

Infatti gr. 0,6299 di questo sale restando all'aria riacquistarono gr. 0,0612 in 7 giorni, cioè il 9,71 %; mentre per $7H_2O$ si calcola 9,64 %.

Un' altra considerazione su questi due sali: Il primo seguita a perdere in peso fino a 180° circa, il secondo a 140° non perde più di peso e questo dimostra che la presenza dell'ammoniaca nel primo rallenta in modo sensibile l'eliminazione dell'acqua; cioè quest'acqua di cristallizzazione nel sale doppio cobaltoso-ammonico pare più intimamente combinata di quello che non sia nel sale acido.

Infine, trattando la soluzione acquosa della γ-piperonil-ββ'-dicianglutaconimide con soluzione al 5 % di nitrato di cobalto si ottiene un sale colorato in roseo violaceo, il cui aspetto è

assai diverso dai due precedenti e che, probabilmente, sarà il sale neutro $(C_{14}H_6N_3O_4)^2Co$, ma non l'ho analizzato.

β-metilen-diossifenil-α-cianpropionamide. — L'etere che ha servito per estrarre il sale d'ammonio, dopo evaporazione, lascia un residuo solido abbondante colorato in giallo; secco pesa gr. 7 circa. Fonde in parte a 168-170°, in parte rimane non fuso fino a 194-195°. Evidentemente il residuo è formato da due sostanze.

L'alcool a caldo scioglie tutto il residuo con colorazione gialla, per raffreddamento si depongono cristalli bianchi setacei bellissimi frammisti a sostanza cristallina gialla.

Dall'alcool anche dopo varie cristallizzazioni ho ottenuto sempre un prodotto giallo impuro fondente a 174°.

Per separare le due sostanze tratto tutta la massa con acqua bollente ripetendo due o tre volte l'operazione; resta indisciolta una sostanza gialla; la parte solubile, bianca, dopo varie cristallizzazioni dall'acqua e poi dall'alcool è bianchissima e fonde a 186-186°,5 in un liquido incoloro.

La sostanza secca dall'analisi diede:

I. Gr. 0,1411 di sostanza diedero gr. 0,3112 di CO_2 e gr. 0,0584 di H_2O.

II. Gr. 0,1644 di sostanza diedero gr. 0,3670 di CO_2 e gr. 0,0609 di H_2O.

III. Gr. 0,1387 diedero cc. 16 di N a 17° e 743 mm.

	trovato			calc. per $CH_2\langle{}^{O}_{O}\rangle C_6H_3-CH_2-CH\langle{}^{CN}_{CONH_2}$
	I	II	III	
C %	60.15	60.89	—	60.55
H „	4.59	4.11	—	4.58
N „	—	—	13.07	12.84

La sostanza analizzata in II era ancora lievemente colorata in giallo e conteneva come impurità l'amide non satura corrispondente:

Determinazione del Peso-molecolare (App. Riiber - Solvente Acetone).

Sostanza gr. 0,5452 Acetone gr. 15,3432

Innalzamento trovato = 0°,28

Peso molec. trovato = 212 Peso molec. calcolato = 218.

Le soluzioni acquose del composto fondente a 186° reagiscono neutre alle carte di tornasole.

Quest'amide, fatta bollire in corrente di vapor d'acqua con acqua di barite, sviluppa NH_3; l'ammoniaca sviluppata, come ho potuto riscontrare in due esperienze, corrisponde a 2 molecole. Quindi la barite, oltre a idrolizzare il gruppo $CONH_2$, saponifica anche il gruppo CN, unito allo stesso atomo di carbonio. Ora sto studiando i prodotti che si ottengono decomponendo i sali baritici, dai quali spero ricavare allo stato puro l'acido malonico sostituito corrispondente.

Piperal-cianacetamide.— La sostanza cristallina gialla, estratta dall'etere e dall'acetone e separata dall'amide satura descritta per la sua poca solubilità in acqua, fu fatta cristallizzare varie volte dall'alcool a 90 %.

Allo stato di purezza fonde costantemente a 209° ed è formata da cristalli piccoli splendenti, di color giallo chiaro.

Pura e seccata nel vuoto e a 100° diede all'analisi:

I. Gr. 0,1276 di sostanza diedero cc^3 14,2 di N a 16° e 745 mm.

II. Gr. 0,1499 di sostanza diedero gr. 0,3348 di CO_2 e gr. 0,0517 di H_2O.

	trovato		calcolato per $C^{11}H^8N^2O^3$
	I	II	
C %	—	60.92	61.11
H „	—	3.83	3.70
N „	12.74	—	12.99

Raffrontando queste percentuali con quelle già date per la β-metil-diossifenil-α-cianpropionamide, si vede che esse differiscono da queste per circa l'1 % in meno di idrogeno. Questa differenza, il punto di fusione diverso e più elevato, come è quello dei composti non saturi rispetto ai corrispondenti composti saturi, fanno supporre che questa sia un' amide non satura avente la costituzione:

$$CH_2\left\langle\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\right\rangle C_6H_3-CH=C\left\langle\begin{matrix}CN\\CO-NH_2.\end{matrix}\right.$$

Per esser sicuro che realmente esistesse un doppio legame in questo composto ho tentato di prepararne il derivato d'addizione col bromo.

La sostanza però non assorbe bromo in soluzione acetica, nè in soluzione di cloroformio; neppure in soluzione acquosa, a freddo, il bromo viene addizionato; a caldo all'ebollizione sembra si addizionino, è vero, circa 2 atomi di bromo, ma il colore giallo della soluzione non permette di cogliere con precisione la fine della reazione; in fine si ottiene un prodotto di color giallo che fonde verso 235° decomponendosi e che sembra analogo al derivato, che ho ottenuto per altra via, contenente un solo atomo di bromo.

Pensai allora di tentare un altro mezzo per provare se si forma il derivato dibromurato.

Esposi la sostanza in ambiente secco all'azione dei vapori di bromo, durante due giorni. Sollevando la campana sotto la quale è la capsula, noto un abbondante sviluppo di HBr.

Gr. 1,1681 di sostanza assorbirono gr. 0,4566 di bromo, mentre per un atomo di bromo sostituito si calcola 0,429 gr.

Secco in stufa a 40-50° questo derivato per cacciare l'eccesso di bromo; ricristallizzo dall'alcool.

Ottengo così una massa setacea in cristalli minuti di un bel color giallo vivo, fondente, dopo varie cristallizzazioni a 245°: già fino da 235° comincia a imbrunire. Il dosamento del bromo in questa sostanza mi ha dato i seguenti risultati:

Gr. 0,2625 di sostanza diederò gr. 0,1702 di AgBr pari a gr. 0,0724 di Br.

	trovato	calcolato per $CH_2\langle{}^{O}_{O}\rangle C_6H_3-CBr=C\langle{}^{CN}_{CONH_2}$
Br %	27.58	27.12

Il bromo puro agisce energicamente sul composto fondente a 209°, formando una polvere cristallina gialla, che liberata dall'eccesso di bromo con ripetuti lavaggi con cloroformio, fonde a 235°, imbrunendo e decomponendosi.

Anche il bromo dunque dà origine al medesimo derivato monobromurato ottenuto per l'azione dei vapori di bromo.

Evidentemente il bromo non si addiziona, ma si sostituisce nettamente. E qui vengono naturali due ipotesi: o il composto non saturo si comporta verso il bromo come un composto saturo, e forse la vicinanza del radicale negativo CN rende im-

possibile questa addizione, o se si ha un prodotto di addizione, questo è instabilissimo e nelle condizioni da me provate non si ottiene perchè si scinde in derivato monobromurato e HBr.

Non è questo il primo caso di sostanze contenenti legami doppii, che rispetto al bromo si comportano come sostanze sature. Nel 1890 Carrick (1) aveva ottenuto un etere fenil-cianacrilico che, egli notò, non fissava nè idrogeno nè bromo.

Le osservazioni di Carrick furono più tardi confermate da Fiquet (2). Anche in questo caso si trattava di un composto avente il gruppo CN unito ad uno degli atomi di carbonio legati fra loro dal doppio legame.

Recentemente Charon e Dugoujon (3) hanno osservato che il bromo-derivato dell'aldeide cinnamica $C_6H_5 - CH = CBr - CHO$ non ostante la sua formula di composto non saturo è, rispetto al bromo, un derivato saturo.

Gli autori hanno osservato che neppure il bromo liquido, messo in contatto direttamente con la sostanza, si addiziona.

Come unica spiegazione essi suppongono che il bromo unito ad uno degli atomi di carbonio del doppio legame annulli completamente per il bromo il doppio legame stesso. Sotto questo punto di vista mi sarebbe permessa l'ipotesi che pure il derivato da me ottenuto fondente a 245°

$$CH_2\left\langle\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\right\rangle C_6H_3 - CBr = C\left\langle\begin{matrix}CN\\CO - NH_2\end{matrix}\right.$$

si comporti verso il bromo come un composto saturo.

Ne consegue allora che possiamo considerare la sostanza fondente a 209° come l'amide non satura avente la costituzione

$$CH_2\left\langle\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\right\rangle C_6H_3 - CH = C\left\langle\begin{matrix}CN\\CO - NH_2.\end{matrix}\right.$$

L'altra ipotesi di un prodotto intermedio dibromurato assai instabile, che si scinda nel monobromurato fondente a 245° e in HBr, è puramente teorica e non ha convalidazione nell'esperienza, almeno in quanto riguarda le condizioni in cui ho operato.

---

(1) Loc. cit.
(2) Loc. cit.
(3) " Compt. Rend. ", t. CXXXVI, pag. 1072 e 44.

Infine debbo notare che questa amide, bollita con acqua di barite in corrente di vapor d'acqua, svolge NH_3 anch'essa abbondantemente e sto studiando l'acido malonico sostituito che ne deve derivare per idrolisi del gruppo $CONH_2$ e saponificazione del CN.

Mi duole, causa la piccola quantità di sostanze avuta in esame e la difficoltà di ottenerne nella reazione generale, non aver potuto studiare più intimamente questo composto.

Lo studio delle due reazioni mi porta dunque alle conclusioni seguenti:

1° Non si ritrovano nella condensazione dell'aldeide cinnamica e del piperonalio i composti a funzione mista di etere e di amide, simili a quello ottenuto da Carrick (1) trattando l'etere α-cianocinnamico con ammoniaca acquosa e quelli ottenuti, per reazioni analoghe a quelle da me provate, da Guareschi (2) dall'aldeide benzoica, anisica ed altre.

2° Nella condensazione dell'aldeide cinnamica si ottiene il sale ammonico dell'idrocinnamenil-β'β-dicianglutaconimide, perchè l'idrogeno che si separa nella chiusura dell'anello va a fissarsi sul doppio legame della catena laterale cinnamica.

3° Come prodotto secondario non ho trovato l'amide

$$C_6H_5 - CH = CH - CH_2 - CH\begin{cases} CN \\ CONH_2 \end{cases}$$

come avrebbe dovuto formarsi per analogia con altre reazioni dello stesso genere, ma soltanto una lieve quantità di etere cinnamenil-cianacrilico.

4° Nella condensazione del piperonalio si ottiene un sale ammonico di una dicianglutaconimide sostituita in γ- dal residuo dell'aldeide.

5° Come prodotti secondarii in tale reazione ho osservato la β-metil-diossifenil-α-cianpropinamide, che facilmente si lascia idrolizzare e saponificare per dare origine ad acidi, su cui verte ora il mio studio; e la *piperal-cianacetamide* che ha la proprietà di non assorbire bromo, ma di dare con questo un derivato di sostituzione monobromurato.

---

(1) " Journ. für prakt. Chem. „, t. 45, pag. 500.

(2) I. Guareschi, *Sulle diciandiossipiridine*, " Atti della R. Acc. delle Scienze „, vol. XXXIV.

6° Debbo notare il comportamento del sale ammonico della γ-piperonil-ββ′-dicianglutaconimide che forma sali ben caratterizzati per doppia decomposizione, mostrandosi monobasico coi sali d'argento e colle soluzioni dei metalli alcalino-terrosi, mentre ha tendenza manifesta a dar sali contenenti due equivalenti di metallo o sali doppii o misti coi metalli a carattere elettro-positivo meno spiccato, quali il rame e il cobalto.

7° Notevole infine la poca solubilità del sale di potassio di questa dicianglutaconimide e la solubilità ancora minore del sale di nicotina, che credo potrà forse riuscire di qualche vantaggio nell'analisi di queste sostanze.

Torino, Giugno 1903. Laboratorio di Chimica farm. e tossicol. della R. Università.

Sulla anidrite micaceo-dolomitica e sulle rocce decomposte della frana del traforo del Sempione.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA
Professore di mineralogia nell'Università di Torino.

(Con una Tavola).

Fra alcuni esemplari di rocce del traforo del Sempione, datimi dalla cortesia dell'ingegnere Lanino, tutti interessanti e meritevoli di studio, esamino in questo lavoro quelli appartenenti ad un banco di anidriti e quelli della roccia decomposta costituenti la grandiosa frana interna, che fu di serio ostacolo all'avanzamento dei lavori.

L'esemplare di anidrite fu tolto nello strato incontrato fra 4644 e 4839 metri dall'imbocco di Iselle e la proprietà che presenta è di essere un'anidrite assai ricca di dolomite e di mica. La roccia con struttura granulare schistosa e senza traccia di porosità è di colore bianco, talchè si distingue ad occhio difficilmente l'anidrite dalla dolomite; mentre la mica appare evidente nei piani di schistosità.

La disposizione della dolomite nell'anidrite si può facilmente osservare, quando si riduca la roccia ad avere una superficie piana levigata e poi si sottometta tale superficie alla

azione di un carbonato alcalino. Allora l'anidrite mutandosi superficialmente in carbonato calcico, assume un colore bianco opaco e tale da differire dalla dolomite che mantiene il suo aspetto primitivo.

La fig. 1 rappresenta in grandezza naturale una sezione della roccia normale alla schistosità ed in essa la granulazione oscura indica la dolomite sparsa nell'anidrite. Dalla figura appare evidente come la dolomite si trovi diffusa nell'anidrite, sia costituendo strati di maggior concentrazione, sia in granuli isolati.

Anche la mica si presenta con analoga diffusione della dolomite, trovandosi in maggior copia dove abbonda la dolomite.

Trattando frammenti della roccia ripetutamente e alternativamente con carbonato sodico e poi con acido cloridrico diluito e a freddo, potei eliminare l'anidrite ed avere per residuo la dolomite e la mica accompagnate da piccole quantità di pirite e di quarzo.

La pirite si presenta in minutissimi cristalli ed è sovente inchiusa sia nei granuli di dolomite sia nelle lamine di mica; i cristalli raramente sono perfetti con le forme del cubo e del pentagono-dodecaedro, in generale sono deformatissimi e si presentano con superfici e striature irregolari e con l'aspetto proprio di cristalli allotriomorfi.

Il quarzo che è in minore quantità della pirite è pure in granuli cristallini in generale allotriomorfi.

La mica si presenta in minute scaglie non molto elastiche, con splendore quasi perlaceo ed è leggermente biassica. Io ne feci un saggio quantitativo col materiale lavato e scelto, ma ottenuto dal trattamento a caldo con acido cloridrico diluito del residuo avuto dalla soluzione dell'anidrite; inoltre dopo ridotto in polvere il residuo micaceo, dovetti trattarlo con acido nitrico per togliervi la pirite inchiusa nella mica. Tale procedimento per isolare la mica dalla dolomite e dalla pirite avrà forse alterato un poco la mica; ad ogni modo un saggio quantitativo di questo minerale mi diede: SiO^2 43,30; Al^2O^3 14,18; Fe^2O^3 1,49; MgO 26,66; K^2O 3,65; Na^2O 2,24; Li^2O 0,72; Fl 0,54; H^2O 5,88 = 98,66. Quindi si può ammettere che la mica sia flogopite.

Per la composizione della dolomite cercai il rapporto fra la

calce e la magnesia nella soluzione ottenuta con acido cloridrico diluito caldo, pel quale sciogliendosi con effervescenza la dolomite, rimaneva il residuo di mica, di pirite e di quarzo. Il saggio quantitativo con detta soluzione, nella quale eranvi col magnesio e col calcio anche tracce di ferro, stabilì che il rapporto fra i detti elementi corrisponde a quello di una dolomite normale leggermente ferrifera.

L'anidrite poi, che è il principale costituente della roccia, si presenta con struttura granulare e generalmente in granuli trasparenti nelle sezioni sottili. Sovente al microscopio si osservano le striature già ben descritte e discusse da F. Hammerschmidt (1) ed interpretate per geminazione polisintetica. La fig. 2 rappresenta una sezione fra i Nicol incrociati e coll'ingrandimento di 20 diametri e la fig. 3 raffigura una sezione vista a luce naturale con ingrandimento di 48 diametri, e da essa appare evidente la posizione delle linee di geminazione rispetto a quelle della sfaldatura più facile dell'anidrite.

In fatto d'inclusioni frequenti sono quelle di pirite e rare le inclusioni liquide e quelle a bolla semovente, le quali non stanno a confronto per bellezza e grandezza con quelle che si osservano abbondanti nella stupenda anidrite violacea che si trova fra 4492 e 4520 metri dall'imbocco d'Iselle e che per la sua associazione al quarzo, alla mica, all'anfibolo ed anche alla wernerite costituisce un interessantissimo studio di paragenesi, del quale farò argomento di altro lavoro; nelle lamine di sfaldatura di tale anidrite violacea potei osservare inclusioni liquide del diametro di Mm. 0,009 e non riempienti il vano e nella inclusione la bolla, con rapido movimento, del diametro di Mm. 0,002.

Convertendo l'anidrite in cloruro calcico ed esaminato questo allo spettroscopio vi si trova la presenza dello stronzio.

Gli esemplari di roccia provenienti dalla frana incontrata fra 4450 e 4492 m. dall'imbocco d'Iselle sono quattro; uno è un frammento di micaschisto ricchissimo di mica e perfettamente sano; invece negli altri tre la mancanza di coesione è tale da lasciarsi facilmente rompere e disgregare colle dita, ed a proposito di coesione debbo notare che gli esemplari tolti di recente dalla

(1) G. Tschermak's, " Min. u. pet. Mitt. „, 5 vol. N. S., pag. 251.

frana, essendo ancora umidi, erano meno coerenti di quello che fossero alcuni mesi dopo in cui si erano lentamente essiccati.

Dei tre esemplari di roccia alterata, due sono eguali e di colore biancastro; l'altro è di colore più oscuro, e tale differenza di colore è data essenzialmente dal diverso colore della mica abbondantissima nei tre esemplari.

Da uno degli esemplari più biancastri, presi dei frammenti scegliendoli fra quelli staccati dalla parte interna di esso e, senza ridurli in polvere, li trattai a freddo con acido cloridrico diluito, che sciolse con viva effervescenza una grande parte del materiale lasciando un residuo grossolano ed uno finissimo, per cui il liquido diveniva torbido, rimanendo tale anche dopo mezz'ora di quiete.

Perciò separai con successivo lavaggio e decantazione la parte finissima in sospensione nel liquido dalla parte grossolana; in questa, facendo una separazione col joduro di metilene a massima densità, ottenni come minerali più pesanti, pirite e rutilo, e nel rimanente vi era, quale minerale principale, la mica e come accidentali trovai in ordine di quantità il quarzo, granuli bianchi isotropi che facilmente si schiacciavano se compressi ed infine cristalli di tormalina sia incolora che leggerissimamente verdognola.

La mica in pagliuzze di splendore perlaceo e colore giallognolo sottoposta ad un saggio qualitativo presentava molta magnesia e l'analisi spettrale rivelava il potassio, il sodio ed il litio; inoltre portata ad alta temperatura in un tubo di vetro, dava la reazione della presenza del fluorio. È certamente una mica magnesiaca e forse flogopite.

Il quarzo è in granuli biancastri, talvolta in frammenti e raramente in cristalli idiomorfi.

I granuli friabili bianchi sono di caolino, perchè dànno acqua se riscaldati, sono infusibili ed un saggio qualitativo non indicò in essi che silice ed allumina.

La pirite si presenta raramente in cristalli perfetti e più sovente in cristalli molto deformati e con aspetto allotriomorfo; ma ciò che è importante, come si vedrà, si è che la pirite ha una perfetta lucentezza e assolutamente senza traccia di ossidazione.

La tormalina è in cristalli terminati ma più soventi in frammenti a rottura viva e senza traccia di alterazione.

Il rutilo di colore rosso oscuro è in cristalli sia regolari sia deformati con spigoli arrotondati, ma perfettamente lucenti, talchè non si può ammettere, per causa di tale aspetto, una causa meccanica, come sarebbe una fluitazione, che rende la superficie poco riflettente anche in minerali più duri del rutilo.

La formazione del rutilo deve aver preceduto quella della tormalina; perchè osservai casualmente un cristallo di tormalina con facce terminali e spigoli perfettissimi includenti in parte un cristallo di rutilo molto deformato.

Esaminai anche la parte finissima che rimaneva in sospensione nel liquido. Nel filtrare il liquido torbido si osserva che sul filtro non rimane una sostanza prettamente polverulenta, ma bensì appare mista ad una piccola quantità di sostanza gelatinosa. Posta una goccia del liquido torbido sopra un vetro, ed aggiuntovi soluzione di fucsina, si vede che la tinta non è uniforme nel liquido, ma maggiore in certi punti, i quali, visti al microscopio, appaiono come aggruppamenti di minutissimi frammenti principalmente di mica ed anche di quarzo e di tormalina, riuniti come da una sostanza colloidale nella quale il colore rosso della fucsina è più intenso. E tale colore circonda di preferenza i detriti micacei che non quelli di tormalina e quarzo.

Di tale sostanza colloidale, che d'altronde è in piccola quantità diffusa nella roccia, non potei fare un'analisi per l'impossibilità di separarla dai minuti frammenti degli altri minerali e neppure separarla con processi chimici, perchè essendo essa difficilmente attaccata dagli acidi e dagli alcali potevano, nelle separazioni per via chimica anche decomporsi in parte i minutissimi detriti dei minerali, dando un risultato analitico erroneo. Io credo tuttavia si tratti di un idrosilicato d'allumina colloidale.

L'altro esemplare di roccia della frana, avente un colore più oscuro, presenta nella sua essenziale composizione mineralogica molta analogia con quella descritta; e la differenza più notevole sta nel fatto che nella roccia oscura, sono rarità la pirite, il rutilo e la tormalina, mentre vi si trovano minuti aggregati fibrosi di anfibolo incoloro, minerale che io non osservai nella roccia biancastra. La mica poi, al saggio qualitativo, presenta gli stessi elementi di quella esistente nella roccia biancastra e soltanto si mostra più ricca in ferro. In entrambi gli esemplari trovai tracce di acido solforico, dovuto alla presenza di solfato calcico.

Esaminando poi meglio la coesione nei due esemplari, si scorge che la decomposizione non fu uniforme. In alcune parti la roccia si presenta bensì friabile, ma con struttura ancora granulare e cristallina e senza aspetto di decomposizione chimica; pare cioè che la friabilità sia dovuta soltanto ad una parziale solubilità di un minerale costituente principale. In altre parti invece il distacco si opera con maggiore facilità e sulle pareti di separazione vi ha un sottilissimo strato di una materia di colore verdognolo chiaro nell'esemplare di roccia biancastra e più verde nell'esemplare a mica oscura. Tale materia è in parte solubile con effervescenza negli acidi ed è costituita da una miscela di carbonato calcico, di caolino e di una sostanza polverulenta cloritosa che dà il colore. Inoltre pare che in tali straticelli e commisto alla sostanza verdognola, sia specialmente localizzato l'idrosilicato d'allumina colloidale; perchè la sostanza posta nell'acqua diventa glutinosa ed appiccicaticcia.

Io credo che tale idrosilicato d'allumina colloidale, che forse corrisponde alla argilla colloidale di Schloesing, quantunque si trovi in piccola quantità diffuso nel materiale della frana, sia detritico che melmoso, debba tuttavia, quando è umido, comportarsi come un lubrificante, per cui, diminuendosi l'attrito interno nella massa della frana, si aumenta l'effetto enorme della pressione, che si osserva nelle tracce di deformazione della provvisoria potente armatura in ferro posta nella galleria a difesa della frana.

Se ora dall'osservazione dei fatti si vuole entrare nel campo delle ipotesi per cercarvi la più probabile e soltanto relativa agli esemplari da me esaminati, la quale serva a spiegare la decomposizione della roccia, bisogna anzitutto stabilire quale fosse la roccia sana.

La quantità di carbonato che contiene ancora la roccia è rilevante; da un saggio quantitativo, fatto su 37 grammi di sostanza della roccia biancastra, trovai che la parte disciolta con effervescenza a freddo dall' acido cloridrico diluito era di 68,30 $^0/_0$. Ora tale quantità non lascia dubbio, a mio avviso, che la roccia fosse un calcare micaceo e cristallino, perchè si osserva ancora nella roccia la calcite cristallizzata. D'altronde non si potrebbe immaginare altra roccia composta cristallina la quale supponendola anche tutta alterata per mezzo dell'acido carbonico, potrebbe dare tale abbondanza di calcite. E la piccola

quantità di residui di caolino e di idrosilicato d'allumina colloidale, non permetterebbe di supporre fosse una roccia feldispatica, come il gneiss decomposto, costituente l'interna frana della galleria del Gottardo (1); neppure se fosse costituita da anortite, feldispato d'altronde che non costituisce roccia conosciuta avente per secondo costituente principale la mica; d'altronde la caolinizzazione è un processo comune non soltanto dei feldispati, ma di altri silicati contenenti allumina.

Ammessa la preesistenza di un calcare cristallino micaceo, osserviamo le possibili cause di alterazione.

Anzitutto conviene supporre che vi fosse una causa predisponente per spiegare anche l'estensione della frana interna. Essa è costituita da massi grandi e piccoli con melma, ossia presenta un aspetto brecciforme, talchè si può ritenere, quale causa predisponente, l'esistenza di una litoclasi riempita da detriti i cui meati agevolarono l'introduzione delle acque ricche di agenti solventi e decomponenti.

Passando ora all'ipotesi di una causa diretta di alterazioni della roccia, si presenta anzitutto quella dell'ossidazione della pirite, trattandosi di un calcare micaceo contenente tale solfuro.

A tale scopo cercai la quantità di pirite esistente nella roccia alterata biancastra; nel residuo avuto dall'azione dell'acido sopra i 37 grammi di roccia, potei separare col joduro di metilene, la pirite ed il rutilo; e trattando quindi la miscela dei detti minerali con acido nitrico, ottenni, per differenza di peso, che la pirite vi si trovava nella roccia nella proporzione di 1,35 %, e si noti che fu trascurata la piccola parte di pirite, la quale, essendo inchiusa nella mica, non potei separare col joduro di metilene.

Ora la presenza di tale quantità di pirite sarebbe importante quando la si volesse considerare come un residuo di quella che fosse entrata nel processo di decomposizione ed esportazione di una parte del calcare.

Ma il supporre pel nostro caso che i frammenti di roccia, provenienti dal punto d'incontro della galleria colla frana, ossia all'incirca 1250 metri di profondità dalla superficie, fossero decomposti per la presenza della pirite, trova ostacolo nel fatto, che

(1) " Boll. R. Com. geologico ", 1880, pag. 422.

tale minerale è, come sopra fu prenotato, perfettamente inalterato, nè si osserva nei frammenti di roccia esaminati, traccia di quel colore rossastro o giallastro, sia diffuso, sia a plaghe, che dovrebbe accennare la presenza o di ossidi di ferro o di carbonato di ferro alterato.

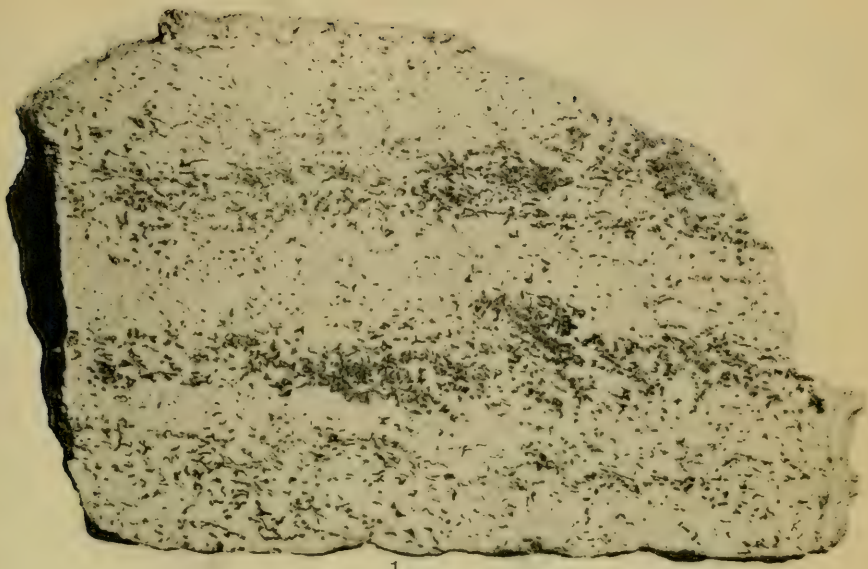
Per tali considerazioni, io credo più probabile l'ipotesi, che la decomposizione della roccia in profondità, ossia vicino al livello della galleria, sia avvenuta per l'azione di acque ricche di acido carbonico, il quale avrebbe sciolto parte del carbonato di calcio del calcare micaceo togliendogli la coesione, ed in pari tempo, avrebbe agito come decomponente, sia sopra alcuni silicati alluminosi accidentali che potevano esistere nella roccia, sia sopra il silicato alluminoso principale costituente la roccia, ossia la mica magnesiaca, dando luogo al residuo caolinico e cloritoso ed all'idrosilicato d'allumina colloidale.

La provenienza poi di dette acque carboniche può supporsi in due modi: od esse si sono formate nella stessa litoclasi, contenente i detriti di calcari cristallini piritiferi, ma ad un livello superiore a quello della galleria, ossia a quella profondità dalla superficie, dove potevano giungere le cause di ossidazione della pirite, e discendendo abbiano prodotto la soluzione e l'alterazione delle rocce a maggior profondità; ovvero si siano infiltrate nella litoclasi, a riempimento detritico, delle acque carboniche circolanti nell'interno della regione montuosa e della cui esistenza può essere prova l'acqua minerale dell'Alpe di Veglia assai ricca di acido carbonico libero.

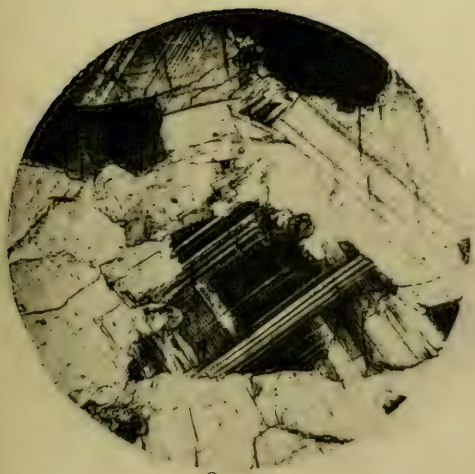
Un'altra ipotesi si potrebbe dedurre dalla presenza soprariferita di traccie di solfato calcico, supponendo che i detriti di roccia, costituenti la frana, fossero di un calcare micaceo con anidrite diffusa in modo che scomparendo questa per la sola azione solvente di acque comuni venisse tolta la coesione della roccia.

Ma con tale ipotesi riesce più difficile lo spiegare la presenza di prodotti di alterazione di silicati, alterazione più facile a comprendersi col concorso dell'acido carbonico. D'altronde la presenza del solfato calcico si connette di natura colla prima ipotesi, essendo tale composto chimico il predominante nelle acque ricche d'acido carbonico libero proveniente dall'ossidazione delle piriti in contatto coi calcari, e nella composizione della stessa acqua di Veglia, citata in esempio, prevale il solfato calcico.

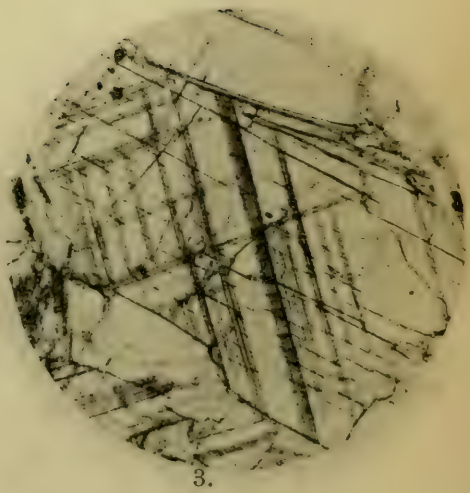
Atti R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. 38



1.



2.



3.

Ricerche petrografiche sulle valli del Gesso (Valle della Meris e Rocca Val Miana).

Nota del Dott. ALESSANDRO ROCCATI.

In una precedente nota iniziai uno studio petrografico sulle valli del Gesso (Alpi Marittime) descrivendo le roccie della Valle del Sabbione (1); colla presente nota continuo questo studio esponendo il risultato delle mie ricerche nella Valle della Meris ed alla Rocca Val Miana o Mena.

La Valle della Meris, percorsa dal torrente omonimo affluente del Gesso della Valletta, incomincia presso Sant'Anna di Valdieri e risale ai due laghi Sottano e Soprano della Sella, al di sopra del quale termina limitata da un lato dalla Rocca del Matto e dall'altro dalla Rocca Val Miana (m. 2990). Dalla Rocca Val Miana poi per una parete ripidissima si discende al piano del Vallasco.

La Valle della Meris è scavata essenzialmente nei gneiss che costituiscono pure i due massicci della Miana e del Matto. Tali gneiss, tranne alcuni tipi accidentali che indicherò in appresso, sono simili a quelli che già descrissi nella nota precedente, soltanto in questa località è caratteristica l'abbondanza di rocce verdi che si trovano intercalate fra i gneiss specialmente verso la sommità della Rocca della Miana e nella parete che scende al Vallasco. Ritengo però che le rocce verdi, come potei verificare in alcuni punti, affiorano anche sul versante di Sant'Anna; certo è che incominciano ad incontrarsi oltre il Lago Soprano salendo alla cima della Rocca della Miana.

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle del Sabbione)*, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1903, vol. XXXVIII. — Noto qui a maggior chiarezza che col nome di Val del Sabbione non indicai soltanto la Valle del Sabbione propriamente detta, ma anche il suo prolungamento verso Entraque nel Vallone del Bousset.

Gneiss. — S'incontrano nella località i due tipi di gneiss, a biotite e ad orneblenda, già descritti nella Valle del Sabbione; è però in prevalenza il gneiss a biotite.

Senza entrare nella descrizione particolareggiata di questi gneiss, mi limiterò qui ad accennare ad alcune varietà caratteristiche che si incontrano come accidentalità nella massa gneissica e sono: *gneiss ghiandone, gneiss cloritico* e particolarmente *gneiss ad enstatite* e *gneiss labradorico ad iperstene.*

Una varietà di *gneiss a biotite* interessante per la sua regolare struttura s'incontra poco sotto al lago Sottano della Sella. Esso è eminentemente schistoso essendo formato da straterelli bianchi di circa 1 cm. di spessore e costituiti da *quarzo, ortosio* ed abbondante *plagioclasio*, che all'opposto degli altri componenti ha contorno cristallino ben distinto; è in individui di maggiori dimensioni degli altri componenti e per lo più profondamente alterato.

Gli straterelli bianchi sono limitati da letti sottilissimi di *biotite*, il quale minerale manca si può dire del tutto nel rimanente della roccia. La *biotite* è in lamine distinte di color nero a riflessi rossastri e lucentezza metallica; ha pleocroismo fortissimo giallo bruno, bruno rosso, bruno scurissimo.

La roccia contiene abbondanti inclusioni di *apatite.*

Il *gneiss ghiandone* ha pure struttura eminentemente schistosa con regolare disposizione dei componenti: *quarzo, ortosio, microclino*, *biotite* ed *apatite.* Disseminati fra i piani di schistosità ed allungati secondo essi si hanno grossi individui a mandorla di ortosio bianco latteo.

Questo gneiss proviene dal lago Sottano; noto qui come esso è molto abbondante anche in altri punti del massiccio e specialmente nel gruppo dell'Argentera salendo dal vallone delle Rovine al colle Chiapous e da questo scendendo alle Terme di Valdieri.

I caratteri dei componenti sono i soliti, solo rilevo come la biotite è qui di color verde scuro con lucentezza submetallica e l'ortosio non è mai geminato e presenta caratteristica estinzione ondulata.

Il *gneiss cloritico* proviene pure dal lago Sottano; ha struttura schistosa poco evidente dando quasi passaggio ad un gneiss granitico. Nella massa spiccano numerose macchiette rossiccie dovute a granuli di *menaccanite* parzialmente alterati.

Manca la biotite che è sostituita da minute lamine incolore di *muscovite* e da abbondante *clorite* in lamelle di color verde scuro con evidente pleocroismo.

Fra i componenti è notevole la presenza di *rutilo* in grani indistinti accentrati presso la menaccanite; esso ha color giallo rossastro con leggero dicroismo.

Sparse irregolarmente nella roccia si hanno zone a tinta più scura nelle quali, diminuendo fin quasi a scomparire la clorite, abbonda invece la *biotite.*

Un curioso *gneiss cloritico,* che potrei indicare col nome di *gneiss azzurro,* s'incontra in prossimità del lago Soprano, alle falde della Rocca del Matto.

Ha colore azzurro chiaro in cui spiccano granuli di quarzo incoloro ed è percorso da abbondanti filoncini di clorite verde erba chiaro. La struttura schistosa è abbastanza evidente.

Tagliando lamine sottili, quando la roccia incomincia a diventare trasparente si presenta di color violaceo chiaro; in lamine sottilissime scompare ogni colorazione sia azzurra che violetta.

Al microscopio la roccia si rivela come un gneiss a clorite con poca biotite; *ortosio* e *quarzo* sono in granuli perfettamente limpidi ed incolori, il *plagioclasio* invece molto abbondante si presenta tutto gremito da una sostanza granulare, torbida, semiopaca, che mi pare esser quella che dà il colore alla roccia. Laddove tale sostanza è in minor quantità il plagioclasio lascia vedere distintamente le linee di geminazione le quali del rimanente sono appena visibili, talora mascherate del tutto.

Sparsa nella massa havvi una varietà di *clorite* che si ritrova poi molto abbondante nelle rocce verdi della località. È in lamine di color verde chiaro con forte pleocroismo dal verde cupo al quasi incoloro; ha estinzione retta e colori d'interferenza azzurri. Meno abbondante ed in lamine più piccole è la *biotite,* bruna, con i soliti caratteri.

Interessanti sono i rapporti della clorite con la biotite, poichè si hanno aggregati di lamine dei due minerali ed in taluni casi lamine che risultano formate in parte da clorite e in parte da biotite con passaggio graduato o distacco netto. Mi pare logico ammettere una formazione contemporanea dei due minerali e non provenienza per alterazione dell'uno dall'altro, poichè i due

minerali sono ben limpidi e nella roccia s'incontrano anche distinti e ben conservati.

Non rare sono inclusioni di *magnetite* granulare e di *ematite* in laminette rosse; entrambi i minerali sono per lo più circondati di un orlo di *limonite*.

La *clorite* dei filoncini è diversa da quella della massa; è in lamine esili quadrangolari od esagonali con color verde più chiaro e pleocroismo meno sensibile; dette lamine sono frequentemente riunite con struttura vermiculare.

Questa clorite forma anche strati intercalati nella roccia con potenza di parecchi centimetri ed allora è associata a granuli di *quarzo* e di *ortosio*. Notevoli sono in essa abbondanti geodi di quarzo, i cui cristalli allungati per anormale sviluppo delle faccie terminali assumono una forma a scalpello caratteristica.

Interessanti e certamente non comuni sono due tipi di gneiss, l'uno ad enstatite, l'altro labradorico ad iperstene.

Il *gneiss ad enstatite* fu raccolto scendendo dalla Rocca della Miana al Vallasco; esso ha struttura finamente granulare e la schistosità ne è poco evidente. Ha color bianco grigiastro in cui spiccano laminette verdi scure di clorite.

Componenti della roccia sono *quarzo*, *ortosio*, *plagioclasio*, *clorite*, *enstatite*, rare laminette di *muscovite*, e poca *apatite*.

I caratteri dei componenti sono i soliti; tali componenti hanno abito granulare e sono abbastanza ben conservati, all'opposto del plagioclasio la cui inoltrata caolinizzazione non mi permise una precisa determinazione.

L'*enstatite*, poco abbondante, è in lamine allungate; è incolora e presenta le caratteristiche strie con estinzione retta ed alti colori di polarizzazione.

Il *gneiss labradorico ad iperstene* si incontra con qualche frequenza intercalato nel gneiss a biotite salendo dal lago Sottano al lago Soprano della Sella.

Ha color bianco e nella massa sta disseminata della *biotite* di color nero con riflessi rossastri e lucentezza perlaceo-metallica; quest'elemento è molto disugualmente distribuito essendo in alcuni punti abbondantissimo mentre poi va diminuendo fino a mancare del tutto in certe zone. In taluni punti la roccia assume struttura macrocristallina ed allora ad occhio nudo si

scorgono grandi granuli di *quarzo*, altri bianchi lattiginosi di *ortosio* e cristalli voluminosi ed abbastanza compiuti di plagioclasio; rilevante è poi lo sviluppo delle lamine di biotite, alcune delle quali raggiungono fin 3 e 4 cm. di lunghezza.

Nella massa della roccia è caratteristica l'abbondanza del *plagioclasio* e la presenza di *iperstene* e di *enstatite*.

Il *plagioclasio*, contrariamente a quanto osservai negli altri tipi di gneiss, è ben conservato e nettissime sono le linee di geminazione secondo la legge dell' albite a cui non raramente si aggiunge quella del periclino ed eccezionalmente quella di Karlsbad.

Se non tutto, in gran parte tale plagioclasio va riferito a *labradorite* come dimostra l'angolo di estinzione misurato = 14° a 19° sulle linee di geminazione secondo la legge dell'albite ed il comportamento chimico. È infatti completamente decomposto dall'acido cloridrico a caldo e presenta notevole abbondanza di calce.

L'*iperstene* è in lamine associate per lo più alla biotite. I contorni non sono ben distinti, essendo i margini come sfrangiati; è però limpido, di color bruno con fortissimo pleocroismo rosso violetto, bruno giallo, giallo verdognolo molto chiaro: distinte sono le finissime strie parallele caratteristiche.

Disseminata fra il plagioclasio havvi rara *enstatite* in sezioni irregolari, incolore, con le caratteristiche striature, alti colori d'interferenza.

Il *quarzo* e l'*ortosio* che completano la composizione della roccia hanno i caratteri ordinari; l'ortosio, non geminato, presenta estinzione ondulata.

Nella roccia non sono rare inclusioni minute di *apatite*.

I due tipi di gneiss sopra descritti presentano qualche analogia con alcune varietà di gneiss a pirosseno descritti dal Lacroix (1).

Come appendice al gneiss sono da menzionare numerose stratificazioni che s'incontrano in varî punti sparse nelle rocce della località e che hanno composizione molto varia.

---

(1) *Contributions à l'étude des gneiss à pyroxène et des roches à wernérite* " Bull. Soc. Franç. de Minéralogie „ (1899), Tome XII.

Microclino. Forma straterelli della potenza di parecchi centimetri e s'incontra scendendo al Vallasco. Ha color bianco latteo e lucentezza porcellanacea.

Al microscopio la massa risulta formata da un aggregato di plaghe del minerale ben conservato ed in cui sono nettamente visibili le caratteristiche striature reticolate.

Frequenti sono le traccie di azioni meccaniche subite dalla roccia e rappresentate da pieghettature ed incurvature delle strie di geminazione; si hanno pure frequenti traccie di rottura con spostamento dei frammenti.

Nella massa si hanno rare inclusioni granulari di quarzo; lungo le fessure poi si formò in qualche punto un minerale in prismi incolori che per il forte rilievo, l'estinzione retta ed i colori azzurri d'interferenza credo poter riferire a *zoisite.*

Quarzite. Roccia compatta di color bianco latteo che forma fra il gneiss intercalazioni potenti fin $^1/_2$ metro e più. La raccolsi scendendo verso il Vallasco ma faccio notare esser essa diffusa in tutta la zona gneissica dell'Argentera; fra altre località la incontrai presso il Colle delle Finestre.

Al microscopio si presenta come un intreccio di granuli riuniti senza cemento e che hanno caratteristica estinzione ondulata.

Notai qualche rara inclusione di *zircone.*

Clorite interstratificata fra il gneiss in masse costituite da minute lamelle di color azzurro cupo con *quarzo* e cristalli cubici di *pirite.*

Plagioclasio e *Pirosseno.* Quest'associazione, in cui prevale il plagioclasio, forma straterelli, in relazione con altri di orneblenda e ortosio, che s'incontrano salendo dal lago Sottano al Soprano.

Il plagioclasio è comunemente in via di caolinizzazione e solo in alcuni punti sono ben distinte le linee di geminazione secondo la legge dell'albite sulle quali misurai l'angolo di estinzione oscillante fra 4° e 7°. Non raramente in seguito ad azioni meccaniche le dette linee di geminazione sono incurvate o variamente piegate.

Il *pirosseno* forma liste a contorno abbastanza netto; è incoloro con evidenti le linee di sfaldatura su cui misurai l'angolo di estinzione di circa 40°; ha forte dispersione ed alti colori di polarizzazione.

Nella massa si hanno granuli di *apatite* ed inclusioni prismatiche di *zircone*; laddove poi quest'associazione di plagioclasio e pirosseno dà passaggio all'altra sotto descritta si notano granuli di *ortosio* e di *zoisite*.

Orneblenda ed *ortosio*. Quest'associazione è in relazione con la precedente a cui fa passaggio graduato.

L'*orneblenda* è in lunghi individui fibrosi a terminazioni abbastanza nette, lunghi fin 2 cm. Trattasi di orneblenda tipica, sempre però associata alla varietà azzurra che ebbi già occasione di indicare come comune nella valle del Sabbione (1); cioè ogni individuo risulta diviso in zone a colori ben distinti e netta separazione. Notai anche la varietà di anfibolo incoloro pure menzionata nel precedente lavoro; forma questo piccole plaghe interne o striscie nettamente distinte.

Frammezzo all'anfibolo sta l'*ortosio* granulare, non geminato con estinzione ondulata; in qualche punto havvi pure *zoisite* e abbondante *apatite* in forma di granuli sferoidali od ovoidali.

Rocce verdi. — Come dissi in principio della presente nota, è caratteristica specialmente nella parete che scende dalla Rocca della Miana al Vallasco la presenza di numerose rocce verdi intercalate fra i gneiss. Esse si possono ridurre a tre tipi: anfiboliti, granatiti e pirosseniti. Le anfiboliti sono però prevalenti ed in nessuna delle rocce esaminate manca l'orneblenda.

Anfiboliti. Sono roccie costituite essenzialmente da *orneblenda*, a cui si aggiungono *clorite*, *ortosio*, *plagioclasio*, *pirosseno*, *calcite*, *apatite*, *sfeno*, *rutilo*, *magnetite* ed *ilmenite*.

Generalmente l'*orneblenda* è in individui prismatici allungati a contorno più o meno distinto, che formano un intreccio fra le cui maglie sono contenuti gli altri componenti. Dà sezioni che a seconda del taglio della roccia sono allungate, fibrose con terminazioni di rado definite, oppure rombiche, queste ben nette, in cui si ha l'incrociarsi caratteristico delle linee di sfaldatura. Rari sono gli individui geminati. Ha color verde scuro, pleocroismo molto forte verde scuro, verde bruno, bruno ed angolo di estinzione $= 19°$. Associata a quest'orneblenda s'incontra la varietà azzurra ed in qualche punto compare anche l'anfibolo

(1) Lavoro citato.

incoloro che fu da me riferito ad *edenite* (1). I rapporti fra i tre anfiboli sono quelli che già ebbi occasione di accennare per la diorite della Valle del Sabbione; infatti si trova l'azzurro o l'incoloro a formare le terminazioni di cristalli verdi, oppure plaghe interne o zone alternate sempre con distacco ben netto, oppure anche si hanno accrescimenti paralleli fra fibre a vario colore. Notai anche qui il caso di individui divisi per metà da una fessura e presentanti ai lati di questa due colorazioni (verde chiaro, verde azzurro) ben distinte.

La *clorite* è sempre presente; trattasi della varietà accennata nel gneiss cloritico del lago Soprano della Sella. Ha struttura lamellare più o meno distinta, colore verde chiaro con pleocroismo dal verde carico al verde chiaro all'incoloro; estinzione retta e colori d'interferenza azzurri. È completamente decomposta dall'acido cloridrico a caldo.

Il *quarzo* e l'*ortosio* hanno abito granulare; così pure il *plagioclasio* che è però poco comune e sempre profondamente alterato. Nell'ortosio non sono rare inclusioni irregolari o rotondeggianti di quarzo o di plagioclasio.

In una varietà di anfibolite il feldspato forma nella massa delle piccole *amigdale* che alla superficie della roccia risaltano sulla massa scura per il loro colore chiaro. Sono esse costituite da associazione di ortosio con plagioclasio, quello sempre prevalente, a cui si aggiungono anche laminette di clorite o fibre di orneblenda. In dette *amigdale* l'ortosio in alcuni casi è minutamente fessurato, assumendo struttura a mosaico.

Non incontrai il pirosseno se non in una varietà che potrebbe considerarsi come un'*anfibolite pirossenica*.

Il pirosseno, riferibile a *diopside*, ha struttura granulare ed è interposto fra gli individui prismatici di orneblenda, col quale minerale presenta frequenti associazioni, avendosi compenetrazioni di pirosseno nell'anfibolo o fibre di questo incluse in quello. È perfettamente incoloro; evidenti sono le strie di sfaldatura secondo 100, sulle quali misurai l'angolo di estinzione = 38°-39; ha dispersione notevole ed alti colori di polarizzazione.

Malgrado l'associazione talora intima dei due minerali non mi pare razionale l'ammettere la provenienza dell'anfibolo per

(1) Lavoro citato.

trasformazione del pirosseno, ma che si debba ritenerli come di formazione contemporanea. Infatti sono entrambi limpidi e relativamente ben conservati ed avendo l' orneblenda inclusa nel pirosseno contorno abbastanza nitido.

La *calcite* è poco abbondante, tranne in una varietà che costituisce una vera *anfibolite calcifera*, ove coll'orneblenda forma la massa della roccia. È in granuli irregolari, limpidi, priva di inclusioni e nettissime sono le strie dovute alla sfaldatura ed alla geminazione; tali strie in alcuni punti in seguito ad azioni meccaniche furono contorte od incurvate; è completamente decomposta dall'acido cloridrico.

L'*apatite* è sempre presente e talora straordinariamente abbondante; ha contorno cristallino distinto presentandosi in sezioni rettangolari allungate od esagonali, oppure è in granuli sferoidali od ovoidali con dimensioni molto variabili. Oltrechè sparsa nella massa costituisce frequenti inclusioni nei componenti, specialmente nell'orneblenda.

Molto meno abbondante è lo *sfeno* in granuli o sezioni rombiche o triangolari; i caratteri sono quelli soliti del minerale.

Abbondanti, ma disugualmente distribuiti, sono i minerali metallici: *pirite*, *magnetite*, *ematite* ed *ilmenite*.

Raro è il *rutilo* in grani o prismi di color rosso giallo con dicroismo sensibile; noto finalmente come s'incontrano nei componenti inclusioni di *zircone* che per lo più ha abito cristallino distinto, costituito da prismi allungati a terminazione indistinta od ottaedrica.

Granatiti. Le granatiti sono rare riducendosi essenzialmente a due tipi: *granatite anfibolica* e *granatite anfibolica calcifera*; potrebbero considerarsi come varietà delle anfiboliti sopra indicate con aggiunta del granato.

La *granatite anfibolica* proviene dalla sommità della Rocca Val Miana; essa però già s'incontra salendo dal lago Soprano, come anche la s'incontra pure scendendo al Vallasco.

È roccia a struttura macrocristallina, in cui già ad occhio nudo si distingue l'*orneblenda*, che dà alla massa color verde scuro sul quale risalta il *granato* abbondante, di color roseo e di forma rotondeggiante; esso è spesso alterato ed allora assume un color verdognolo chiaro o bianco sporco.

Componenti sono: *granato, orneblenda, quarzo, ortosio, clorite, attinoto, magnetite.*

Il granato è abbondante; dà sezioni rotondeggianti, talora poco distinte; il colore è roseo chiaro; gli individui sono sempre minutamente ed irregolarmente fessurati.

Per lo più ogni cristallo ha un nucleo più o meno esteso roseo od incoloro, isotropo, ove il minerale è inalterato, mentre la parte periferica si è ridotta ad una massa biancastra, granulare, semiopaca, che ha azione sulla luce polarizzata. L'alterazione in alcuni individui è completa.

Prodotti d'alterazione, oltre la sostanza granulare indicata, sono abbondanti granuli di *magnetite* e lungo le fessure una sostanza verde cloritosa; come formazione secondaria si nota dell'*attinoto* in fibre di color verde chiaro con pleocroismo verde chiaro, verde giallo, verde ed estinzione = 9° a 10°.

Frequenti sono inclusioni granulari di *quarzo* ed *apatite*, altre prismatiche di *zircone*.

L'orneblenda è sparsa fra i granati ed ha struttura fibrosa; i suoi caratteri sono quelli indicati. Noto come in questa roccia all'orneblenda tipica si associa la varietà di *orneblenda azzurra* con i fenomeni di aggregazione già menzionati nelle anfiboliti.

Non raramente poi l'orneblenda è compenetrata nel granato.

Frequenti sono le inclusioni di *magnetite* in granuli o larghe plaghe opache, di *quarzo*, di *apatite* e di *zircone*.

I caratteri degli altri componenti sono quelli già riferiti; da notarsi è l'abbondanza della solita *clorite* verde chiara, la quale frequentemente si trova inclusa nel granato.

La *granatite calcifera* ha composizione analoga a quella sopra descritta; soltanto è caratteristica la presenza di abbondante calcite granulare.

Questa varietà di granatite fu raccolta scendendo dalla Rocca Val Miana al Vallasco. Il Franchi (1) descrivendo roccie di questa località accenna a pirosseniti granatifere, ammettendo che l'orneblenda provenga da alterazione del pirosseno. Negli esemplari da me raccolti però l'orneblenda si presenta perfettamente inalterata; per cui credo sia da escludersi una tale ipotesi e la roccia debba considerarsi come una vera granatite anfibolica.

---

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93,* " Boll. R. Com. Geologico ", anno 1894, n° 3.

Pirosseniti. Di roccie ove il pirosseno sia un costituente essenziale prevalente non ebbi occasione d'incontrarne che un tipo al lago Soprano della Sella, ove è in rapporto col gneiss azzurro a clorite descritto a pag. 5. Per la composizione la roccia si può considerare come una pirossenite anfibolica.

Macroscopicamente la roccia ha color azzurro carico quasi nero, ove si scorgono cristalli fibrosi di *orneblenda* con lucentezza submetallica; nella massa poi compariscono ampie zone di color bruno caffè, nelle quali si scorgono cristalli cubici di *pirite.*

Componenti sono: *pirosseno*, *orneblenda*, *quarzo, ortosio*, *pirite*, *apatite* e *rutilo.*

L'*orneblenda* è il componente più abbondante nelle zone scure ed è in questa roccia esclusivamente la varietà a pleocroismo giallo verde, verde azzurro, che trovasi associata in piccole quantità nelle altre roccie descritte. Forma un intreccio di prismi fibrosi, talora geminati, con estinzione = 18°; i vani fra gli individui sono riempiti da *quarzo* ed *ortosio* granulare con i soliti caratteri.

Le zone di color bruno caffè sono costituite essenzialmente da *pirosseno* con abito prismatico, non mai così netto come nell' anfibolo; distinte sono le linee di sfaldatura con estinzione di 39°. È incoloro, ma inquinato da *limonite,* che appare essersi infiltrata lungo le linee di sfaldatura; si è appunto questa limonite che imparte il colore alla massa.

La limonite può provenire in parte dall'alterazione del pirosseno stesso, ma in maggior copia mi pare si debba riferire ad alterazione della *pirite* che vi è abbondante e che, come dissi, s'incontra in cristalli cubici abbastanza voluminosi.

Dove il pirosseno sembra maggiormente alterato compare l'*orneblenda* che si dispone lungo le linee di sfaldatura o forma plaghe interne irregolari. Tale orneblenda è pure qui della varietà azzurra, ma non così limpida come nel rimanente della roccia.

Sebbene l'orneblenda si possa ammettere come inclusione di formazione contemporanea al pirosseno in cui è inclusa, pure il suo modo di presentarsi potrebbe anche lasciare supporre una provenienza per uralitizzazione del pirosseno. Sarebbe questo allora l'unico caso in cui avrei incontrato il fenomeno che l'Ingegnere Franchi, nella sua descrizione del massiccio gneissico

dell'Argentera (1), indica invece come relativamente comune. Ammessa però la seconda ipotesi si tratterebbe sempre di un fenomeno molto locale, ed a ogni modo è escluso che tutto l'anfibolo provenga dalla trasformazione del pirosseno, poichè nel rimanente della roccia non si ha presenza di pirosseno e l'orneblenda non è mai notevolmente alterata.

Frammezzo al pirosseno notansi granuli di *quarzo* ed *ortosio*; quest'ultimo minerale, oltre al presentare estinzione ondulata, è talora minutamente fessurato e viene ad assumere struttura a mosaico.

Comune come inclusione o sparsa fra i componenti è l'*apatite;* meno abbondante il *rutilo* si presenta in rari granuli di color rosso o giallo rosso leggermente dicroico. Il *quarzo* finalmente riempie anche irregolari fessure esistenti nella massa.

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.
Giugno 1903.

I sistemi canonici d'equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni.

Nota del Socio GIACINTO MORERA.

È noto che la completa integrazione di un sistema involutorio di equazioni alle derivate parziali del 1° ordine, non contenenti la funzione incognita, e la completa integrazione del *sistema canonico associato* d'equazioni ai differenziali totali del primo ordine sono problemi analitici equivalenti, come lo sono nella classica teoria di Hamilton-Jacobi la ricerca di una soluzione completa d'una sola equazione a derivate parziali, risoluta rispetto ad una delle derivate, e la completa integrazione del sistema Hamiltoniano associato (*).

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93*, " Boll. R. Com. Geologico ", anno 1894, N. 3.

(*) Cfr. le mie seguenti note, inserite nei " Rendiconti del R. Istituto Lombardo ": I. *Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del I. O.* (1883; S. II, Vol. XVI, p. 637 e 691); II. *Intorno ai sistemi d'equazioni a derivate parziali del I. O. in involuzione* (1903; S. II, Vol. XXXVI, p. 775).

I sistemi canonici godono della proprietà di essere trasformati gli uni negli altri da tutte le trasformazioni di contatto operate *sulle variabili dipendenti*, quand'anche tali trasformazioni contengano le variabili indipendenti. Nel gruppo infinito delle anzidette trasformazioni di contatto è contenuto un sottogruppo, pure di infinite trasformazioni, che lasciano invariato un sistema canonico arbitrariamente scelto; sicchè vi sono infinite trasformazioni di contatto che convertono un sistema canonico proposto in un altro qualunque (*).

Comunque si proceda all'integrazione di un sistema involutorio d'equazioni alle derivate parziali del I. O., o col metodo di Jacobi propriamente detto, oppure col metodo da me proposto nel 1883 all'Istituto Lombardo, come estensione del metodo di Mayer, o metodo di Cauchy che dir si voglia, si incontra sempre il sistema associato d'equazioni ai differenziali totali. Col primo procedimento di tal sistema occorre soltanto trovare un'integrale: proseguendo oltre collo stesso procedimento si formerà un altro analogo sistema involutorio con un'equazione di più, al quale è associato un sistema canonico con due variabili dipendenti in meno ma con una indipendente in più. Col secondo procedimento invece il sistema canonico associato è da integrarsi completamente.

Colla considerazione del sistema canonico associato ad un sistema involutorio di equazioni a derivate parziali del I. O. anche il famoso *teorema di Lie* acquista la sua più generale, e contemporaneamente più semplice, interpretazione.

A parer mio la considerazione dei sistemi canonici introduce nella teoria delle equazioni a derivate parziali del I. O. una uniformità e semplicità di metodo ed un'eleganza di forma che meritano di essere notate; per ciò mi permetto di segnalare all'Accademia i risultati delle mie ricerche sui sistemi canonici di equazioni ai differenziali totali, ponendoli in relazione colla teoria dei gruppi di trasformazioni.

(*) Vi sono però anche infinite *trasformazioni non di contatto* che trasformano in sè stesso, oppure in un altro qualunque, un sistema canonico proposto. Cfr. l'ultimo § della seconda delle mie note ricordate e della presente.

§ 1. — Consideriamo le m trasformazioni infinitesime sulle $2n+m$ variabili:

$$p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots, p_n, q_n; t_1, t_2, \ldots, t_m,$$

aventi per simboli:

$$U_r f \equiv \frac{\partial f}{\partial t_r} + (f, f_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots m), \tag{1}$$

ove le f_r sono tali funzioni di tutte le variabili che verifichino identicamente le $\frac{m(m-1)}{2}$ relazioni:

$$\frac{\partial f_r}{\partial t_s} - \frac{\partial f_s}{\partial t_r} + (f_r, f_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

In queste formule il simbolo (f, g) indica la parentesi di Poisson, ossia:

$$(f, g) \equiv \sum_i \frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i, q_i)}.$$

Poichè, come si verifica subito, risulta identicamente:

$$U_r U_s f = U_s U_r f, \qquad \text{ossia:} \qquad (U_r U_s) f \equiv 0,$$

le m trasformazioni infinitesime generano un gruppo ad m parametri $z_1, \ldots z_m$, la cui più generale trasformazione infinitesima è:

$$\delta p_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial q_i} \delta z_s; \quad -\delta q_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \delta z_s; \quad \delta t_r = \delta z_r; \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; r = 1, 2, \ldots, m).$$

Se noi assumiamo per valori dei parametri corrispondenti alla trasformazione identica lo zero, avremo:

$$t_r = t_r^0 + z_r$$

e le rimanenti formule della trasformazione si otterranno integrando il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$dp_i = \sum_s \frac{\partial f_s}{\partial q_i} dt_s; \quad dq_i = -\sum_s \frac{\partial f_s}{\partial p_i} dt_s, \tag{4}$$

in guisa che per $t_r = t_r^0$ le p_i, q_i divengano rispettivamente p_i^0, q_i^0. Questo sistema di equazioni ai differenziali totali che, a cagione delle (2), *è completamente integrabile*, verrà denominato *un sistema canonico.*

Essendo:

$$(4') \qquad \begin{cases} p_i = p_i(p_1^0, \ldots, q_n^0;\ t_1, \ldots, t_m;\ t_1^0, \ldots, t_m^0)\,; \\ q_i = q_i(p_1^0, \ldots, q_n^0;\ t_1, \ldots, t_m;\ t_1^0, \ldots, t_m^0) \end{cases}$$

la soluzione generale di (4), avremo così un gruppo di trasformazioni, due a due permutabili, ad m parametri essenziali, le cui equazioni sono:

$$(5) \qquad \begin{cases} p_i = p_i(p_1^0, \ldots, q_n^0;\ t_1^0 + z_1, \ldots, t_m^0 + z_m)\,; \\ q_i = q_i(p_1^0, \ldots, q_n^0;\ t_1^0 + z_1, \ldots, t_m^0 + z_m)\,; \\ t_r = t_r^0 + z_r. \end{cases}$$

Ora si ha:

$$U_s\left\{\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r\right\} = -\sum_i \left\{\frac{\partial f_s}{\partial p_i} dp_i + q_i d\frac{\partial f_s}{\partial q_i}\right\}$$
$$- \sum_r \left\{\frac{\partial f_r}{\partial t_s} + (f_r, f_s)\right\} dt_r\,;$$

ma a cagione delle (2) si ha pure identicamente:

$$\frac{\partial f_r}{\partial t_s} + (f_r, f_s) = \frac{\partial f_s}{\partial t_r}\,,$$

e quindi:

$$(6) \qquad U_s\left\{\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r\right\} = d\left\{\sum_i q_i \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - f_s\right\}.$$

Consideriamo l'integrale:

$$I = \int\left(\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r\right),$$

esteso ad una linea rientrante qualunque nel campo delle variabili p_i, q_i, t_r; per la trasformazione infinitesima (3) essendo:

$$\delta I = \sum_s U_s I . \delta z_s ,$$

avremo:

$$\delta I = 0 .$$

Dunque I *è, relativamente alle linee chiuse, un'invariante integrale del sistema di equazioni differenziali* (4).

Si noti che: $\delta dt_r = 0$, e quindi: $dt_r = dt_r^0$.

Integrato completamente il sistema canonico ed espressi i valori finali p_i, q_i, delle variabili dipendenti, in funzione degli iniziali (arbitrari) p_i^0, q_i^0, delle t_r e dei loro valori iniziali t_r^0, sarà adunque identicamente:

$$(7) \qquad \sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r = \sum_i q_i^0 dp_i^0 - \sum_r f_r^0 dt_r + d\Omega ,$$

ove Ω indica una funzione di tutte le variabili indipendenti.

Di qui in particolare segue che *riguardate le variabili indipendenti* t *come parametri costanti, le equazioni integrali di un sistema canonico stabiliscono una trasformazione di contatto tra le variabili dipendenti ed i loro valori iniziali.*

§ 2. — Le equazioni integrali (4′) delle (4) si possono certamente risolvere alle q_i e p_i^0; sicchè è lecito nell'identità (7) considerare come variabili indipendenti le p_i, q_i^0; t_r e t_r^0. Si noti inoltre che posto:

$$V = \Omega + \sum_i p_i^0 q_i^0 ,$$

la (7) si può scrivere:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r = - \sum_i p_i^0 dq_i^0 - \sum_r f_r^0 dt_r + dV ;$$

sicchè per poter essere quest'equazione identica la V è necessariamente esprimibile nelle sole p_i, q_i^0; t_r, t_r^0, e si ha:

$$(8)\quad \begin{cases} q_i = \dfrac{\partial V}{\partial p_i}, \quad p_i^0 = \dfrac{\partial V}{\partial q_i^0}; \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t_r} + \dfrac{\partial V}{\partial t_r^0} + f_r = f_r(p_1^0, \ldots, q_n^0; t_1^0, \ldots, t_m^0) \equiv f_r^0. \end{cases}$$

Usando, come abbiamo già fatto, della caratteristica δ per indicare le variazioni infinitesime lungo le traiettorie del gruppo, abbiamo, tenute presenti le (6):

$$\delta d\Omega = \delta \left\{ \sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r \right\} = d \sum_s \left(\sum_i q_i \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - f_s \right) \delta t_s.$$

Integrando lungo la traiettoria del gruppo, che parte dal sistema di valori iniziali p_i^0, q_i^0, t_r^0, avremo quindi:

$$d\Omega = d \int \sum_s \left(\sum_i q_i \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - f_s \right) \delta t_s,$$

ove l'espressione sotto il segno integrale mercè le (4') diviene necessariamente un differenziale esatto nelle t_r, le quali variabili sono le sole che nel corso dell'integrazione variano (*).

Siccome nella (7) figura solo $d\Omega$ possiamo senz'altro assumere:

$$\Omega = \int_{(t_s^0)}^{(t_s)} \sum_s \left(\sum_i q_i \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - f_s \right) dt_s,$$

funzione che è da calcolarsi esprimendo colle (4') la funzione sotto il segno nelle t_r, t_r^0, p_i^0, q_i^0.

(*) Del resto è facile verificare direttamente la cosa. Si indichino: con $[p_i]$ e $[q_i]$ le funzioni ai secondi membri delle (4'); ed in generale con $[g]$ il risultato della sostituzione (4') in una qualunque funzione g delle p_i e q_i; tenendo presenti le (4) si trova subito:

$$\frac{\partial}{\partial t_r} \left[\sum_i q_i \frac{\partial [p_i]}{\partial t_s} - f_s \right] = \sum_i [q_i] \frac{\partial^2 [p_i]}{\partial t_r \partial t_s} - \left[\frac{\partial f_s}{\partial t_r} \right] + \sum_i \left[\frac{\partial f_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f_r}{\partial p_i} \right],$$

espressione che, a cagione dell'identità (2), non muta collo scambio degli indici r, s. C. d. d.

Calcoliamo direttamente la variazione $D\Omega$ della Ω per variazioni infinitesime *delle sole* p_i^0 e q_i^0. Si trova, mercè le (4):

$$D\Omega = \int \sum (\delta q_i Dp_i + q_i D\delta p_i) = \int \delta \sum_i q_i Dp_i$$
$$= \sum_i (q_i Dp_i - q_i^0 Dp_i^0).$$

Ritenendo poi variabili anche le t_r si ha:

$$d\Omega = D\Omega + \sum_r \frac{\partial \Omega}{\partial t_r} dt_r$$
$$= D\Omega + \sum_r \left(\sum_i q_i \frac{\partial f_r}{\partial q_i} - f_r \right) dt_r$$
$$= D\Omega + \sum_i q_i \delta p_i - \sum_r f_r dt_r$$
$$= \sum_i (q_i dp_i - q_i^0 dp_i^0) - \sum_r f_r dt_r,$$

ove invece di Dp_i^0 abbiamo scritto dp_i^0 giacchè ciò ormai non può recare confusione, essendo le p_i^0 considerate come variabili indipendenti.

Adunque, *ritenute costanti le sole* t_r^0, si ha:

$$dV = \sum_i q_i dp_i + \sum_i p_i^0 dq_i^0 - \sum_r f_r dt_r,$$

e di qui segue:

$$q_i = \frac{\partial V}{\partial p_i}; \quad p_i^0 = \frac{\partial V}{\partial q_i^0}; \quad \frac{\partial V}{\partial t_r} + f_r = 0.$$

Inoltre, paragonando coll'ultima delle (8), si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial t_r^0} = f_r^0,$$

conclusione conforme, ma più generale, a quella cui è giunto Jacobi nella 19ma delle sue celebri " Vorlesungen über Dynamik " circa la seconda equazione a derivate parziali cui, secondo Hamilton, deve soddisfare la funzione principale di un problema dinamico.

Calcolata come si disse la Ω *e poi la* V*; colle* (4′) *del primo gruppo si eliminino le* p_i^0 *e così si ottiene, a meno della costante additiva, una soluzione completa del sistema involutorio:*

$$(9) \qquad 0 = \frac{\partial V}{\partial t_r} + f_r\left(t_1, \ldots, t_m; p_1, \ldots, p_n; \frac{\partial V}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial p_n}\right),$$

che è l'associato del sistema canonico (4).

Questo è il procedimento di integrazione d'un tal sistema cui io giunsi nel 1883, nella prima delle mie note ricordate.

§ 3. — Per integrare il sistema canonico (4) si fissi nel campo delle variabili indipendenti t_r *il cammino d'integrazione*; ponendo invece delle t_r e dt_r rispettivamente:

$$t_r^0 + (t_r - t_r^0)t, \quad (t_r - t_r^0)\,dt,$$

e considerando le t_r costanti (al pari delle t_r^0) e facendo variare la sola t.

In questa guisa le (4) si convertono nel sistema Hamiltoniano:

$$(10) \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

ove:

$$H = \sum_r (t_r - t_r^0) f_r(\ldots, t_s^0 + (t_s - t_s^0)t \ldots; p_1, \ldots, q_n).$$

Questo va integrato in guisa che per $t=0$ le p_i, q_i divengano rispettivamente p_i^0, q_i^0; ad integrazione compiuta posto $t=1$, le espressioni ottenute per le p_i, q_i ci dànno la soluzione generale delle (4).

Orbene, integrare le (10) è analiticamente equivalente al trovare una soluzione completa dell'equazione a derivate parziali:

$$(11) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t; p_1 \ldots, p_n; \frac{\partial V}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial p_n}\right) = 0.$$

Conosciuta la soluzione generale delle (10), una soluzione completa della (11) è data, come è noto, da:

$$V = \sum_r p_i^0 q_i^0 + \int_0^t \left(\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - H\right) dt,$$

ove al solito la quadratura va eseguita esprimendo le p_i, q_i in funzione di t, p_i^0, q_i^0 per mezzo della soluzione generale delle (10) e poscia eliminando le p_i^0 col primo gruppo delle equazioni integrali:

$$p_i = p_i(p_i^0, \ldots, q_n^0, t).$$

Le equazioni integrali di (10) si possono porre sotto la forma:

$$q_i = \frac{\partial V}{\partial p_i}, \qquad p_i^0 = \frac{\partial V}{\partial q^0_i}$$

e quindi quelle delle (4) si ottengono immediatamente dalle precedenti ponendovi $t = 1$.

Di qui facilmente si conclude che *la* V *si converte in una soluzione completa del sistema involutorio* (9), *quando vi si faccia* $t = 1$; giacchè pel calcolo della Ω del precedente §, fissando come sopra il cammino d'integrazione, si ha:

$$\Omega = \int_0^1 \left(\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - H \right) dt$$

e così si vede che la soluzione ottenuta nel precedente § coincide con quella or ora indicata.

Adunque: *la completa integrazione del sistema involutorio* (9) *si riduce a quella dell'unica equazione* (11)*; e cioè, trovata quella soluzione della* (11) *che per* $t = 0$ *si riduce alla funzione lineare* $\sum_i q_i^0 p_i$, *fattovi* $t = 1$, *si ottiene una soluzione completa del sistema involutorio proposto.*

È questa una delle tante forme sotto cui si può porre il teorema di Lie (*).

§ 4. — Tra due sistemi di variabili:

$$(p_i, q_i); \ (p_i^*, q_i^*) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si stabilisca una trasformazione di contatto dipendente dalle t_r, e cioè una trasformazione tale che, *ritenute le* t_r *costanti*, si abbia:

$$\sum_i q_i dp_i = d\Phi + \sum_i q_i^* dp_i^*.$$

(*) Cfr. " Rend. Ist. Lomb. ", S. II, vol. XXXVI, p. 784.

Ritenute variabili anche le t_r, avremo:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r = d\Phi - \sum_r f_r^* dt_r, \tag{12}$$

ove le f_r^* indicano delle funzioni delle p_i^*, q_i^* e delle t_r.

Introducendo nel gruppo di trasformazioni (5), in luogo delle antiche p, q, le p^*, q^* si ottiene un nuovo gruppo di trasformazioni, simile all' antico. E poichè il prodotto di trasformazioni di contatto è sempre una trasformazione di contatto, concludiamo che il nuovo gruppo ha le stesse proprietà caratteristiche dell'antico ed in particolare ogni sua trasformazione stabilisce una trasformazione di contatto tra le p_i^*, q_i^* ed i loro valori iniziali. Adunque la più generale trasformazione infinitesima del nuovo gruppo sarà ancora del tipo (3).

Ciò fa prevedere che *per qualsiasi trasformazione di contatto sulle p_i, q_i un sistema canonico d'equazioni ai differenziali totali si trasforma in un altro sistema pure canonico.*

Le (4) moltiplicate per le variazioni arbitrarie δq_i, $-\delta p_i$ e sommate insieme, tra di loro e per rapporto all'indice i, dànno:

$$\sum_i (\delta q_i dp_i - \delta p_i dq_i) = \sum_r (\delta f_r dt_r - \delta t_r df_r),$$

quando si convenga di porre $\delta t_r = 0$.

Quest'equazione può scriversi:

$$\delta \left\{ \sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r \right\} - d \left\{ \sum_i q_i \delta p_i - \sum_r f_r \delta t_r \right\} = 0$$

e da essa si riottengono le (4) ponendo uguali a zero i coefficienti di tutte le quantità δp_i, δq_i e δt_r, giacchè quelle m equazioni che si ottengono dall'annullare i coefficienti delle δt_r sono, a cagione delle (2), una conseguenza delle (4) (*). Di qui segue

(*) Cfr. il § 2 della mia Nota recente, già citata: *Intorno ai sistemi di equaz. a deriv. parz. del I. O. in involuzione*, nei " Rend. dell'Istituto Lomb. " per l'annata in corso.

che operata la trasformazione di contatto tra le (p_i, q_i) e (p_i^*, q_i^*), a cagione della (12), le (4) si trasformano nelle:

$$dp_i^* = \sum_r \frac{\partial f_r^*}{\partial q_i^*} dt_r\,; \quad dq_i^* = -\sum_r \frac{\partial f_r^*}{\partial p_i^*} dt_r.$$

Per provare che questo sistema è pure canonico bisogna dimostrare inoltre che sarà identicamente:

$$\frac{\partial f_r^*}{\partial p_s} - \frac{\partial f_s^*}{\partial p_r} + (f_r^*, f_s^*)^* = 0,$$

ove la parentesi di Poisson $(\ )^*$ si intende formata colle nuove variabili.

Da (12) segue:

$$\begin{cases} q_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i} + \sum\limits_j q_j^* \dfrac{\partial p_j^*}{\partial p_i}\,; \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum\limits_j q_j^* \dfrac{\partial p_j^*}{\partial q_i}\,; \\[2ex] -f_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t_r} + \sum\limits_j q_j^* \dfrac{\partial p_j^*}{\partial t_r} - f_r^*, \end{cases}$$

e da queste, eliminando la Φ, si ottiene:

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(p_i, p_k)} = 0\,; \quad \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(q_i, q_k)} = 0\,; \quad \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(p_i, q_k)} = 0\,; \\[2ex] \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(p_i, q_i)} = 1\,; \quad -\dfrac{\partial f_r}{\partial p_i} = -\dfrac{\partial f_r^*}{\partial p_i} + \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_r, p_i)}\,; \\[2ex] -\dfrac{\partial f_r}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial f_r}{\partial q_i} + \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_r, q_i)}\,; \\[2ex] \dfrac{\partial f_r}{\partial t_s} - \dfrac{\partial f_s}{\partial t_r} = \dfrac{\partial f_r^*}{\partial t_s} - \dfrac{\partial f_s^*}{\partial t_r} - \sum\limits_j \dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_r, t_s)}\,. \end{cases}$$

Dalle prime quattro di queste equazioni si ottengono con un noto procedimento le notissime relazioni:

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} (p_i^*, p_k^*) = (q_i^*, q_k^*) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\,; \\[1ex] (p_i^*, q_k^*) = 0 \qquad (i \neq k)\,; \qquad (p^*_i, q_i^*) = 1\,, \end{cases}$$

dalle quali segue che per trasformazioni di contatto le parentesi di Poisson sono invarianti, cioè:

$$\text{(C)} \qquad (f, g) = (f, g)^* \equiv \sum_j \frac{\partial(f, g)}{\partial(p_j^*, q_j^*)},$$

ove nella seconda parentesi di Poisson le funzioni qualunque f, g son ritenute espresse nelle p^*, q^*.

Dalla 5ª e 6ª delle (A) segue:

$$\sum_i \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\frac{\partial f_s}{\partial q_i} = \sum_i \frac{\partial f_r^*}{\partial p_i}\frac{\partial f_s^*}{\partial q_i} + \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_r, p_i)}\frac{\partial(p_k^*, q_k^*)}{\partial(t_s, q_i)}$$
$$- \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial f_r^*}{\partial p_i}\frac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_s, q_i)} + \frac{\partial f_s^*}{\partial q}\frac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(t_r, p_i)} \right\};$$

dalla quale con facile calcolo, mercè le prime 5 delle (A), si ottiene:

$$(f_r, f_s) = (f_r^*, f_s^*) + \sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(t_r, t_s)} - \sum_i \sum_j \frac{\partial p_j^*}{\partial t_r}\frac{\partial(q_j^*, f_s)}{\partial(p_i, q_i)}$$
$$+ \sum_i \sum_j \frac{\partial p_j^*}{\partial t_s}\frac{\partial(q_j^*, f_r^*)}{\partial(p_i, q_i)} + \sum_i \sum_j \frac{\partial q_j^*}{\partial t_r}\frac{\partial(p_j^*, f_s)}{\partial(p_i, q_i)} - \sum_i \sum_j \frac{\partial q_j^*}{\partial t_s}\frac{\partial(p_j^*, f_r^*)}{\partial(p_i, q_i)}.$$

Ma usando della (C), e designando pel momento con (f_r^*), (f_s^*) le espressioni di f_r^*, f_s^* nelle p_i^*, q_i^* e t_r, abbiamo di qui:

$$(f_r, f_s) = (f_r^*, f_s^*) + \sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(t_r, t_s)} + \sum_i \left\{ \frac{\partial(f_s^*)}{\partial p_i^*}\frac{\partial p_i^*}{\partial t_r} + \frac{\partial(f_s^*)}{\partial q_i^*}\frac{\partial q_i^*}{\partial t_r} \right\}$$
$$- \sum_i \left\{ \frac{\partial(f_r^*)}{\partial p_i^*}\frac{\partial p_i}{\partial t_s} + \frac{\partial(f_r^*)}{\partial q_i^*}\frac{\partial q_i^*}{\partial t_r} \right\}.$$

$$= (f_r^*, f_s^*) + \sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(t_r, t_s)} + \frac{\partial f_s^*}{\partial t_r} - \frac{\partial f_r}{\partial t_s} + \frac{\partial(f_r^*)}{\partial t_s} - \frac{\partial(f_s^*}{\partial t_r};$$

e per l'ultima delle (A) e la (C):

$$\frac{\partial f_r}{\partial t_s} - \frac{\partial f_s}{\partial t_r} + (f_r, f_s) = \frac{\partial(f_r^*)}{\partial t_s} - \frac{\partial(f_s^*)}{\partial t_r} + (f_r^*, f_s^*)^*.$$

Dunque: *qualsiasi trasformazione di contatto sulle* p_i, q_i *converte un qualsiasi sistema canonico in un altro sistema parimenti canonico*, ossia il trasformato *del gruppo* (5) *è un gruppo simile, dotato delle stesse proprietà.*

§ 5. — Consideriamo la trasformazione di contatto:

$$(14) \qquad q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad -q_i^* = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^*},$$

ove Ω indica una funzione delle p_i, p_i^*, t_r, comunque scelta in guisa che non sia identicamente nullo il determinante funzionale:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1^*}, \ldots, \frac{\partial \Omega}{\partial p_n^*}\right)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)}.$$

Per tal trasformazione la (12) diviene:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r = d\Omega - \sum_i q_i^* dp_i^* - \sum_r \left(f_r + \frac{\partial \Omega}{\partial t_r}\right) dt_r;$$

per conseguenza, se Ω è una soluzione completa, colle arbitrarie non aggiunte $p_1^*, \ldots, p_n^*$, del sistema involutorio (9), ossia se:

$$(9') \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t_r} + f_r\left(t_1, \ldots, t_m;\ p_1, \ldots, p_n;\ \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega}{\partial p_n}\right) = 0,$$

risulterà:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_r f_r dt_r = d\Omega + \sum_i q_i^* dp_i^*,$$

e quindi sarà:

$$f_r^* = 0.$$

Dunque allora il trasformato del sistema canonico (4) avrà la forma risoluta, cioè allora gli integrali di (4) sono le p_i^*, q_i^*. Abbiamo così il teorema: *Con una trasformazione di contatto* (14), *che si ottiene conoscendo una qualsiasi soluzione completa del sistema involutorio associato* (9′), *il sistema canonico* (4) *viene integrato; e per tal trasformazione il gruppo* (5) *si trasforma in un gruppo di traslazioni, cui il gruppo dato, com'è noto, è simile.* Siccome poi l'inversa di una trasformazione di contatto è pure una trasformazione di contatto, si conclude ovviamente che *la proprietà di essere riducibili alla forma risoluta per trasformazioni di contatto è caratteristica de' sistemi canonici.*

Osserviamo che un sistema canonico (C) con meno di r variabili indipendenti si può sempre riguardare come un particolare sistema canonico con r variabili indipendenti: giacchè se $s < r$, supposto che $f_1, f_2, \ldots, f_s$ non dipendano da $t_{s+1}, \ldots, t_r$ e che inoltre $f_{s+1} = f_{s+2} = \ldots = f_r = 0$, si ha un sistema (C) con sole s variabili indipendenti.

Si considerino due sistemi canonici (C_1), (C_2) contenenti lo stesso numero di variabili dipendenti; essi possono ridursi alla forma risoluta con due trasformazioni di contatto T_1, T_2. Ma un sistema di forma risoluta rimane invariante per una *qualsiasi trasformazione* S *operata sulle variabili dipendenti, non contenente però le indipendenti;* per conseguenza *la più generale trasformazione che converte* (C_1) *in* (C_2) *è:*

$$T_1 S T_2^{-1}.$$

In particolare poi (C_1) è trasformato in sè stesso dal gruppo infinito di trasformazioni, simile al gruppo delle S:

$$T_1 S T_1^{-1}.$$

Coi precedenti teoremi la teoria delle trasformazioni dei sistemi canonici, ed in particolare dei sistemi Hamiltoniani, acquista la massima semplicità (*).

(*) Cfr. il mio lavoro: *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton*, pubblicato in tre note inserite nei " Rend. dell'Accademia dei Lincei „ (Vol. XII, 1° sem., serie 5ª, pp. 113-122; 149-152; 297-300).

Sopra alcune equazioni fondamentali nel problema degli n *corpi.*

Nota del Prof. PAOLO PIZZETTI.

Giova spesso, nello studio del problema degli n corpi, riferire i mobili, anzichè ad assi cartesiani fissi, ad una o più terne di assi aventi origine mobile e direzioni invariabili. Così p. es. si può assumere come origine delle coordinate il punto variabile che rappresenta la posizione di uno dei corpi del sistema; ovvero il centro di massa dei varii corpi; oppure, scelto a piacere un ordine di numerazione dei corpi, riferire la massa i^{esima} ad una terna d'assi uscenti dal baricentro delle precedenti $i-1$ masse (coordinate Jacobiane). Le formole pel passaggio dall'un caso all'altro, e in particolare quelle esprimenti i così detti integrali delle aree, sono di solito, nei trattati di Meccanica Celeste, dedotte in un modo piuttosto prolisso, mentre si possono ottenere senza alcuna fatica coll'impiego elementare delle trasformazioni lineari. Scopo di questa Nota è appunto una deduzione semplice delle formole relative ai nominati cangiamenti di variabili Cartesiane.

1. — Siano $m_0, m_1, \ldots, m_n$ le masse degli $n+1$ corpi componenti il sistema che si studia, e siano x_r, y_r, z_r le coordinate cartesiane della massa m_r riferita ad una terna di assi fissi.

Siano poi:

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$3n+3$ nuove variabili legate alle x_r, y_r, z_r dalle relazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_r = \gamma_{0r}X_0 + \gamma_{1r}X_1 + \ldots + \gamma_{nr}X_n \\ y_r = \gamma_{0r}Y_0 + \gamma_{1r}Y_1 + \ldots + \gamma_{nr}Y_n \\ z_r = \gamma_{0r}Z_0 + \gamma_{1r}Z_1 + \ldots + \gamma_{nr}Z_n \end{cases}$$

dove i γ sono coefficienti costanti, dei quali il determinante si suppone differente da zero.

Posto:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \sum_r \gamma_{ir}\gamma_{kr} m_r, \tag{2}$$

il doppio della forza viva del sistema sarà espresso da:

$$2T = \sum_r m_r(x'^2_r + y'^2_r + z'^2_r) = \sum_i \sum_k \alpha_{ik}(X_i' X_k' + Y_i' Y_k' + Z_i' Z_k')$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto al tempo. Si avrà:

$$\frac{\partial T}{\partial X_i'} = \sum_k \alpha_{ik} X_k'$$

e altre due analoghe. Quindi con ovvie operazioni:

$$\sum_r m_r y_r z_r' = \sum_r \left(m_r \sum_i \gamma_{ir} Y_i \sum_k \gamma_{kr} Z_i' \right) =$$

$$= \sum_i \sum_k \alpha_{ik} Y_i Z_k' = \sum_i Y_i \frac{\partial T}{\partial Z_i'}.$$

In tutte le sommatorie scritte sin qui si intende che il rispettivo indice assuma tutti i valori 0, 1, 2, ..., n. Il primo integrale delle aree assumerà dunque la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(Y_i \frac{\partial T}{\partial Z_i'} - Z_i \frac{\partial T}{\partial Y_i'} \right) = \textit{costante}. \tag{3}$$

Generalmente, nelle applicazioni, la sostituzione (1) è scelta in guisa da ridurre l'espressione della $2T$ alla forma:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(X_i' X_k' + Y_i' Y_k' + Z_i' Z_k') + \textit{costante} \tag{4}$$

nella quale entrano soltanto le $3n$ *variabili* $X_1' \ldots X_n'$, $Y_1' \ldots Y_n'$, $Z_1' \ldots Z_n'$; il che si può ottenere in infiniti modi, valendosi del teorema del moto del centro di massa. Dovrà essere allora:

$$\alpha_{0k} = \sum_{r=0}^{n} \gamma_{0r}\gamma_{kr} m_r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

e dovranno le X_0, Y_0, Z_0 essere funzioni *lineari* del tempo. In questo caso il primo termine ($i = 0$) della somma nella formola (3) si riduce a:

$$\alpha_{00}(Y_0 Z_0' - Z_0 Y_0')$$

ossia ad una costante; sicchè il primo integrale delle aree può scriversi più semplicemente così:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i \frac{\partial T}{\partial Z_i'} - Z_i \frac{\partial T}{\partial Y_i'} \right) = \textit{costante}. \tag{6}$$

Osserviamo ancora che, essendo X_0 funzione lineare del tempo, la (1) dà con una doppia derivazione:

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kr} \frac{d^2 X_k}{dt^2}, \tag{7}$$

ove le $\frac{d^2 X_k}{dt^2}$ debbono supporsi generalmente diverse da zero; altrimenti la T potrebbe esprimersi per un numero di variabili minore di $3n$. Moltiplicando la (7) per m_r e sommando da $r = 0$ ad $r = n$, pel teorema del moto del centro di massa, abbiamo:

$$\sum_{r=0}^{n} \gamma_{kr} m_r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5'}$$

Queste n condizioni insieme colle (5), dimostrano (*) che deve essere:

$$\gamma_{00} = \gamma_{01} = \gamma_{02} = \ldots = \gamma_{0n}.$$

Possiamo assumere questi coefficienti eguali all'unità; le X_0, Y_0, Z_0 esprimeranno allora le coordinate del centro di massa degli $n+1$ corpi rispetto agli assi fissi, come facilmente si verifica. Quando dunque la $2T$ si riduce alla forma (4) per mezzo della sostituzione (1), le X_0, Y_0, Z_0 esprimono (a meno di un fattore costante) le coordinate del centro di massa, e i coefficienti della 1ª colonna nella (1) sono eguali fra loro.

(*) Si tenga presente che il determinante della sostituzione (1) si suppone diverso da zero, e che, quindi, la matrice dei coefficienti γ_{kr} nelle (5') ha per caratteristica n.

1° *Esempio*. Coordinate riferite ad un'origine mobile qualunque, o in particolare alla massa m_0. Abbiamo, qualunque sia α:

$$\sum_{r=0}^{n} m_r(x_r' - \alpha)^2 = \Sigma\, m_r x_r'^2 - 2\alpha b + \alpha^2 M \tag{8}$$

dove:

$$M = \sum_0^n m_r, \qquad b = \sum_0^n m_r x_r' \text{ (quantità costante).}$$

Posto $\alpha = x_i'$ e sommando rispetto all'indice i da 0 ad n, dopo aver moltiplicato per m_i si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{n} m_i m_r (x_r' - x_i')^2 = 2M\sum_{r=0}^{n} m_r x_r'^2 - 2b^2.$$

Se si stabilisce che ognuna delle combinazioni (ir) vada presa una volta sola, occorre dividere il 2° membro per 2. Cangiando x in y e in z e sommando:

$$2MT = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{n} m_i m_r [(x_r' - x_i')^2 + (y_r' - y_i')^2 + (z_r' - z_i')^2] + \textit{costante}.$$

In questa espressione della forza viva figurano solo le differenze delle coordinate; potremo dunque alle $x_r y_r z_r$ sostituire le coordinate $X_r Y_r Z_r$ riferite ad un unico sistema d'assi con origine mobile. Avremo allora:

$$\frac{\partial T}{\partial X_i'} = m_i \sum_{r=0}^{n} m_r (X_i' - X_r') \text{ ed analoghe.}$$

Sostituendo nella (3) ed osservando che:

$$Y_i(Z_i' - Z_r') + Y_r(Z_r' - Z_i') = (Y_i - Y_r)(Z_i' - Z_r')$$

avremo il 1° integrale delle aree nella forma:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{n} m_i m_r [(Y_i - Y_r)(Z_i' - Z_r') - (Z_i - Z_r)(Y_i' - Y_r')] = \textit{costante}. \tag{9}$$

In particolare, se l'origine degli assi è nel punto occupato dalla massa m_0, la (9) diverrà:

$$m_0 \sum_{i=1}^{n} m_i (Y_i Z_i' - Z_i Y_i') + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} m_i m_r [\ldots] = \textit{costante}$$

dove la parentesi [...] è la stessa che figura nella (9).

2° *Esempio - Coordinate Jacobiane.* Chiamiamo X_i, Y_i, Z_i le coordinate della massa m_i rispetto ad assi aventi origine nel centro di massa dei corpi $m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}$. Posto:

$$\mu_i = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_i \tag{10}$$

si ha:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mu_{i-1}}{\mu_i} (X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2) + \textit{costante}, \tag{11}$$

e la (6) dà:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mu_{i-1}}{\mu_i} (Y_i Z_i' - Z_i Y_i') = \textit{costante};$$

questa è la forma del 1° integrale delle aree nel sistema di coordinate ora definito. Il quale sistema fu introdotto da Jacobi pel caso di *tre* corpi (*) e generalizzato poi dal sig. Radau pel caso di un numero di corpi qualunque (**).

2. — Vogliamo ora mostrare come, in base agli elementi della teoria delle trasformazioni lineari, si possa facilmente dedurre la espressione (11) della forza viva in coordinate Jacobiane.

Osserviamo, innanzi tutto, che uno dei più semplici modi per ridurre la $2T$ alla forma (4) consiste nel porre:

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0 - \sum_i b_i \frac{m_i}{m_0} X_i \\ x_i &= X_0 + X_i b_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove le b sono costanti qualsiasi differenti da zero. Se si assumono le b uguali all'unità (nel qual caso X_i è la coordinata di m_i rispetto al comun centro di massa) si ha:

$$\sum_{r=0}^{n} m_r x_r^2 = X_0^2 M + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \left(\frac{m_i^2}{m_0} + m_i\right) + 2\frac{m_1 m_2}{m_0} X_1 X_2 + 2\frac{m_1 m_3}{m_0} X_1 X_3 + \ldots,$$

(*) *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps,* " Journ. de Liouville ", I^e série, t. IX.

(**) *Sur une transformation des équations différentielles de la dynamique,* " Ann. de l'Éc. Normale ", 1868.

sicchè la $2T$ si riduce alla forma (4) ove si ponga:

$$\alpha_{ii} = \frac{m_i}{m_0}(m_i + m_0), \quad \alpha_{ik} = \frac{m_i m_k}{m_0} \qquad (i \neq k). \tag{12}$$

Si vogliono ora scegliere $3n$ coordinate $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ in guisa che la $2T$ si riduca alla forma:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2) + \textit{costante}.$$

Occorre, per questo, trovare una trasformazione:

$$X_r = c_{r1}\xi_1 + c_{r2}\xi_2 + \ldots + c_{rn}\xi_n, \tag{13}$$

la quale riduca la quadrica:

$$Q = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} X_i X_k$$

alla forma canonica $\sum_i N_i \xi_i^2$, dove le N_i sono costanti differenti da zero. I coefficienti c dovranno soddisfare alle $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni:

$$\sum_i \sum_k \alpha_{ik} c_{ir} c_{ks} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} r, s = 1, 2, \ldots, n \\ r \neq s \end{matrix}\right). \tag{14}$$

Se, in particolare alle (13), si impone la forma:

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} X_1 = c_{11}\xi_1 & + c_{12}\xi_2 + \ldots + & c_{1n}\xi_n \\ X_2 & \quad c_{22}\xi_2 + \ldots + & c_{2n}\xi_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ X_n & & c_{nn}\xi_n \end{array} \right.$$

in modo che sia nullo ogni c_{ir} per $i > r$, le (14) dànno luogo, per ogni valore di $s > 1$, alle $s - 1$ relazioni seguenti:

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_{1k} c_{ks} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_{2k} c_{ks} = 0, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{s} \alpha_{s-1} c_{ks} = 0, \tag{15}$$

le quali determinano i coefficienti di ogni colonna nella trasformazione (S) in funzione del rispettivo coefficiente in diagonale principale.

Chiamiamo D_n il discriminante della quadrica Q:

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Poichè il modulo della sostituzione è $c_{11} c_{22} \dots c_{nn}$, dovrà aversi:

$$c_{11}^2 c_{22}^2 \dots c_{nn}^2 D_n = N_1 N_2 \dots N_n;$$

e più generalmente, indicando con D_s il determinante (16) limitato alle prime s linee e colonne:

$$c_{11}^2 c_{22}^2 \dots c_{ss}^2 D_s = N_1 N_2 \dots N_s.$$

Quindi:

$$N_s = \frac{D_s}{D_{s-1}} c_{ss}^2.$$

La quadrica Q è dunque ridotta alla forma:

$$c_{11}^2 D_1 \xi_1^2 + c_{22}^2 \frac{D_2}{D_1} \xi_2^2 + \dots + c_{nn}^2 \frac{D_n}{D_{n-1}} \xi_n^2. \tag{17}$$

Nel caso nostro, ricordando le (12) e usando la notazione (10):

$$D_s = \frac{m_1 m_2 \dots m_s}{m_0^s} \begin{vmatrix} m_1 + m_0 & m_1 & \dots & m_1 \\ m_2 & m_2 + m_0 & \dots & m_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & m_n & & m_n + m_0 \end{vmatrix} = \frac{m_1 m_2 \dots m_s}{m_0} \mu_s.$$

Quindi:

$$\frac{D_s}{D_{s-1}} = \frac{m_s \mu_s}{\mu_{s-1}}.$$

Sono così determinati i coefficienti della forma canonica (17) restando tuttavia arbitrarii, com'è naturale, i c_{ss}. Per determi-

nare gli $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficienti non arbitrarii nella (S) facciamo uso delle (15) le quali dànno, nel caso nostro:

$$(m_1 + m_0)c_{1s} + m_2c_{2s} + m_3c_{3s} + \ldots + m_sc_{ss} = 0$$

$$m_1c_{1s} + (m_2 + m_0)c_{2s} + m_3c_{3s} + \ldots + m_sc_{ss} = 0, \text{ ecc. ecc.};$$

donde:

$$c_{1s} = c_{2s} = \ldots = c_{s-1,s} = -\frac{m_s}{\mu_{s-1}}\, c_{ss}.$$

Così tutti i c sono determinati in funzione di quelli in diagonale principale. Per avere le formole che propriamente valgono per le coordinate Jacobiane, basta prendere:

$$c_{ss} = \frac{\mu_{s-1}}{\mu_s}.$$

Allora:

$$c_{1s} = c_{2s} = \ldots = c_{s-1,s} = -\frac{m_s}{\mu_s},$$

$$N_s = m_s \frac{\mu_{s-1}}{\mu_s},$$

e la $2T$ assumerà la forma (11). L'ultima delle relazioni (S) diventa:

$$X_n = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\, \xi_n,$$

ovvero:

$$X_n : \xi_n = \mu_{n-1} : (\mu_{n-1} + m_n);$$

e, sotto questa forma, pone in evidenza come ξ_n sia la coordinata della massa m_n rispetto ad un sistema d'assi che ha per origine il centro di massa dei corpi $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$.

Sulla integrazione per sostituzione.

Nota di FRANCESCO GIUDICE.

Nel N. 1 del Tomo VIII della " Revue de Mathématique " (Turin, 1902), a pag. 10 in un confronto bibliografico del Professore PEANO, relativamente all'integrazione per sostituzione, si legge: " Dalla Dm. pare risulti che non è necessaria la continuità di u', supposta dall'A. e nel Formul. Questione a studiarsi ".

In questa Nota io dimostro che, quando la derivata è limitata superiormente ed inferiormente da numeri d'ugual segno, la sua continuità è condizione sufficiente per la validità della trasformazione dell'integrale; ma non è condizione necessaria, bastando p. es. che essa derivata sia integrabile; e stabilisco la condizione generale di validità della formola di trasformazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

Suppongo che le funzioni considerate siano funzioni reali di variabile reale ed abbiano unico valore (finito) per ogni valore considerato della variabile da cui dipendono. Suppongo inoltre che sian limitate, per non entrare nella questione degli integrali improprii, che attualmente non m'interessa.

1. — Indichiamo, ordinatamente, con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ i punti dividenti in n parti uguali il segmento $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ ed indichiamo α con ξ_0 e β con ξ_n. Generalmente, se $x_r = \varphi(\xi_r)$ ed $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$, i punti $x_1, \ldots, x_{n-1}$ non divideranno il segmento $a \vdash\!\dashv b$ in n parti uguali nè s'incontreranno ordinatamente andando da a a b, e potrà pur avvenire che non sian tutti interni ad $a \vdash\!\dashv b$; però, aumentando n indefinitamente, tenderanno a zero anche gli intervalli parziali $x_r \vdash\!\dashv x_{r+1}$ perchè tendono a zero i corrispondenti intervalli $\xi_r \vdash\!\dashv \xi_{r+1}$ e $\frac{dx}{d\xi}$ ha un valor finito in ogni punto dell'intervallo $\xi_0 \vdash\!\dashv \xi_n$, che si considera.

2. — Osserviamo subito che *potrebbe non esistere l'integrale trasformato, pur esistendo il primitivo;* ciò si verifica p. es. se $f(x) = 1$ e $\varphi'(\xi)$ non è integrabile da α a β.

Sussiste invece sicuramente l'integrale trasformato, se $\varphi'(\xi)$ *è integrabile da* α *a* β *ed è limitata inferiormente e superiormente da numeri d'ugual segno.* Essendo indifferente che $\varphi'(\xi)$ abbia l'uno o l'altro segno, supponiamo infatti che $\varphi'(\xi)$ sia integrabile nell'intervallo $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ e che suoi limiti inferiore e superiore, in quest'intervallo, siano i due numeri positivi λ e μ, per cui, se $a < b$, come supporremo, anche $\alpha < \beta$. Il limite superiore dei valori assoluti di $f(\varphi(\xi))$ nell'intervallo $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ sia H. Pel teorema di Lagrange:

$$x_{m+1} - x_m = \varphi'(\alpha_m)(\xi_{m+1} - \xi_m)$$

dove α_m è un conveniente valore tra ξ_m e ξ_{m+1}. Si ha quindi che:

$$\Delta \xi_m \overset{=}{<} \frac{\Delta x_m}{\lambda}.$$

E se $f_{m_1}\varphi'_{m_1}$ ed $f_m\varphi'_m$ sono i limiti superiore ed inferiore di $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ nell'intervallo $\xi_m \vdash\!\dashv \xi_{m+1}$ ed O_m, Ω_m ed ϵ_m son le oscillazioni di $f(x)$ nell'intervallo $x_m \vdash\!\dashv x_{m+1}$, di $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ nell'intervallo $\xi_m \vdash\!\dashv \xi_{m+1}$, e di $\varphi'(\xi)$ in questo medesimo intervallo, si ha che:

$$\Omega_m = f_{m_1}\varphi'_{m_1} - f_m\varphi'_m = \varphi'_{m_1}(f_{m_1} - f_m) + f_m(\varphi'_{m_1} - \varphi'_m)$$
$$\overset{=}{<} \mu O_m + H\epsilon_m$$

per cui:

$$\Sigma\Omega_m \,.\, \Delta\xi_m \overset{=}{<} \frac{\mu}{\lambda}\Sigma O_m \,.\, \Delta x_m + H\Sigma\epsilon_m \,.\, \Delta\xi_m.$$

Il primo termine del secondo membro tende a zero perchè $f(x)$ è integrabile da a a b, ed il secondo termine tende a zero perchè $\varphi'(\xi)$ è integrabile da α a β; adunque:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1}{}_m \Omega_m \Delta\xi_m = 0$$

e così resta dimostrato che $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ è integrabile da α a β.

Se $\varphi'(\xi)$ è continua, i suoi limiti inferiore e superiore sono

suoi valori minimo e massimo, per cui, se non s'annulla, è limitata inferiormente e superiormente da numeri d'ugual segno; ed è pur integrabile, essendo continua. *Esiste dunque certamente l'integral trasformato se* $\varphi'(\xi)$ *è continua e non s'annulla nell'intervallo* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$.

3. — Ora supponiamo solo che $\varphi'(\xi)$ non muti segno, per cui $\varphi(\xi)$ sarà monotona. Si ha che:

$$x_{m+1} - x_m = \varphi'(\alpha_m)(\xi_{m+1} - \xi_m)$$

dove α_m è un conveniente valore tra ξ_m e ξ_{m+1}. Essendo monotona $\varphi(\xi)$, come fu detto, $\varphi(\alpha_m)$ è compreso tra $\varphi(\xi_m)$ e $\varphi(\xi_{m+1})$, cioè tra x_m ed x_{m+1}; per ciò:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1}{}_m f(\varphi(\alpha_m))(x_{m+1} - x_m)$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1}{}_m f(\varphi(\alpha_m))\,\varphi'(\alpha_m)(\xi_{m+1} - \xi_m).$$

L'ultimo membro, se $f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)$ è integrabile da α a β, *p. es. se* $\varphi'(\xi)$ *è continua oltre a non annullarsi, è*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)d\xi.$$

Per quanto fu detto nel num. 2, si ha così che: *Se* f(x) *è integrabile da* a *a* b *ed* $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ *e* $\varphi'(\xi)$ *è integrabile da* α *a* β *ed i suoi limiti inferiore e superiore son numeri d'ugual segno, allora è certamente valida la formula di trasformazione*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

4. — Passiamo ora al caso generale.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{0}^{n-1}{}_m \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)dx\,,$$

ed

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1}{}_m (f\varphi')_m(\xi_{m+1} - \xi_m),$$

dove $(f\varphi')_m$ è fissabile arbitrariamente tra i limiti inferiore e su-

periore dei valori presi da $f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)$ mentre ξ va da ξ_m a ξ_{m+1}. Se $\varphi'(\xi)$ non muta segno nell'intervallo $\xi_m \vdash\!\dashv \xi_{m+1}$,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\,dx = \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi$$

onde, per il primo teorema del valor medio, da applicarsi al secondo integrale, si può fissare $(f\varphi')_m$ in modo d'avere che:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\,dx = (f\varphi')_m(\xi_{m+1} - \xi_m).$$

E se φ' muta segno nell'intervallo $\xi_r \vdash\!\dashv \xi_{r+1}$, allora vi si deve anche annullare perchè una funzione derivata, se ha valore finito in ogni punto d'un intervallo, nel medesimo non può passare da un valore ad un altro senza prendere ogni valore intermedio; per ciò si può porre zero per $(f\varphi')_r$. E così:

$$\sum_0^{n-1}{}_m \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\,dx - \sum_0^{n-1}{}_m (f\varphi')_m(\xi_{m+1} - \xi_m) = \Sigma \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x)\,dx,$$

la somma del secondo membro essendo estesa agli intervalli $x_r \vdash\!\dashv x_{r+1}$ corrispondenti ai $\xi_r \vdash\!\dashv \xi_{r+1}$ nei quali muta segno $\varphi'(\xi)$. Ne segue che: *Se* $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ *e sono integrabili* $f(x)$ *dal minimo al massimo valore di* $\varphi(\xi)$ *in* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ *ed* $f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)$ *da* α *a* β, *allora per la validità della formula di trasformazione*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi$$

è necessario e sufficiente che, comunque sian dati un numero positivo σ *ed un intero positivo* m, *si possa dare un intero* n *non minore di* m *e tale che, essendo diviso l'intervallo* $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ *in* n *parti uguali per mezzo dei punti* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ *si abbia che:*

$$-\sigma < \Sigma \int_{\varphi(\xi_r)}^{\varphi(\xi_{r+1})} f(x)\,dx < \sigma,$$

la somma riferendosi a quegli intervalli $\xi_r \vdash\!\dashv \xi_{r+1}$ *nei quali* $\varphi'(\xi)$ *muta segno.*

Sulla rigenerazione dell'epitelio intestinale nei pesci.

Nota di ENZO BIZZOZERO, studente.

(Con una Tavola).

Il tema della rigenerazione dell'epitelio intestinale fu già ampiamente trattato da molti ricercatori, tra i quali va in ispecial modo ricordato Giulio Bizzozero, che, per risolvere il quesito propostosi, diresse le sue osservazioni sopra numerose specie animali, dai mammiferi (cane, coniglio) agli insetti (melolontha, acridii, ecc.) e riscontrò in tutte questa medesima legge: la rigenerazione dell'epitelio intestinale avviene per scissione cariocinetica dell'epitelio stesso.

Siccome però la struttura dell'intestino va sempre più complicandosi quanto più si sale nella scala zoologica, così il meccanismo della rigenerazione, se da una parte ubbidisce ad alcuni principii generali, comuni a tutte le specie del regno animale, dall'altra presenta, corrispondentemente alla varia struttura, delle particolarità proprie a ciascuna specie.

Ed infatti, passando in rapida rassegna i lavori di Bizzozero su questo argomento (1), vediamo che nell'intestino del Petromyzon Planeri l'epitelio rivestente la valvola spirale (che non è altro che una duplicatura delle pareti intestinali ingrossata da tessuto cavernoso) ha il suo focolaio di rigenerazione nei fornici, in quei punti cioè in cui la plica si continua colla porzione restante dell'intestino; da questi punti le cellule epiteliali che hanno avuto origine per mitosi dalle cellule preesistenti, man mano che invecchiano si spostano gradatamente in alto sulla valvola, cosicchè, se non si desquamano durante il cammino, arrivano sulla sommità della valvola stessa dove terminano la loro vita.

(1) In questo riassunto mi sono scostato dall'ordine della scala zoologica ed ho creduto invece conveniente cominciare dall'animale in cui l'intestino presenta la struttura meno complessa, per salire gradatamente a quella specie in cui l'intestino ha raggiunto la massima differenziazione.

L'intestino del tritone differisce dal precedente pel fatto che presenta in luogo della valvola spirale numerose pliche contigue l'una all'altra. La rigenerazione quivi avviene per mitosi di " vere cellule di ricambio (Ersatzzellen) che, oltre all'occupare il posto lasciato libero tra le estremità inferiori delle cellule cilindriche, si spingono a gruppi nel tessuto connettivo della mucosa, e vi acquistano la forma di germogli e di zaffi sotto-epiteliari ". Questi ultimi si trovano solamente nei fornici.

Con un meccanismo abbastanza simile a quest'ultimo avviene la rigenerazione dell'epitelio intestinale degli acridi, della *melolontha vulgaris* e della rana.

Nel *Ditiscus marginalis* i focolai di rigenerazione dell'epitelio si trovano invece nei fondi ciechi delle borse che in numero notevole si staccano dall'intestino.

Nell'*Hydrophilus piceus* la rigenerazione ha luogo nelle sue linee generali in modo analogo a quella delle specie già descritte; da queste però si scosta per alcune particolarità piuttosto complesse che, appunto perchè tali, male si prestano ad un breve riassunto.

Salendo nella scala zoologica, vediamo che la struttura dell' intestino si complica colla formazione di vere ghiandole tubulari.

Le osservazioni che Giulio Bizzozero fece sopra l' intestino del coniglio, del cane, del topolino grigio dimostrano chiaramente che l'epitelio rivestente la superficie libera della mucosa ha il suo focolaio di rigenerazione nelle ghiandole tubulari, e che queste quindi non si debbono considerare affatto distinte dall'epitelio di rivestimento, ma come semplici infundibuli di quest'ultimo che è in continua desquamazione fisiologica.

Finalmente dalle numerose osservazioni di cui egli fece oggetto le cellule mucipare, dedusse:

1) non essere accettabile l'opinione di coloro che ammettono che le cellule mucipare sono il prodotto di una trasformazione delle cellule cilindriche comuni dell' intestino;

2) che per le cellule mucipare esistono degli speciali focolai di produzione che, come nei batraci stanno nel profondo dello strato epiteliare (ed eventualmente dei germogli che ne dipendono), così nei mammiferi risiedono nel fondo cieco delle ghiandole tubulari. Egli è soltanto partendo di qui, che esse,

salite gradatamente lungo il tubulo, riescono alla fine sulla superficie della mucosa.

Sopra queste lunghe e diligenti ricerche, che in breve ho riassunto, si fonda la teoria che nella scienza passa sotto il nome di teoria di Bizzozero, la quale, se in qualche particolare non è conforme alle vedute di alcuni, pur tuttavia si può considerare come accettata nella massima parte da tutti.

Però in questi ultimi lavori, mentre, come abbiamo visto, l'A. passò in rassegna numerose classi del regno animale, non si occupò di studiare il meccanismo della rigenerazione intestinale dei pesci. Non credendo pertanto privo d'interesse colmare questa lacuna, ho fatto delle ricerche di cui ora verrò esponendo i risultati. A tale scopo mi sono servito per la massima parte di alcune specie di pesci d'acqua dolce: *Barbus plebejus* (Val.); *Barbus caninus* (Cuv. e Val.); *Cottus Gobio* (Linn.); *Alburnus Alborella* (De Filippi); *Squalius Cavedanus* (Bonap.); in seguito anche di alcune di mare: (*Scyllium canicula* (Linn.); *Torpedo Marmorata* (Risso) (1).

Dopo d'aver sperimentato numerosi liquidi fissatori (Müller, alcool, Hermann, Rabl) m'attenni per ultimo quasi esclusivamente al liquido di Zenker che, meglio d'ogni altro, conserva quasi inalterata la delicata struttura dell'epitelio.

Fra gli svariati metodi di colorazione che oggidì annovera la tecnica istologica ne applicai un numero piuttosto ragguardevole a seconda delle particolarità che mi premeva di mettere in evidenza. Così per porre in risalto le mitosi mi servii del metodo di Ramon y Cajal (fucsina basica, solfoindigotato di sodio e acido picrico), del metodo di Bizzozero all'acido cromico, della safranina, ecc.; per la colorazione del muco ricorsi con buon esito alla Vesuvina, alla tionina, all'ematossilina Bizzozero, alla safranina ed ematossilina pei pezzi fissati in Hermann. Ma il metodo che mi diede migliori risultati fu quello della doppia colorazione del carminio allume e del Victoria-Blau. Le sezioni si colorano per lo spazio 12—24 ore in Carminio allume; trascorso questo tempo si lavano e si trasportano in una soluzione

---

(1) La classificazione di questi pesci mi fu gentilmente eseguita dall'Ill. Prof. L. Camerano, cui porgo i miei più sentiti ringraziamenti.

così composta: grammi 0,5 Victoria-Blau, cm³ 1 acido acetico, cm³ 100 acqua.

Ivi si lasciano da mezza a tre quarti d'ora, indi si sciacquano in acqua e si decolorano negli alcool, avendo però l'avvertenza di sorvegliare la decolorazione sotto il microscopio a debole ingrandimento. Quando la colorazione è schiettamente elettiva, quando cioè i nuclei si scorgono colorati in rosso dal carminio allume ed il muco in bleu cupo, si passa il preparato in xilolo, indi in balsamo.

Il tubo digerente dei pesci che ho preso in considerazione varia di struttura e di lunghezza a seconda della specie e dell'età dell'individuo. Fondamentalmente possiamo distinguerlo in tre porzioni: esofago, stomaco, e intestino. In sezione trasversa l'intestino dei teleostei appare costituito (Fig. 1ª): 1° dalla sierosa, 2° da uno strato di fibre muscolari liscie longitudinali, 3° da uno strato di fibre muscolari trasversali, 4° dalla mucosa. Questa consta:

a) di uno strato connettivo che si dispone a fasci riuniti a rete, nelle maglie della quale si vedono cellule connettive e leucociti mononucleati in discreto numero (Fig. 2ª *g* - Fig. 3ª *a*). Esso forma numerose pliche lunghe, talora anastomizzate tra loro, che, a cagione del loro decorso onduloso, non appaiono sempre tagliate trasversalmente anche in sezioni esattamente perpendicolari all'asse maggiore dell'intestino, bensì sotto varî gradi di obliquità;

b) di una membrana limitante che ricopre lo strato precedente in tutta la sua estensione;

c) dell'epitelio, che presenta a considerare diverse specie di cellule: le cellule protoplasmatiche e le cellule mucipare (1).

---

(1) Il modo più conveniente di denominare le diverse specie di cellule epiteliali che si riscontrano nell'intestino, sarebbe quello di " cellule mucipare e cellule non mucipare „; poichè se per le prime abbiamo un carattere ben definito a cui riferirci nella loro denominazione, per le seconde questo carattere ci manca, essendo dimostrata per parecchie la funzione dell'assorbimento, ma non esclusa una funzione secernente. Però per non usare una nuova nomenclatura, ho adottato quella seguìta generalmente in Italia di " cellule protoplasmatiche e mucipare „. D'altra parte è frequente che per comodità vengano adottate in scienza delle denominazioni arbitrarie, non sempre esatte. Infatti, gli autori tedeschi chiamano le due specie

Cellule protoplasmatiche. — Le cellule protoplasmatiche, che in numero maggiore concorrono alla formazione dell'epitelio intestinale, sono fornite di nucleo ovalare coll'asse maggiore parallelo all'asse maggiore della cellula. Verso il lume intestinale sono limitate da un orlo lucente che, per essere costituito da bastoncini giustaposti gli uni agli altri, appare finamente striato. Esse sono disposte in uno strato unico fuorchè nei fornici ed alla base delle pliche dove fra le loro estremità profonde racchiudono piccole cellule con scarso protoplasma e nucleo evidente (Fig 2ª-*a*). Il citoplasma delle cellule protoplasmatiche contiene talvolta dei corpuscoli rotondeggianti, omogenei, che non si tingono coi colori nucleari e che sono separati dal protoplasma in cui sono allogati da una zona chiara regolare. La loro grandezza è molto variabile inquantochè mentre la maggior parte hanno un diametro di μ 3, altri l'hanno di μ 6, altri infine appaiono sotto forma di granuli assai minuti. Questi corpicciuoli non sono altro che gli *enclaves* descritti da Lukianow, da Heidenhain, da Nicolas. Di essi però non mi sono occupato in modo speciale perchè non hanno rapporto colla rigenerazione dell'epitelio.

Degno di nota è il fatto che non tutte le cellule hanno le medesime dimensioni; ed invero, mentre quelle situate nei fornici sono sottili e lunghe così da raggiungere μ 50 (Fig. 2ª) di lunghezza, quelle situate nella zona più alta della plica sono più larghe e più basse μ 35-40 (Fig. 3ª). Questa differenza di lunghezza ci sarà spiegata in seguito dal modo con cui si rigenera l'epitelio protoplasmatico.

Cellule mucipare (Fig. 2ª-*b*). — Le cellule mucipare, che stanno interposte in numero variabile fra le cellule protoplasmatiche, hanno la medesima lunghezza di quest'ultime e sono costituite da una porzione protoplasmatica contenente il nucleo e di una teca terminale, grande, ovale o rotondeggiante, contenente il muco che nei pezzi induriti in Hermann e in Zenker assume un aspetto reticolare.

Questi caratteri non sono però comuni a tutte le cellule mucipare indistintamente, ma solo a quelle che hanno già rag-

---

di elementi " Cilinderzellen, Becherzellen „ mentre, come è noto, le cellule cosidette " cilindriche „ non sono mai cilindriche, e le " Becherzellen „ non sempre hanno la forma di calice.

giunto il completo sviluppo. Se invece esaminiamo quella porzione di epitelio che è compresa fra la serie di nuclei e la membrana basale, vediamo non di rado dei piccoli elementi costituiti da scarso protoplasma, da nucleo assai evidente, e ricoperti a mo' di cappuccio nel loro estremo rivolto verso il lume intestinale da un blocchetto di muco (Fig. 2ª-*c*). E che si tratti effettivamente di muco e non di un'altra sostanza, lo attesta la sua struttura reticolare e il suo comportamento verso le sostanze coloranti specifiche pel muco. Esso si colora infatti in azzurro col Victoria-Blau, in bruno colla Vesuvina, in giallo colla Safranina ed in violetto coll' ematossilina nei pezzi fissati in Hermann. Specialmente con quest'ultimo metodo esso rimane colorato più intensamente che non il muco delle cellule mucipare adulte, ma questo ci vien subito spiegato, più che da una maggior affinità per le sostanze coloranti, da una maggior compattezza del reticolo apparente formato dal muco.

Tra queste forme e le mucipare adulte troviamo tutti gli stadi di transizione, e così mentre alcune, pur conservando l'aspetto di questi piccoli elementi, hanno protoplasma e muco più abbondante, altre sono modificate in guisa da riprodurre in piccolo la forma delle mucipare adulte. Da queste naturalmente si differenziano perchè non sono ancora giunte a versare il loro secreto nel lume intestinale.

Per ultimo debbo accennare a una specie di elementi che si riscontrano prevalentemente nei fornici, e che hanno un aspetto caratteristico che a prima vista li differenzia da quelli che sinora ho descritto. Essi hanno a un dipresso la forma di un fuso, e nella porzione che sta tra il nucleo e l'estremo superiore, contengono dei granuli sferici che, scarsi nei dintorni del nucleo, vanno sempre più addensandosi man mano che da esso si allontanano. In quella porzione della cellula che è in diretto rapporto col lume intestinale spesso l'accumulo di essi è talmente fitto che ad un esame superficiale sembrerebbero formare un tutto omogeneo; se invece si pratica una attenta osservazione su sezioni sottili, ci si può facilmente convincere che i granuli stanno anche qui nettamente separati l'uno dall'altro (Fig. 6ª).

Trattando il preparato con safranina, ematossilina, Victoria-Blau i granuli si colorano come il muco delle solite cellule mucipare.

Tutte queste varietà di elementi che ho descritto nell'intestino dei telostei si riscontrano anche nello stomaco e nell'intestino dei selacidi; l'unica differenza consiste in ciò che in questi ultimi gli elementi hanno una lunghezza un po' minore, ma in compenso una maggiore larghezza, il che permette di meglio individualizzare, per così dire, ogni cellula, e distinguerne più nettamente i confini.

Premesse queste nozioni, vediamo come avviene la rigenerazione dell'epitelio intestinale.

Se si osserva solo la serie dei nuclei delle cellule sia protoplasmatiche che mucipare, non si trova alcuna figura di cariocinesi. Se invece si rivolge l'attenzione alla metà esterna dell'epitelio, a quella porzione cioè che sta fra la serie dei nuclei e l'orlo striato, vien dato frequentemente di trovare delle bellissime forme di mitosi (Fig. 2ª-*e*).

Ma in qual periodo si effettua questo spostamento del nucleo verso l'orlo libero dell'epitelio? Come si comporta il protoplasma della cellula che entra in mitosi rispetto al nucleo? Esaminando accuratamente le varie forme di mitosi si può agevolmente rispondere a queste domande.

In un primo stadio il nucleo della cellula che sta per scindersi si porta verso l'orlo libero di essa cosicchè il suo estremo inferiore è situato sopra l'estremo superiore dei rimanenti nuclei in riposo. Esso è leggermente ingrossato e presenta cromosomi più intensamente colorabili (Fig. 2ª-*d*). In un periodo successivo il nucleo passa allo stadio di gomitolo, ma, nel mentre si compie questa modificazione, si verifica un fatto curioso già descritto da G. Bizzozero nell'epitelio intestinale del Petromyzon Planeri; la base della cellula, cioè quella porzione che sta in diretto contatto colla membrana limitante della plica, si allontana gradatamente da questa seguendo lo spostamento del nucleo; cosicchè la cellula, mentre subisce una diminuzione del diametro longitudinale, aumenta nel trasversale, ed assume una forma dapprima ovale, indi rotondeggiante. L'elemento presenta così un aspetto caratteristico: il nucleo il più delle volte si trova spostato verso l'orlo libero della cellula, e il protoplasma, facendosi meno denso in quella parte che è in rapporto col nucleo, viene ad assumere una forma di mezzaluna colla concavità rivolta verso il nucleo stesso (Fig. 4ª-*a*). Alcune di queste particolarità si conservano nello stadio

successivo in cui il nucleo si scinde per dare origine al *diaster*. Si scorge allora che nella parte esterna del protoplasma cellulare, ossia rivolta verso la membrana limitante della plica, va formandosi una insenatura (Fig. 4ª-*c*), che sempre più si approfonda man mano prosegue il processo di scissione (Fig. 4ªd), dimodochè ad un certo punto la cellula primitiva è divisa in due metà, riunite però ancora nel loro estremo superiore da un lembo di protoplasma (Fig. 4ª-*e*) che va sempre più assottigliandosi finchè scompare del tutto. Hanno così origine due cellule figlie le quali, spingendosi colla loro estremità inferiore fra gli elementi in riposo e divaricandoli, si avvicinano alla membrana limitante ed acquistano così gradatamente i caratteri di cellule adulte.

Nella descrizione che sopra ho dato dell'epitelio intestinale ho accennato a piccole cellule che stanno racchiuse tra l'estremità profonde delle altre cellule. Anche in questi elementi ho trovato delle bellissime forme di cariocinesi che si distinguono naturalmente dalle altre perchè non sono situate verso l'orlo striato dell'epitelio bensì aderenti quasi alla membrana basale (Fig. 2ª-*f*).

Finalmente dall'esame di numerosissime sezioni ho potuto accertare, a piena conferma delle osservazioni di G. Bizzozero, che i focolai di rigenerazione dell'epitelio risiedono esclusivamente nei fornici. E di questo ci si può facilmente convincere esaminando specialmente pezzi in cui attivi sono i processi di rigenerazione. Si vedono allora abbondantissime le figure di scissione nei fornici (persino 4 o 5 per ciascuna sottile sezione di essi) mentre invano si cercherebbero nelle porzioni più alte della plica. Solo in qualche raro caso mi accadde di imbattermi in mitosi situate verso il punto medio della plica, ma nel grande numero di pezzi da me esaminati questo rappresenta una eccezione. Al disopra di questo punto i processi di rigenerazione sono completamente spenti; ed infatti, per quanto io abbia ripetuto scrupolosamente le mie osservazioni, non ho riscontrato nemmeno in un caso una cellula in cariocinesi.

Tutto ciò ci dà la ragione della differenza di dimensioni che esiste tra le cellule dei fornici e quelle delle porzioni alte. E per vero, avvenendo nei fornici la produzione di nuovi elementi, questi si trovano soggetti ad una pressione laterale la quale

naturalmente è tanto maggiore quanto più attivo è il processo di proliferazione. È precisamente in conseguenza di questa pressione che essi sono costretti a prendere una forma stretta ed allungata. Quanto più invece si allontanano dai focolai di rigenerazione tanto più diminuisce, pel continuo desquamarsi degli elementi vecchi, questa pressione e quindi, mentre il diametro longitudinale tende a diminuire, aumenta il trasversale.

Da tutto questo si deduce che nei fornici si trovano esclusivamente cellule giovani, dotate di vivace attività proliferativa; che queste cellule, man mano che invecchiano, s'innalzano sulla plica, spinte dagli elementi più giovani che vanno continuamente formandosi per scissione, finchè, arrivate vicino o addirittura sopra la sommità della plica, per legge fisiologica muoiono, si desquamano e vengono sostituite dagli elementi immediatamente sottostanti.

Supponendo che la rigenerazione delle cellule mucipare avvenisse in modo analogo a quella delle protoplasmatiche, rivolsi dapprima la mia attenzione alla porzione che sta fra la serie di nuclei e l'orlo libero della cellula. Ed infatti in essa m'imbattei in alcune bellissime cellule mucipare in mitosi, specialmente evidenti nell'epitelio dello stomaco dei selacidi (1) (Fig. 5ª). Come per le protoplasmatiche, in esse notai in un primo stadio lo spostamento del nucleo verso l'orlo libero della cellula che conserva sempre il suo blocco di muco nella sua estremità interna; ed in periodi successivi il suo passaggio allo stadio di gomitolo, di piastra equatoriale, e di *diaster*. Il muco, che in tutte queste fasi mantiene sempre la sua struttura reticolare caratteristica nei pezzi fissati in Zenker ed in Hermann, in talune cellule è perfettamente separato dal nucleo, in altre è con esso in rapporto solo per un piccolo tratto, in altre infine lo circonda in tutta la sua estensione. Debbo però subito notare che queste forme di mitosi sono piuttosto scarse e che se conducono alla formazione di qualche cellula adulta, non sono da sole sufficienti a darci la spiegazione della rigenerazione delle cellule mucipare.

---

(1) Credo opportuno insistere su quanto ho detto precedentemente, che cioè nei pesci, contrariamente a quanto si verifica nei mammiferi, non esiste apprezzabile differenza tra le cellule mucipare dello stomaco e quelle dell'intestino.

Una migliore spiegazione di essa l'abbiamo riferendoci alla descrizione che ho dato in addietro. Anche ad una osservazione non molto profonda risulta infatti evidente che le cellule adulte traggono la loro origine da quei piccoli elementi forniti di una gocciolina di muco che stanno applicati sulla membrana basale, e sono situati tra le estremità profonde delle cellule adulte. E questo mio modo di vedere è diviso da A. Pilliet (1) che così si esprime:

" On les trouve (cellules caliciformes) à tous les états de développement, étagées entre les cellules prismatiques; beaucoup ne sont pas arrivées à la surface libre et sont encore closes ".

Contro questa interpretazione si potrebbe bensì sollevare il dubbio che quelle piccole cellule non siano cellule mucipare in via di sviluppo, ma adulte, che, per aver svuotato il loro contenuto nel lume intestinale ed essere così rapidamente diminuite di volume, sono ricacciate dalla pressione delle cellule circostanti in basso verso la membrana limitante e costrette quindi ad assumere la forma degli elementi in parola.

Ma contro questa ipotesi stanno tre fatti:

1) Le cellule in questione si trovano quasi esclusivamente nei fornici ed alla base delle pliche là dove precisamente si trovano gli elementi più giovani; mentre, se fosse vera quell'ipotesi, dovrebbero trovarsi sparse indifferentemente per tutta la lunghezza della plica;

2) Le numerose osservazioni che sono state fatte sulle cellule mucipare dimostrano che, una volta svuotato il loro secreto, non vengono ricacciate in basso, bensì subiscono modificazioni solo nella teca le cui pareti vengono a collabire più o meno intimamente;

3) Non si potrebbe in alcun modo spiegare come cellule mucipare adulte, le quali, come abbiamo visto, sono così ricche di protoplasma, possano ridursi ad elementi in cui il protoplasma è così scarsamente rappresentato.

Un punto solo non ho potuto chiarire completamente, ed è questo: che non ho mai trovato alcune di tali cellule in mitosi.

Ma questo fatto si può spiegare in due differenti modi:

(1) " Bulletin de la Société zoologique de France ", vol. X, 1885, p. 305.

1) O le cellule in questione si rigenerano solo in determinati periodi ed io non ho avuto la fortuna di cadere in questi (e ciò è quanto accadde a G. Bizzozero studiando l'epitelio dell'intestino del tritone, dove non potè mai scoprire alcuna cellula mucipara giovane in scissione (1); mentre Sacerdotti (2), riprendendo qualche tempo dopo i medesimi studî, potè sorprendere parecchie delle suddette cellule in scissione cariocinetica);

2) Oppure non è escluso il caso che esse derivino alla loro volta da quelle piccole celluline situate fra l'estremità basali degli elementi adulti, le quali, come cellule indifferenti, sarebbero comuni progenitrici sia delle cellule protoplasmatiche che delle cellule mucipare. " Potrebbe darsi (per usare le parole di G. Bizzozero che molto bene si confanno al mio caso) che questi elementi indifferenti, vivacemente moltiplicandosi, forniscano delle generazioni di elementi, che pur continuando a moltiplicarsi, si avviano in due direzioni divergenti, e formano da una parte cellule protoplasmatiche, dall'altra cellule mucipare. A favore di questa supposizione ci sarebbe un argomento di analogia: nell'intestino dell'embrione non ci sono che cellule protoplasmatiche, sicchè le cellule mucipare devono avere origine da un successivo differenziamento di alcune di queste „ (3).

***

Sulla natura di quelle cellule granulose che sopra ho descritte non sono riuscito a formarmi un concetto sicuro. L'affinità dei granuli per le sostanze coloranti il muco tenderebbe a far ritenere ch'esse sieno cellule mucipare in via di sviluppo, in cui il muco sarebbe costituito da granuli che poi, fondendosi in un tutto unico, darebbero origine al muco delle cellule adulte, analogamente a quanto G. Bizzozero vide nell'intestino del tritone. Ma questo comportamento verso le sostanze coloranti è per sè solo sufficiente a dimostrare tale rapporto tra le due specie di

---

(1) Giulio Bizzozero, *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico, ecc.* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Nota 3ª, pag. 25, vol. XXVII, 1892.

(2) C. Sacerdotti, Id., vol. XXXI, 1896.

(3) G. Bizzozero, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Nota 7ª, pag. 17, vol. XXVIII, 1893.

elementi? Ritengo questa ipotesi poco sostenibile. Anzitutto è bensì vero che detti granuli hanno affinità pei colori proprî del muco, ma occorre ancora notare che essi ordinariamente si colorano col Victoria-Blau con un' intensità assai maggiore di quanto non avvenga pel muco delle cellule adulte; e neppure il fatto che granuli e muco si colorano ugualmente con dette sostanze coloranti basta per far ritenere che quelli sono della stessa natura di questi; poichè i granuli che si trovano abbondanti nel pancreas dei medesimi pesci, quantunque di costituzione affatto diversa, si tingono col Victoria-Blau e colla Safranina nell'identica maniera dei granuli delle cellule in parola. Ed ancora se questi granuli rappresentano del muco giovane perchè sotto la medesima forma non si presenta il muco di quei piccoli elementi che costituiscono il primo stadio delle mucipare adulte? Nè d'altra parte mi è stato dato di osservare il graduale passaggio da queste cellule alle comuni mucipare quale invece descrisse e disegnò G. Bizzozero nell' intestino del tritone. Infine, se le cellule in parola sono per lo più situate nei fornici, accade qualche volta d'incontrarne qualcuna anche nella parte alta della plica, reperto che, per quanto sinora sono venuto esponendo, depone contro la giovinezza di quegli elementi.

Pertanto, senza voler dare un giudizio definitivo sulla questione, ritengo come ipotesi non del tutto priva di fondamento che tali granuli rappresentano un fermento secreto da determinate cellule, simile a quello che si osserva nelle ghiandole salivari sierose e nel pancreas in alcuni periodi della loro funzionalità.

Al Prof. Sacerdotti che, con affettuosa premura s'interessò a queste mie ricerche, esprimo pubblicamente i sensi della mia più profonda gratitudine.

Istituto di Patologia Generale di Torino,
diretto dal Prof. C. Sacerdotti.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1ª. — Plica di intestino di *Barbus plebejus*:
a) strato di fibre muscolari liscie longitudinali;
b) strato di fibre muscolari liscie trasversali;
c) connettivo della mucosa;
d) epitelio.
Liquido di Zenker. Carmino allume, Victoria-Blau. 150 diam.

Fig. 2ª. — Epitelio intestinale di *Barbus caninus* alla base della plica:
a) piccole cellule, a scarso protoplasma, situate fra le estremità profonde delle cellule adulte, di cui una in mitosi (*f*);
b) cellula mucipara adulta;
c) cellule mucipare giovani, in via di sviluppo;
d) nucleo di cellula protoplasmatica nel 1° stadio della scissione;
e) mitosi di cellule protoplasmatiche;
g) leucociti.
Liquido di Hermann. Safranina ed ematossilina Bizzozero. 550 diam.

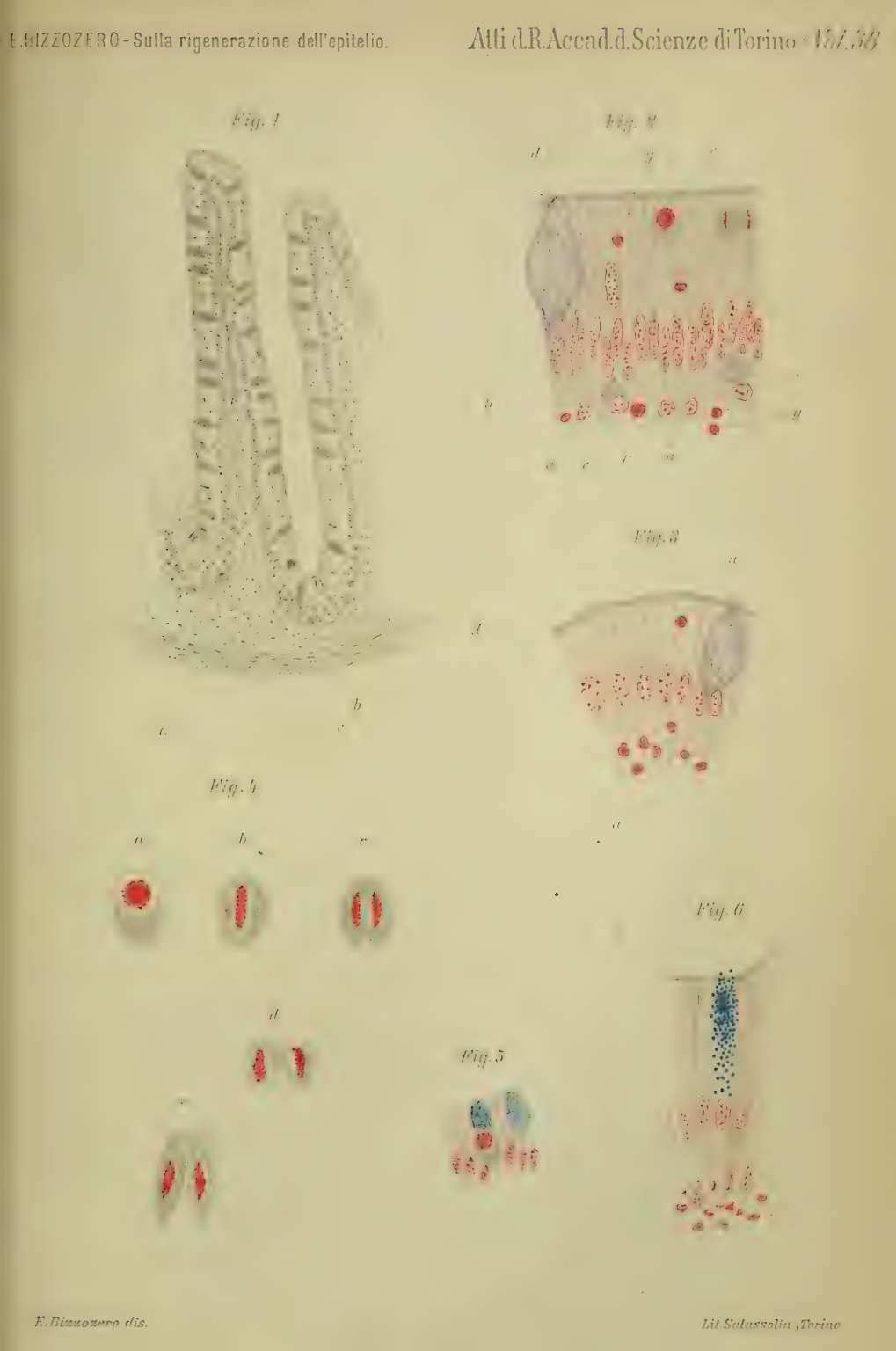
Fig. 3ª. — Epitelio intestinale di *Barbus caninus* sulla sommità della plica:
a) leucociti.
Hermann. Safranina, Ematossilina Bizzozero. 550 diam.

Fig. 4ª. — Varî stadî del processo di scissione della cellula protoplasmatica. 1000 diam.

Fig. 5ª. — Mitosi di cellula mucipara. Stomaco di *Scyllium canicula*. Zenker. Carmino allume, Victoria-Blau. 500 diam.

Fig. 6ª. — Cellula a granuli. Intestino di *Barbus plebejus*. Zenker. Carmino allume, Victoria-Blau. 550 diam.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.



F. Bizzozero dis. Lit. Salussolia, Torino

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Giugno 1903.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Pezzi, Carle, Graf, Boselli, Cipolla, Brusa, Allievo, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 31 maggio 1903.

Il Presidente partecipa le condoglianze pervenute da Autorità, Corpi morali e scientifici, private persone, per la morte del Socio Bollati di Saint-Pierre. Dà lettura d'una lettera del Socio Manno, con la quale comunica d'essersi inteso col Socio Cipolla, che commemorerà all'Accademia il defunto Socio di Saint-Pierre, mentre egli lo commemorerà alla Deputazione di Storia Patria.

Il Socio Boselli commemora il rimpianto Socio non residente Luigi Cremona, considerando l'opera sua nel campo della pubblica istruzione, colle seguenti parole:

L'altra classe della nostra Accademia onorò degnamente di compianto e di lode la memoria illustre di Luigi Cremona, mercè la parola dotta e perspicua del nostro illustre Presidente. Nella commemorazione del Presidente D'Ovidio si legge: " Come membro e Vice-Presidente così del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, come del Senato del Regno, come Ministro (pur troppo per meno di un mese) il Cremona esercitò continua,

salutare ed autorevolissima azione a pro delle scuole medie e superiori difendendone sempre la dignità e promovendone il progresso „.

Mi conceda la classe nostra aggiungere, nel consentire appieno in simile giudizio, alcuni cenni i quali non toccano propriamente i meriti insigni e nuovi dello scienziato, ma sì quella parte dell'ingegno e dell'opera ch'egli rivolse in modo eminente all'elevazione e all'ordinamento degli studî nel nostro paese. Per quest'aspetto egli ci appartiene e il suo elogio si collega a quelle tradizioni che condussero spesso i nostri lavori accademici a illustrare la storia e le ragioni degl'istituti universitarî. Non solo io penso a ciò che egli fece sotto gli occhi di tutti, a ciò ch'egli sempre volle nel Consiglio Superiore, a ciò ch'egli disse in Senato, oratore creduto ed efficace: ma sento vivo il ricordo di ciò che vidi e seppi di lui in pubblici ufficî da me sostenuti. Per essi io conobbi quanto in quest'uomo, cui era presente ogni disciplina, cui era palese ogni intento dei buoni insegnamenti, valesse la scienza della scuola, quanto fosse lo zelo per renderne sicuri e vigorosi i progressi. Tornava prezioso il suo consiglio, porgevasi la sua cooperazione tanto sollecita, quanto sincera. Era ad un tempo un conservatore esatto e un riformatore sagace. Ben osservò nella sua Commemorazione l'esimio nostro Presidente: " il Contro-progetto di legge del Cremona sull'istruzione superiore è opera in molte parti egregia e degna di attenzione „. Sulle sue traccie si sarebbe potuto raggiungere quel verace rinnovamento universitario ch'è troppo discusso e non è mai conseguito. Per ciò mi avviso potersi affermare che Luigi Cremona fu, nei tempi nostri, colui che possedeva compiutamente le qualità più atte ad esercitare, in grado esemplare, la funzione di supremo reggitore degli studî, per la quale frettolosamente passò travolto in una crisi politica, che per niun modo era sua. Passò frettolosamente ma non senza far avvertire la sua presenza da quanti amano l'alta coltura e il forte ritemprarsi di tutte le esplicazioni che meglio la raffigurano.

In lui la cognizione analitica e precisa delle instituzioni scolastiche appariva governata e illuminata da un'intuizione complessiva ed armonica dei principî che distinguono, coordinano e afforzano i diversi rami di quell'unico tronco che rappresenta l'umano sapere.

A ben discernere lo conduceva l'acume pronto, a ben valutare la robusta coltura, a ben decidere un ponderato ed equilibrato criterio. Serbavasi rigido osservatore delle regole direttive dell'insegnamento perchè aveva l'ordine chiaro e saldo nel pensiero e perchè dell'insegnare sentiva il magistero in quanto è religione di scienza, dovere di vita civile, fondamento di pubblica dignità. Congiungeva all'idea scientifica la virtù patriottica. A significare come egli sentisse della patria, per la quale sempre valorosamente operò, rammentiamo con quale accento, dove vibrava tutta l'anima sua, nel 1898 (glorioso giubileo, tristi giorni), egli abbia parlato nel Palazzo Madama, in nome del Senato del Regno, al cospetto dei Sovrani e dell'Italia.

Lo stesso Socio Boselli fa omaggio delle seguenti pubblicazioni:

1° *Atti del IV Congresso nazionale delle Società economiche tenutosi in Torino,* 1ª sessione, Torino, 1902; 2ª sessione, Torino, 1903.

2° Augusto Bosco, *I divorzi e le separazioni personali. Studio di demografia comparata.* Roma, 1903.

Dalla Presidenza è presentato il 3° volume della suntuosa opera mandata in dono dal Socio corrispondente conte Luigi Palma di Cesnola: *A descriptive Atlas of the Cesnola collection of Cypriotte Antiquities of the metropolitan Museum of Art New York.* New York, 1903.

Il Socio Allievo legge la relazione intorno al lavoro del prof. Romualdo Bobba, *Esame critico dell'opera del sig. Jules Gaultier intitolata " Da Kant a Nietzsche „,* sul quale fu incaricato di dar giudizio insieme col Socio Chironi. La relazione, favorevole, che è inserita negli *Atti*, è approvata. Approvasi pure l'inserzione dello scritto nelle *Memorie.*

Per la pubblicazione negli *Atti* sono presentate le seguenti note:

1° dal Socio Allievo alcune sue pagine intitolate: *Oltre il mistero;*

2° dal Socio Chironi: Mario Ricca-Barberis, *Sugli effetti della disposizione relativa al proprio cadavere;*

3° dal Socio Cipolla: Francesco Bazzi, *Spigolature storiche sull'assedio di Verrua (1704-1705);*

4° dal Socio Renier, a nome del Direttore della Classe Ferrero: Ugo Giri, *Valeriano juniore e Salonino Valeriano.*

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata, elegge a far parte della Giunta per la Biblioteca il Socio Manno. Quindi procede alla elezione di Soci residenti e di Soci corrispondenti.

Riescono eletti a Soci nazionali residenti, salvo la Sovrana approvazione, i signori Gaetano De Sanctis e Francesco Ruffini professori nella R. Università di Torino.

A Soci corrispondenti vengono nominati i seguenti:

nella Sezione di scienze filosofiche:

Prof. Filippo Masci della R. Università di Napoli;

nella Sezione di scienze giuridiche e sociali:

Prof. Pietro Bonfante della R. Università di Pavia;

nella Sezione di scienze storiche:

Prof. Andrea Gloria della R. Università di Padova;

nella Sezione di geografia ed etnografia:

Prof. Filippo Porena della R. Università di Napoli;

nella Sezione di filologia, storia letteraria e bibliografia:

Prof. Francesco D'Ovidio della R. Università di Napoli;

Prof. Francesco Novati della R. Accademia scientifico-letteraria di Milano;

Prof. Vittorio Rossi della R. Università di Pavia;

Prof. Giuseppe Boffito nel Collegio della Querce in Firenze;

Cav. Giuseppe Biadego bibliotecario della Civica di Verona;

Prof. Vittorio Cian della R. Università di Pisa.

LETTURE

Oltre il mistero.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

I.

Romanzo di Enrico Sienkiewicz.

Enrico Sienkiewicz va segnalato fra i più celebrati scrittori, che vanti la letteratura europea contemporanea. Il calore dell'affetto, la potenza della fantasia descrittiva, la lucidità dell'intuizione, la nobiltà ed elevatezza del pensare e del sentire, sono i più cospicui pregi, che risplendono ne' suoi lavori. Egli deve segnatamente al suo *Quo vadis?* la rapida celebrità, che acquistò in Italia; ma fra i suoi romanzi psicologici tiene un cospicuo posto quello che è inscritto *Oltre il mistero* (1).

Il titolo medesimo di questo libro mostra un altissimo significato psicologico e pedagogico, perchè accenna alle più intime profondità dell'anima ed alla sua destinazione suprema. Il mistero stende un certo qual velo su tutte le cose create e proietta le sue ombre anche attraverso i più sereni avvenimenti della vita, le più limpide speculazioni della scienza. Da per tutto, in noi e fuori di noi scorgiamo la chiarezza frammista coll'oscurità, la luce offuscata dalle tenebre. L'autore spinge il suo sguardo *oltre il mistero*, e ci ritrae in forma drammatica la lotta di un'anima, che sospesa tra il dubbio, che dissolve, e la fede, che conforta, va errando in cerca del suo ideale e non lo raggiunge mai.

Il protagonista del romanzo, Leone Ploszowski, è un giovane polacco dai nervi stanchi, dall'anima invecchiata. Egli, che

(1) I due primi capi di questa monografia, riguardanti il romanzo del Sienkiewicz, appartengono ad un altro mio lavoro inedito intitolato: *Del romanzo psicologico educativo.*

ha perduta la fede nella felicità e sente la stanchezza della vita, ama Angela, anima tutta freschezza, tutta fede in Dio e nell'umanità, e si dimanda: ho io il diritto di sposarla? In questa interrogazione, che la coscienza del giovane muove a sè medesima, si nasconde tutto il significato del dramma psicologico, che si svolge nelle pagine del volume. Questa dimanda avrebbe un'alta ragione, che la giustifichi, se da quell'unione conjugale avesse da rifiorire la redenzione morale di Leone. Ma egli è consapevole, che anche vicino ad Angela il suo cuore non risorgerà ad una seconda giovinezza, che la sua anima non ritornerà più dallo scetticismo alla fede, che il suo alito corrotto inaridirà il fiore di quella vita angelica. Eppure vuol farla sua. Così il sacrificio di Angela va a perdersi nella tomba di due infelici e si risolve in un mostruoso connubio della fede, che non rigenera, e dello scetticismo che trionfa. In questo conflitto tra l'impotente idealità dell'amore e la persistenza dissolvente del dubbio si scorge il concetto dominatore di questo romanzo.

La lotta si svolge aspra, continua, disuguale, confortata talvolta dalla speranza nel meglio e dalla inspirazione dell'ideale, più spesso funestata dal disinganno e dal dubbio. Angela conserva la purezza verginale dell'anima e la fede in Dio: davanti alla sua celestiale bellezza Leone si sente rinascere all'alito di una vita novella, e spera e crede; ma il dèmone dello scetticismo, che gli sta accovacciato in fondo dell'anima, lo trascina al basso. In quest'alternata vicenda di generose aspirazioni e di infelici ricadute giunge per lui un momento di diffidenza e di sospetto, di indifferenza e di lontano abbandono di colei, che pur voleva far sua, e parte per lontani paesi; fu questo un momento psicologico decisivo nelle sorti della sua esistenza. Perchè la fanciulla così lungamente abbandonata si sentì da lui disamata e cedendo al cieco dispetto ed al dolore si lasciò andar sposa a Kromicki, anima volgare, chiusa ad ogni nobile e puro affetto, ignobile affarista, gaudente sfondolato. Anche per lei fu questo un solenne momento psicologico, perchè mentre ella consacrava la sua persona al dovizioso signore, il suo cuore batteva pur sempre secretamente pel giovane polacco, e questa unione conjugale spezzava la sua vita lacerata da un'atroce contraddizione.

A questo punto il dramma psicologico tocca il parossismo

della passione ed assume la forma tragica della catastrofe. L'aborrito conjugio ridesta nel cuor di Leone l'antica fiamma. Egli discute tra sè e sè, se abbia diritto di deviar dal dovere la signora Kromicki; ritorna in paese e colla forza di un amor disperato tenta di conquistar la persona di Angela, che appartiene ad altri, la persegue, la raggira sino ad insidiare alla sua onestà conjugale, seminando nell'anima di lei l'idea dell'adulterio. Essa si mantiene moglie incolpabile, come si era serbata fanciulla pudica ed incorrotta; ma non si tiene chiuso nel secreto del cuore l'affetto sempre vivo pel giovane infelice, con lui si intrattiene in solitarie passeggiate, in intimi colloquii, accoglie le sue confidenti aspirazioni e risponde con una parola d'amore.

Mentre stanno così scherzando insieme sull'orlo dell'abisso, giunge notizia che Kromicki accusato di scrocco, colpito da processo si è troncata la vita. Angela è libera della sua persona; Leone sogna di celebrare sulla tomba del marito l'imeneo della sua felicità lungamente sospirata. Illusione! L' infelice vedova cade affranta da morbo letale, che lentamente la consuma e la trae al sepolcro. Angela non è più. Leone ripiomba nell'abisso del suo disperato scetticismo, e finisce col suicidio, a cui già altra volta aveva rivolto il pensiero.

Tale è la generale orditura del romanzo condotto con temperanza di passione, con correttezza di pensiero, con soavità di affetto, che attrae e commuove. Le figure di Leone e di Angela rifulgono di tanta luce e spirano tanta naturalezza, che ci stanno davanti coll'atteggiamento di persone vive e parlanti. Dall'uno e dall'altra si muove uno spirito soave, che educa ed ammaestra per vie diverse ed in certa misura. Angela educa colla sua fede nel principio religioso della santità del conjugio, che la salva dalla caduta; Leone ammaestra coll'infelice esempio del suo dubbio, che gli tortura l'anima, che sofistica sull'amore, lo snatura e lo inaridisce. Egli non è nè uno scettico assoluto, nè uno schietto credente, ma dubita oscillando di continuo tra la fede religiosa ed il pessimismo disperato: ha de' momenti, in cui il suo cuore sente in sè la divina presenza del Redentore dell'umanità e si apre alle speranze immortali, poi dispera di tutto. Nella sua ora estrema egli scrive: " Avrei potuto esser la tua felicità, e non ti ho dato che pene!... Son io la causa della tua morte!... Lascio la mia fortuna a tua madre; a mia zia l'ima-

gine del Cristo, dalla cui misericordia infinita trarrà le supreme consolazioni „. Anche questa preziosa confessione è una voce della coscienza, che ammaestra col pentimento. Egli riconosce che coll' anima inaridita dall' egoismo scettico qual' era la sua, non aveva diritto di vincolare alla sua esistenza una fanciulla, che pur sapeva di rendere infelice, nè tanto meno di gettare il turbamento nel cuore di una giovane moglie, strappandole una parola di amore.

L'autore avrebbe meglio provveduto all'efficacia educativa del suo romanzo, se l'amore di Angela avesse trionfato dello scetticismo di Leone riconducendolo alla fede nell'idealità. Ma anche il carattere di Angela, quale esempio di pudica fanciulla e di moglie incolpabile, è oscurato da qualche macchia. Essa sposa Kromicki per dispetto verso Leone, che si era da lei allontanato partendo per terre lontane. Ciò prova che il suo amore non era profondo e potente sino al sacrificio. Moglie altrui, vive in intimità di amore col giovane, mentre a quell'unione conjugale nessuno l'aveva forzata. L'autore ce la ritrae come donna incolpabile, che non rompe la fede conjugale; ma egli spinge la sua confidente famigliarità ed intima convivenza con Leone a segno, che la sua caduta diventa inevitabile nel processo ordinario della natura umana. Non si scherza impunemente sull'orlo di un abisso. Per questa ragione il carattere di Angela può compromettere il suo imitabile esempio, esercitando un'attrattiva equivoca sull'animo del lettore.

Il romanzo, che abbiamo rapidamente esaminato ne' suoi punti più sostanziali, risplende di molti pregi psicologici e pedagogici per il soave affetto, che traspare dalle sue pagine, per lo studio delle passioni, che agitano il cuore umano, e segnatamente perchè vi si sente la solenne gravità del problema della vita futura. Ma la conclusione è veramente desolante. Leone termina violentemente la giornata della sua vita prima che sia suonata l'ultima ora, prima che il Signore lo chiami a sè. Angela è morta, ed egli si precipita dietro a lei e la segue al di là della tomba, rivolgendole queste ultime parole: " Credi che io non tema innanzi al trapasso? Oh, no: io ho paura della morte. Ignoro che cosa è il di là: non vedo che tenebre senza fondo, e rabbrividisco innanzi a tale abisso. Non so se questo è il nulla, o qualche forma di esistenza fuor dei limiti di spazio

e di tempo, o infine, un soffio interplanetario, che portando via le anime nostre di stella in stella, le inizii a novelli destini. Non so se vi troverò l'eterna disperazione o il riposo eterno, assoluto, infinito, come l'onnipotenza, l'onnibontà divina „. Il nostro autore pubblicava il suo celebratissimo romanzo *Quo vadis?* Dove vai? Questo altro romanzo *Oltre il mistero* risponde alla domanda: Dove io vada, *non so.* A Leone torturato dal dubbio di oltre tomba non regge l'animo di lasciare sola laggiù la sua Angela, e colla mano suicida sforza le porte dell'eternità, incerto se s'inabisserà nel nulla con lei, oppure seguirà insieme la stessa eterna via.

Questa conclusione scettica consuona collo spirito pessimista di Leone, ma non si concilia punto, nè col culto devoto verso la sua amante, nè colla ragione. Il vero e costante amore, come ben disse la Stäel (1), si regge sulla credenza nell'immortalità; epperò Leone, in cui questa fede era corrosa dal dubbio, non poteva amare Angela di vero e profondo amore, non poteva tenere in alto pregio la sua persona, incerto dove mai la mano della morte l'avrebbe travolta. La ragione poi non gli consentiva di avvolgere in uno scetticismo universale tutti i pensamenti riguardanti la vita futura, poichè se gli è vero che essa si chiarisce impotente a porgerci un concetto lucido e sicuro della nuovissima forma di esistenza, che rivestirà l'io umano, non è men vero che può dimostrare fuor d'ogni dubbiezza la sua vita oltremondana (2). In questo solenne argomento è somma necessità sceverare quanto vi ha di vero e di sodo dall'incerto e dal problematico, riconoscere il punto luminoso anche in mezzo alla caligine, che lo offusca, confortati dalla speranza che le ombre del mistero saranno dissipate dal sole della verità.

II.

Il Cristianesimo e la vita oltremondana.

Nel romanzo del Sienkiewicz Leone è la ragione umana, che sfiduciata delle proprie forze spinge lo sguardo *oltre il mistero* della tomba, e rimane incerta se la nostra personale esi-

(1) *Delfina*, parte terza, lettera XIV.
(2) Vedi la mia Memoria: *La vita oltremondana*, pag. 63.

stenza vada a perdersi negli abissi del nulla, oppure rivesta una nuova forma di vita indefinibile. Veramente la ragione anche abbandonata a se sola può spingersi più oltre, può pronunciare una parola la quale ci rassicuri che al di là di questo terreno orizzonte si stendono altre regioni, che ci attendono; ma se può intravedere da lontano la terra promessa, non le è dato di ritrarne la topografia e misurarne l'ampiezza. Era necessario che l'uomo, creatura divina, apprendesse da Dio donde egli venga e dove vada: era necessario che la ragione umana venisse informata dalla ragione divina, che uomo e Dio si ricongiungessero insieme senza punto confondere le loro nature; era necessario che Cristo, l'Uomo-Dio, apparisse quaggiù, e Cristo apparve. La sua incarnazione è il ritorno dell'uomo a Dio suo creatore; la sua persona è il tipo vivente di ogni perfezione umana: la sua parola è la rivelazione della verità, che illumina ed infiamma; il sacrificio della sua vita è la redenzione della stirpe di Adamo; la sua risurrezione è la risurrezione e la vita dell'umanità (1). Cristo discendeva nel sepolcro per rialzarsi redivivo: epperò *oltre il mistero* della tomba non rimane il nulla o l'ignoto, ma sta la divina figura di Cristo risorto. Così il Cristianesimo illumina di nuova vivissima luce il grave problema dell'oltre tomba e proclama che morendo rinasceremo alla vita in tutta l'integrità del nostro io personale, come Cristo risorse tutto quanto, anima e corpo. Il Dio del Cristianesimo *non è il Dio de' morti, ma de' vivi* (2).

Il concetto cristiano della vita futura oltremondana mostrasi indissolubilmente intrecciato col concetto della vita presente terrena; nel che apparisce la vasta comprensione e sublimità della dottrina del Cristianesimo. Esso afferma il pregio infinito di un'anima umana, proclama la salute dell'anima siccome cosa che sovranamente ed essenzialmente importa, e ripone la salute dell'anima nella vita eterna, val quanto dire nel vivere in Dio e con Dio senza punto cessare di vivere in noi e con noi, vivere quaggiù nella fede, che conforta e rassicura, nella grazia divina, che santifica, vivere lassù non più nella fede, ma

---

(1) *Ego sum resurrectio et vita*, disse Cristo di se medesimo. Vangelo di San Giovanni (XI, 25).

(2) Vangelo di San Marco, capo XII, 27.

nella visione divina, che bea, non più nella grazia, ma nella gloria, che india. Al futuro e perfetto possesso di Dio non si perviene, se di presente non si ama davvero Dio, il Padre nostro che è ne' cieli, ed in Dio gli uomini tutti, nostri fratelli. La vita terrena è il passaggio del deserto, che mena alla terra promessa.

La morale cristiana è la sacra carta itineraria, che guida i passi del pellegrino, il quale varca la terra dell'esilio, avviandolo alla patria. Essa attinge il suo alto significato da questa intima attinenza, che la intreccia colla vita futura, a cui va a mettere capo. Gli è sotto questo specialissimo aspetto che rivela il suo intrinseco contenuto, e che mostra la sua essenzial differenza dalla morale pagana. La morale cristiana va tutta in servigio della vita oltremondana, mentre la morale pagana andava tutta in servigio della vita terrena. Se non si contempla da questa sua sublime altezza, non solo si corre pericolo di fraintenderne la vera natura, ma non si sa più vedere il perchè essa prescriva la mortificazione della carne, proclami la necessità della grazia sopranaturale, consigli l'ascetismo e certe pratiche di pietà, che sono in aperto conflitto colla corrotta natura. Non per ciò essa disconosce o rinnega le giuste esigenze della vita presente; che anzi in certo qual modo le consacra e collegandole colla esistenza oltremondana conferisce ad essa un pregio ed un valore altissimo, che, riguardata esclusivamente in se stessa, non potrebbe avere. I liberi pensatori contemplando il Cristianesimo attraverso la lente della pura ragione pagana, ne vilipendono la dottrina dogmatica e morale; ma con ciò mostrano di non averne penetrata con profondità di pensiero l'intima natura. Nello studio di questo altissimo problema, che interessa le sorti di tutta l'umanità, la ragione antica pagana si mostrò vacillante e discorde, perchè pressochè tutta intenta alle cose di quaggiù mal seppe scrutare le arcane attinenze, che collegano la vita presente colla futura. " La storia ci mostra l'uomo dappertutto e sempre inquieto del futuro. Alle questioni fatte su tal proposito, il vasto Oriente ne ha data una risposta lugubre, nella quale in sostanza non abbiamo trovato altro che la speranza di riposo, di un sonno profondo non turbato da sogni e senza risvegliamento. In Grecia, oltre le leggiadre fantasie del popolo, noi abbiamo trovato la parola dei savi. Questi

hanno renduto alla natura umana de' servigi segnalati; ed han pure messo in chiaro qualcuno dei titoli di nostra nobiltà e dimostrato la natura spirituale del principio pensante; ma per rispetto a quel, che sarà dell'esser nostro personale, anzichè assentire a quanto se ne affermò in modo preciso, invece hanno esitato, ritenendo per ultimo spediente, l'idea che la vita futura ha sì poco valore che, dovendo ella terminare nel nulla, e' sarebbe ancora dolce il morire. È Socrate, che parla così; ed io me ne sono sempre stupito... È ben l'istesso Socrate che dichiara come pochi tra i più bei giorni valgono quanto il riposo del sonno „ (1).

Il Cristianesimo presenta una dottrina così stupenda nella sua armonica struttura, così vasta nella sua comprensione, così profonda e sublime nella sua sapienza, che desta l'ammirazione ed impone il rispetto. Irraggiando dalla ragion divina e dalla ragione umana, esso ha dischiuso al pensiero speculativo nuovi e più luminosi orizzonti, ha ricreato il genio degli artisti, ha inspirato il cantore della vita oltremondana Dante Alighieri, che nel suo divino poema ritrasse con una potenza d'immaginazione insuperabile i nuovi cieli e la nuova terra, riservati alle anime dei trapassati. Certamente la luce divina del Cristianesimo non ha dissipati tutti i punti oscuri, che velano il problema dell'oltre tomba, nè la ragione umana, finchè si svolge entro l'ambiente di questo materiale universo, mai giungerà ad una lucida e comprensiva conoscenza della seconda vita. Il Cristianesimo non esclude il mistero: la fede è *lucerna lucens in caliginoso loco* (2). E che perciò? Anche il cuore umano, anche la scienza hanno i loro misteri, tantochè percorrendo il mondo del pensiero e della vita ci troviamo ad ogni piè sospinto in faccia all'arcano ed all'ignoto.

Il razionalista, pur costretto a riconoscere l'ignoto e l'inconoscibile, verrà fuori colla trita e ritrita e volgarissima distinzione tra i misteri della fede ed i misteri della scienza, quelli rigettando perchè contraddicono alla ragione, questi accettando perchè la trascendono, ma non la urtano. La distinzione non approda nè punto nè poco. Egli gratuitamente asserisce, ma non ha dimostrato,

---

(1) Ernesto Noville, *La vita eterna*, discorso sesto.

(2) S. Pietro, Epistola 2, cap. 1, v. 19.

che il dogma cristiano contraddice alla ragione tanto da escludere ogni elemento intelligibile e riuscire assolutamente inconcepibile od inconoscibile sotto ogni riguardo, quale sarebbe l'assurdo di un triangolo di quattro lati, o di un circolo rotondo. Il mistero cristiano non è un assurdo, ma una verità in parte incomprensibile, e la verità non può essere contraria alla ragione. Leibnitz, quel gran metafisico, che tutti sanno, dettò un prezioso opuscolo intitolato *Della conformità della fede con la ragione*, nel quale lasciò scritte queste parole: " Quando vien contrapposta la ragione a un articolo di nostra fede, non dobbiamo prenderci niuna briga delle obbiezioni, le quali non riescono in fine ad altro, che ad argomenti di sola verisimiglianza; e già tutti consentono, che i Misteri sono alle apparenze contrarii, e non hanno, chi li riguardi dalla parte della ragione, nulla di verisimile; ma ben è sufficiente, che non ammettano in sè niun assurdo... Una verità non può all'altra essere contraddittoria; e il lume della ragione è altrettanto un dono di Dio, quanto è quello della rivelazione „.

Si va ripetendo dai razionalisti, che i risultati, a cui è pervenuta la scienza, sono inconciliabili colle credenze nell'ordine sopranaturale, su cui posa il Cristianesimo, e che la critica moderna ha sfatato la dogmatica cristiana intorno l'eternità della vita oltremondana, relegandola fra le fole della superstizione volgare, sicchè uno spirito colto, un serio pensatore disdegna di appartenere alla schiera de' credenti. Ma di grazia non iscambiate le vostre asserzioni gratuite, le vostre malferme ipotesi coi teoremi scientifici rigorosamente dimostrati, voi, che pretendete di rappresentare la vera e propria scienza, come se fosse vostro privilegio speciale, anzichè patrimonio di tutte le menti speculative. Quanto alla critica, statevene in guardia voi stessi; chè non èvvi sistema filosofico, il quale non sia caduto infranto sotto il suo martello demolitore (1). Infine voi guardate con aria di compassione il credente in Cristo come una povera ed idiota intelligenza; ma quanti spiriti di vasta e profonda

(1) Intorno a quest'argomento merita di essere letto un opuscolo seriamente pensato di Giuseppe Ghiringhello e pubblicato nelle " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, col titolo: *La critica scientifica ed il sovrannaturale.*

coltura, quanti pensatori potenti ed originali non registra la storia, i quali riconobbero l'impronta divina nella dottrina del Cristianesimo e prestarono il loro riverente ossequio alla parola del Redentore dell'umanità! Quel forte e sereno pensatore, che è Ernesto Noville scrisse ed io ripeto con lui: " Sento dire che in un'età a noi più vicina, alcuni tenenti la cima del sapere nell'istoria e nella filosofia, vollero discendere fino a credere, adorare e pregare con gli umili. Ora io mi dichiaro assolutamente di appartenere alla società di questi illustri trapassati, se mai qualche bello spirito o scienziato moderno, contrassegnandomi come uno di animo gretto, mi chiude, di sua propria autorità, la porta della scienza e mi dichiara indegno di sua dotta compagnia „ (1).

III.

Il Cristianesimo e l'amore.

Nel romanzo del Sienkiewicz Leone rappresenta lo scettico, che *oltre il mistero* non vede che fantasmi e buio. Angela personifica l'amore, che tocca un cuore inaridito dal dubbio, ma non lo rigenera alla fede. Abbiamo veduto come il Cristianesimo diffondendo un raggio di luce divina sulle tenebre della tomba rassicuri l'esistenza della vita oltremondana contro la ragion scettica, che la mette in forse. Ora viene il considerare come l'amore informato dal Cristianesimo risalga alla sua celeste origine e riacquisti una virtù rigeneratrice, che vien meno alla corrotta natura umana. S' intende da sè, che qui prendiamo l'amore in senso proprio e stretto, qual è la corrispondenza di affetto tra l'uomo e la donna, inspirata dalla natura medesima de' due sessi.

Leone ama la donna altrui ed è riamato da Angela legata dal dovere del conjugale affetto. Se ciascuno avesse tenuto chiuso negli intimi penetrali dell'anima l'amore sentito, ma non espresso, chi oserebbe condannarli? Anche il cuore ha i misteri suoi proprî, come la ragione. Ma qui abbiamo un amore corrisposto, in cui i sensi esterni intervengono a mettere a contatto fra di loro due cuori ed alimentarne la fiamma, mentre l'affetto conjugale

(1) *La vita eterna,* discorso IV verso il fine.

ne rimane ferito. Certo è, che l'amore umano emerge dall'intima corrispondenza di un organismo sensitivo e di un principio spirituale, per cui essenzialmente si differenzia sia dall'amore dei bruti fondato sulla mera animalità, sia dall'amore degli angeli, quale noi ce lo possiamo immaginare, alimentato dalla pura spiritualità. Quindi è che le anime anche pure non possono rivelarsi il loro amore senza il ministero del loro organismo corporeo, nè mantenere la loro corrispondenza amorosa senza una certa qual convivenza esteriore delle persone (1). Ma entro quali confini va ristretto l'ufficio de' sensi fisici, affinchè l'amore risponda alla dignità della natura umana? Quali sono i diritti e le ragioni del cuore, e fin dove deve spingersi il sacrificio del piacere sensuale, affinchè la passione non trionfi sul dovere e l'amore si mantenga incolpabile ed immacolato?

La filosofia platonica faceva distinzione tra la Venere celeste e la Venere terrena, ossia tra l'amore purissimo e l'amore sensuale. Quello è l'amore della bellezza psichica riposta nella purezza dell'anima, questo è l'amore voluttuoso della bellezza corporea. Questo concetto platonico della Venere celeste informava l'amore cavalleresco del medio evo, in cui la bellezza della persona veniva spiritualizzata, e la donna, che rispondeva all'affetto ideale del suo innamorato, non era riguardata siccome colpevole di aver tradito la fedeltà conjugale. Dalle *Mémoires de l'Académie des inscriptions*, vol. XX, p. 413, apprendiamo che Agnese di Navarra, poetessa contemporanea del Petrarca, scrisse versi di amore al poeta francese Guglielmo di Mathaut; eppure conservò agli occhi del mondo e del marito fama di virtuosa principessa.

L'antica sapienza distingueva la Venere celeste e la Venere terrena o volgare. Noi moderni ammaestrati dalla sapienza di Cristo distinguiamo l'amore naturale e l'amore cristiano, come ammettiamo una ragione naturale ed una ragione cristiana.

---

(1) " ...In quelli, tra' quali passa un reciproco amore onesto (così parla Socrate presso Senofonte nel *Convito* al cap. V), come mai non sarà una necessità di vedersi scambievolmente volentieri, di discorrere amorevolmente insieme, di prestarsi una vicendevole fede, di provvedere l'un l'altro ai proprii bisogni, di compiacersi a vicenda delle loro obbligazioni, di rammaricarsi se incorrono in qualche sbaglio, di provar compiacenza quando si trovano insieme sani e salvi? „.

L'amore umano, di qualunque specie esso sia, importa sempre l'intima ed affettuosa corrispondenza dei due principî sostanziali, costitutivi dell'uomo, l'organismo corporeo e l'anima razionale, ed è generato dal sentimento della bellezza; ma nell'amor naturale la corruzione originaria della natura umana mostra la sua deformatrice potenza, la bellezza dell'anima è offuscata dal prevalere de' sensi e più di una volta scompare affatto nella voluttà della passione animale. Per lo contrario nell'amore cristiano l'anima mostra tutta l'immacolata purezza, che fiorisce dalla natura redenta, pur mentre rimane in contatto colla materia. L'organismo corporeo lascia trasparire attraverso il suo involucro la bellezza interiore dell'anima e la rispecchia nel volto, nello sguardo, nella voce, nell'atteggiamento, nelle movenze, in tutta la persona, che ne rimane per così dire spiritualizzata. La donna cristiana ama di santo affetto il compagno della sua esistenza; se mai sentisse il suo cuore palpitare per lo sposo altrui, tiene sepolto nel più profondo dell'anima il suo malnato amore; se soccombesse alla violenza della passione, si rialza fidando in Cristo, che ha perdonato alla Maddalena, perchè ha molto amato, ha convertito la Samaritana, ha assolto l'adultera.

La virtù moralizzatrice dell'amore umano corre proporzionale alla sua purezza. L'amore meramente naturale, sempre difettoso ed offuscato da qualche macchia, perchè guasto nella sua radice, mal può ingenerare quello spirito sublime di sacrificio, quell'energia eroica ed invitta, che nelle lotte della vita assicurano all'anima il trionfo del dovere sugli ignobili istinti e le voluttà sensuali. Werther, Jacopo Ortis, Delfina cedettero alla loro passione amorosa, *lucemque perosi proiecere animas* (1). L'amore di Angela, sebbene si sforzi di mantenersi immacolato, troppo si risente della fiacchezza del cuore umano, non rialza Leone dal suo scetticismo, ma lo abbandona al suicidio. Faust, disperato nel suo tentativo di sfondar il mistero dell'universo, spaventato dell'orribile vuoto, che lo circonda, vede Margherita ed all'alito del suo amore sente una vita novella rifluire nel suo spirito, ma quell'amore non lo rigenera. Egli profana il santuario di quell'anima pura e verginale, sacrifica alla sua voluttà sensuale quella fanciulla, tutta candore, freschezza, ingenuità in-

(1) Virgilio, *Aeneidos*, lib. VI, vv. 435, 436.

fantile, e ricade nella sua immensa tristezza. Talvolta l'amore, di cui discorriamo, ha degli slanci generosi, delle intuizioni sublimi, dei lampi di verità, che gli schiudono nuovi e sereni orizzonti, ma le forze non lo reggono a raggiungere l' intraveduto ideale. Leone ben conosce lo strazio di Angela, che lotta colla propria coscienza e coll'amore di lui, e candidamente afferma che " l'amor della donna altrui o è una bassezza o una grande sventura „ (1); pure egli chiude gli occhi alla verità, che gli è balenata alla mente e non ha forza di sostenere la lotta.

Ben altra è la tempra, ben più potente è la virtù rigeneratrice propria dell'amore cristiano. La Venere celeste o Urania, generatrice dell'amore spirituale, era un mito, una mera idea, una pura concezione della fantasia, e niente più. La bellezza celestiale dell'anima redenta, generatrice dell'amore cristiano, è viva ed energica realtà. Onnipotente sul cuore dell'uomo è l'amore della donna cristiana. *Omnia vincit amor* (2). La casta bellezza, la serenità dell'anima, la calma dei sensi, lo spirito di sacrifizio, la pietà, il raccoglimento interiore, l'inspirazione dell'ideale, la delicatezza, la grazia, la rassegnazione, tutte queste doti della natura femminile esercitano sul cuore dell'uomo un'attrattiva potente, celestiale. La virtù medesima, se accompagnata dall'avvenenza della persona, viene più amabile e più cara (3). Tutte le anime generose, tutti i nobili cuori sentirono la forza rigeneratrice dell'amore cristiano. Dice Dante in sull'esordire della sua *Vita Nuova*, che sente la presenza di Beatrice come di un Dio forte, che viene a dominarlo: " Ecce Deus fortior me, qui veniens dominabitur mihi „; e altrove scrive: " Oh! donna! nella quale fiorivano tutte le mie speranze, tu che ti sei degnata, per mia salute, lasciar l'ombra de' tuoi passi sur la soglia dell'inferno, tu m' hai tolto dalla schiavitù e dato alla libertà; la terra non ha più pericoli per me, io conservo viva nel mio cuore l'imagine di tua purezza, affinchè nell'ultimo giorno l'anima mia abbandoni il mio corpo, amabile a' tuoi occhi „. Petrarca nel suo *Dialogo con Sant'Agostino* dice, che il suo amore per

---

(1) Traduzione di Domenico Ciampoli, pag. 276.

(2) Virgilio, *Ecloga X*, vers. 69.

(3) *Gratior et pulcro veniens in corpore virtus* (Virgilio, *Aeneidos*, lib. V, vers. 344).

Laura lo ha innalzato all'amore di Dio, e che di lei ama non il corpo, ma l'anima, sentendo tanto più raddoppiarsi il suo fuoco quanto più esso va invecchiando.

Il mondo cristiano venera ed esalta in Maria il tipo vivente dell'amore innalzato al sommo della sua potenza, della sua santità e purezza. Maria e Cristo, Maria la donna più perfetta tra le creature, Cristo il perfettissimo tra gli uomini, anzi l'Uomo-Dio, concentrano in sè e diffondono tutto l'amore, che può cementare l'unione della specie umana nella duplice individualità dell'uomo e della donna. Il Goethe chiude la seconda parte del suo *Faust* con uno stupendo inno alla *Mater gloriosa*, ed il suo traduttore francese Enrico Blaze vi aggiunge un suo *Studio sulla mistica*, dove scrive: " L'antichità, nel suo panteismo incompiuto, non riconosce che gli istinti; il bello morale le sfugge: essa ha Cibele, Iside, Giunone, cioè il principio della fecondità, la MADRE; ignora la VERGINE. Affinchè i due elementi si incontrino in questo ETERNO FEMMININO, ideale di Dante e di Goethe, occorre che intervenga un Dio e che il Cristianesimo si riveli. Gli è in questa grazia divina, in questa inesauribile clemenza, retaggio dell'IDEALE FEMMININO de' tempi nuovi, che riposa il secreto del culto di Maria. Principio di salvezza, di amore, di rassegnazione, non si può impegnare una lotta con lei. Faust e Don Giovanni possono abdicare ai suoi piedi; quando abbiamo resistito a Dio ed agli uomini, quando abbiamo tutto sfidato, tutto insultato, tutto spezzato, non rimane più che un dominatore capace di trionfare di noi: la debolezza! Maria presiede alle conversioni, trascina dietro di sè le anime traviate attraverso gli ardenti labirinti del cielo ". Maria e Cristo, la Madre ed il Figlio, ecco il cuore della famiglia umana, ecco il Cristianesimo e l'amore.

IV.

Conclusione.

Chi prende a disaminare con animo attento ed imparziale il movimento del pensiero contemporaneo, non può non riconoscere che gran parte delle sue produzioni è viziata dal tarlo roditore della paganità. Si paganeggia in filosofia, dove la ragione abbandonata a se sola va errando entro un labirinto di

sistemi e di dottrine opposte e contrarie, senza una guida sicura, che la scorga alla meta: si paganeggia in letteratura, dove manca la suprema idealità della vita e l'anima nulla vede, nulla desidera oltre l'orizzonte di quaggiù. I cuori e le menti sentono qua e là l'impotenza dell'umanità abbandonata alle sole sue forze ed il bisogno di rompere i cancelli della paganità per ritemprarsi a nuova vita. Il Cristianesimo è il principio rigeneratore della scienza e dell'arte, come lo è della persona umana e della convivenza sociale.

Il pensiero speculativo accenna al risveglio di una nuova vita, dacchè le recenti dottrine del puro fenomenismo si chiariscono impotenti ad adempiere davvero le sue esigenze.

Basta rivolgere uno sguardo allo stato attuale della scienza per rilevare, che il positivismo dopo un mezzo secolo di vita va dissolvendosi sotto i colpi della critica.

Esso insorse colla dogmatica affermazione di se medesimo senza punto instituire la critica delle dottrine metafisiche e spiritualistiche, sentenziandole insussistenti e fallaci in ogni loro punto, invece di sincerare se e quanto vi fosse di vero o di erroneo. Fu questo il germe dissolvitore, che portò nascosto nel suo seno. Il concetto fondamentale su cui esso posa, viene dall'analisi critica disciolto in elementi contrarî e discordi. Dal dogma positivistico vanno pullulando opposte eresie, che ne rivelano l'interior debolezza: ed i suoi seguaci si accorgono che inteso nel suo significato primitivo e quale lo avevano concepito i suoi primi fondatori, non regge più, e s'ingegnano di rifarlo di sana pianta su nuovo stampo.

Che più, se lo stesso Augusto Comte, il quale creava in Francia il positivismo verso il 1840, lo sconfessava verso il termine della vita, ed Herbert Spencer, che qualche anno dopo lo fondava in Inghilterra, oggidì lo abbandona nel suo recente opuscolo *Fatti e Commenti*? Venendo alla nostra Italia, ci si presenta quest'altro fatto non meno notevole, che i più insigni rappresentanti del positivismo professavano da prima con fervido convincimento la filosofia metafisica tradizionale. Uno de' più ardenti e valorosi sostenitori e propagatori delle nuove dottrine positivistiche è certamente Giuseppe Sergi. Ebbene egli pubblicava nel 1868 un volume intitolato *Usiologia ossia Scienza dell'essenza, Rinnovamento dell'antica filosofia italiana*, in cui calorosa-

mente professa il più puro idealismo platonico e lo spiritualismo teistico (1). Qualche tempo dopo mutò bandiera e dall'antichissima filosofia italiana, di cui egli predicava con tanto ardore il rinnovamento, passò al culto delle nuovissime dottrine, che da oltre monti ed oltre mari erano penetrate nella nostra Italia. In quel medesimo anno 1868 un altro pensatore italiano, Pietro Siciliani, pubblicava un opuscolo inscritto *Sulle fonti storiche della filosofia positiva in Italia*, dove inveisce contro i positivisti Comte, Littré, Stuart-Mill, perchè negano la metafisica come scienza suprema ed ogni verità, che non iscaturisca immediatamente dai fatti; poi passò anch'egli nel campo dei positivisti, negando ogni metafisica, ogni verità trascendentale. Anche Roberto Ardigò aveva già varcata la quarantina, quando dall'ortodossia cattolica, che aveva professato come sacerdote, discese ad immergersi anima e corpo nelle fervide correnti del positivismo contemporaneo. Egli ci tiene assai a dichiarare, che delle opere del Comte non ha letto una riga, e dello Spencer e di Mill poco meno che nulla (2), sicchè trasse il suo sistema dalle cellette del proprio cervello; e questa mia non è un'espressione metaforica, dacchè per lui il pensiero è una funzione organica cerebrale.

---

(1) Vedi pagine IX, X, 65, 91, 99, 104, 106, 108.

(2) Vedi l'avvertenza alla sua opera: *La psicologia come scienza positiva*, ristampata a Cremona nel 1882.

Sugli effetti della disposizione relativa al proprio cadavere.

Nota del Dott. MARIO RICCA-BARBERIS.

Il diritto sul proprio corpo è certamente uno degli aspetti sotto cui l'*Individualrecht*, ossia il diritto della personalità, fu oggetto di maggiori e più speciose critiche. Già il Kohler (1) osservava, che la polemica contro i diritti individuali venne impostata assai leggermente dai dottori, che, dimenticando il nocciolo della questione, si abbandonarono ad attraenti scaramuccie su punti accessorî affatto irrilevanti.

È perfettamente vero, che anche senza l'ordinamento giuridico col naso si fiuta, colla glottide si canta, nello stesso modo che senza di esso i preistorici abitatori del nostro pianeta godevano la vita.

V'ha qualcosa che di per sè non costituisce un atto illecito e nemmeno un diritto, perchè sta nella zona neutra, in cui non penetra l'impronta giuridica.

Su di ciò si fonda il Ravà (2) per disconoscere il diritto sul proprio corpo.

Ma di questa concezione appare manifesto il fondamento, non appena essa venga posta nei suoi veri e proprii termini.

Il Thon (3) ha giustamente osservato, che il diritto della personalità consiste nella protezione che i beni della persona godono dal lato esterno e non nell'uso che il soggetto fa delle sue forze fisiche ed intellettuali.

---

(1) *Das Autorrecht*, Jena 1880, p. 124 seg.

(2) " Riv. it. per le scienze giurid. „, vol. XXXI, fasc. III, p. 290-378, vol. XXXII, fasc. I-II, p. 1-127, *passim*, ma specialmente in quest'ultima parte a p. 84 e 85.

(3) *Rechtsnorm und subjectives Recht*, Weimar 1878, p. 288 seg. A p. 288: " Der Genuss des rechtlich geschützten Guts gehört niemals zu dem Inhalte des Rechts „. A p. 293: " Die Rechtsordnung kümmert sich eben regelmässig um den Genuss der Güter nicht..... Ihre Aufgabe ist es, für den etwaigen Genuss die Hindernisse hinwegzuräumen, die andere Personen unbefugt demselben stellen „.

Mentre le funzioni organiche degli animali, seguita il Kohler (1), stanno al di fuori della cerchia del diritto, le funzioni organiche dell' uomo si svolgono entro la sua zona, in quanto godono della protezione legale, in quanto l'ordinamento giuridico le circonda delle sue garanzie, le comprende nel magico suo bando e ne grida l'intangibilità contro ogni attacco. L'odorare ed il cantare sono cose comuni agli animali, ma chi offende il mio naso o la mia glottide deve risponderne (2).

L'illazione tragica di un diritto al suicidio, messa innanzi dal Savigny (3), si evita facilmente quando si ricordi col Windscheid (4), che ogni diritto privato non si occupa che di risolvere la questione, fino a qual punto la volontà dell'individuo debba essere riconosciuta da quella degli altri.

" Quanto al diritto sul proprio corpo, afferma il grande " Pandettista (5), tutto si riduce a vedere, se l'ordine giuridico " dichiari, che la volontà del titolare è decisiva per la propria " persona, munendola di divieti verso chi gli sta di fronte, come " nel concedere un diritto reale dichiara, che la volontà di una " persona è decisiva per una cosa ".

Ed aggiunge, che la questione non può essere risoluta in senso negativo (6).

Nè essa può dar luogo ad alcun dubbio finchè nella persona

---

(1) Loc. cit.; v. Thon, op. cit., p. 291: " Das Recht der Persönlichkeit besteht, wie wir sahen, aus der Gesammtheit der jetzt weit zahlreicheren Verbote, welche gemeinsam die Unantastbarkeit der persönlichen Güter bezwecken ".

(2) Mentre il Kohler si sofferma sulle facoltà naturali per porre in rilievo che esse, in quanto sono suscettive di offese per parte di altri, costituiscono l'oggetto di un diritto, il Ravà le contempla in sè per poter dire che non lo sono. Come si vede, il dissidio è più di forma che di sostanza.

(3) *Traité de droit romain*, traduit par M. Guenoux, Paris 1885, I, p. 326.

(4) *Pand.* I, § 40, nota 1 (trad. it., p. 178).

(5) *Pand.* I, § 40 (trad. it., p. 177).

(6) Anche coloro che, scorgendo nella personalità soltanto una possibilità di estrinsecazione, non la considerano come oggetto di un diritto, riconoscono nel nostro elemento fisico e nelle nostre qualità personali delle posizioni concrete da essa assunte. V. Fadda e Bensa nelle *note al libro 2° del* Windscheid, p. 601 seg. Quanto al diritto sul proprio corpo, come aspetto del diritto della personalità, v. Chironi, *Questioni di diritto civile*, Torino 1890, (IV, Quest. XXII) p. 400 e 401; *Istituz.* I, § 22, p. 29.

perdura la vita. Nessuno può offendere l'integrità corporale del suo simile: all'individuo compete l'azione per la tutela di questo suo diritto, di fronte al quale può essere nulla la sua stessa rinunzia e può disconoscersi il principio " volenti non fit injuria „ (1). La questione si presenta grave circa il vedere, se e quando il chirurgo possa operare senza o contro la volontà del paziente (2).

Quanto alla disposizione concernente il proprio cadavere, una prima avvertenza si impone per ciò che ha tratto al contenuto.

Anche qui il giudice deve risalire ad un'indagine obbiettiva del modo di sentire proprio di un determinato momento storico per dedurne la validità o meno della disposizione (art. 849 cod. civile) (3). " Improba, ci insegna la Glossa, (4), est voluntas defuncti, qua mandat reliquias suas post mortem in mare projici „.

Rispetto alla forma, giova esaminare, se la persona possa disporre del proprio cadavere, oltrechè per testamento (5), per atto tra vivi, e cioè mediante contratto. È questa l'ipotesi dell'incarico, conferito ed accettato, di fare del cadavere un dato uso.

In Firenze si erano, anni or sono, costituite delle associazioni aventi per iscopo di sottrarre alle cliniche i cadaveri di

---

(1) Chironi, *Quest.*, p. 402.

(2) Cfr. Oppenheim, *Fahrlässige Behandlung und fahrlässige Begutachtung von Ohrenkranken*, in " Zeitschrift für Ohrenheilkunde mit besonderer Berücksichtigung der Rhinologie „, vol. 35; p. 236.

(3) Chironi, *Lezioni di diritto civile dell'anno 1901-1902* (lit.) p. 284 seg., 298 seg.; *Quest.*, p. 402; Fadda e Bensa nelle *note al libro 2°* del Windscheid, p. 615. L'art. 59 della legge 22 dicembre 1888 sulla sanità pubblica toglie ogni dubbio sull'ammessibilità della cremazione.

(4) Al cap. I, *De sepulturis, extrav. comm.*; cfr. Gabba, in " Foro it. „, 1885, I, col. 1252.

(5) Che la legge ammetta la facoltà di disporre anche per quelle cose che non sono *in bonis* è dimostrato dai traduttori del Windscheid (*Note al libro 2°*, p. 615) e dal Chironi (*Quest.*, p. 401) confutando il Gabba (" Foro it. „, 1885, I, col. 1251-1254). Il passo di Modestino (L. 27 D. *De cond. instit.*, XXVIII, 7) citato da quest'ultimo nulla prova a suo favore. Dell'avviso del Gabba è pure il Laurent (*Principes*, vol. 28, p. 98): " ... il n'y a pas de testament quand le testateur ne dispose pas de ses biens „. Cfr. Kohler, *Jahrb. f. die Dogm.*, XXV, 105, nota 2; Glück, lib. XI, tit. 7, § 789 e passi delle fonti ivi citati.

coloro che vi aderivano. A parte l'illecità della causa inerente a queste associazioni, certo è che si trattava di un incarico reciproco da eseguirsi dopo la morte del conferente. Siamo di fronte alla figura giuridica del " mandatum post mortem „, che soccorre in modo così calzante alle varie estrinsecazioni del diritto della personalità (1).

I dottori francesi distinguono, secondochè si tratti d'incarico conferito in vita ed accettato, ma avente per oggetto un'incombenza da eseguirsi in tutto o in parte dopo la morte (2), o di incarico conferito per atto *mortis causa*. Nel primo caso si avrebbe un *mandatum post mortem* in senso stretto (3); nel secondo esso si riscontrerebbe attraverso la figura giuridica dell'esecutore testamentario (4).

---

(1) Kohler, *Das Autorrecht*, p. 149 seg., colle sentenze ivi citate; giova pure ricordare la nota causa della Principessa di Linguaglossa, Giuseppina Crispi c. il Senatore A. Damiani ecc. ed il Prefetto di Napoli.

(2) Pothier, *Du mandat*, n° 108: " Le principe que le mandat finit par la mort du mandant reçoit nécessairement exception lorsque l'affaire qui en est l'objet est de nature à ne devoir se faire qu'après sa mort „. — Troplong, *Du mandat*, n° 728, p. 225: " Comment serait-il possible de faire finir par la mort du mandant un mandat qu'il n'a donné que pour être exécuté après sa mort?... La volonté des parties a pu déroger à la règle ordinaire qui attache la fin du mandat au décès du mandant „. Cfr. Duranton, *Cours de droit civil suivant le Code français*, X, n. 284, p. 100; Pont, *Des petits contrats*, I, n. 1145, p. 603; Molitor, *Les obligations*, II, § 736, p. 404 e 405; Massé et Vergé, sopra Zachariae, *Le droit civil français*, V, § 756, p. 56, nota 11: " ... Le mandat donné pour être exécuté après la mort du mandant, à moins qu'il ne constitue une disposition de dernière volonté exprimée dans la forme testamentaire, ne subsiste après le décès du mandant qu'autant qu'il n'est pas révoqué par les héritiers de celui-ci „. Cfr. Aubry et Rau, sopra Zachariae, *Cours de droit civil français*, II, § 416, p. 57 testo e nota 1; Guillouard, *Traité du contrat du mandat*, n. 232, p. 537; Contro: Laurent, *Principes*, XXVIII, p. 95. Vedi Dalloz, *Répert. génér.*, XXVII, p. 129. Sulla *communis opinio* a questo proposito vedi anche Bonfante, parere nella causa Principessa di Linguaglossa c. Sen. Damiani, ecc., p. 110 e 111; Vitali, in " Foro it. „, 1902, I, col. 1329 e 1330.

(3) La dottrina e la giurisprudenza sono favorevoli tanto all'eventuale continuazione del mandato *post mortem* quanto al mandato del tutto *post mortem exequendum*. Cfr. Bonfante, loc. cit., p. 110.

(4) Duranton, *Cours de droit civil*, X, n. 284, p. 100: " Nos exécuteurs testamentaires ne son rien autre chose que des mandataires et leurs fonctions, loin de cesser par la mort de celui qui leur a donné la commission, ne peuvent même commencer qu'après son décès „.

Ma tra il mandato che si adempie quando di mandato non si può più parlare, e quello che sorge nel momento stesso in cui si avvera la causa della sua estinzione, non ci pare affatto di poter distinguere.

Il *mandatum post mortem*, perciò stesso che è *post mortem*, cessa di essere un vero e proprio mandato e di valere giuridicamente come tale (1).

" La sola menzione di una tale figura, dice il Bonfante (2), fa arretrare; i contratti sono per i vivi, non per i defunti „.

Nè si invochi l'analogia coll' esecutore testamentario, che, appunto perchè esecutore testamentario, non è più mandatario nel senso tecnico della parola (3).

Non il contratto, ma l'atto *mortis causa* sarà il mezzo con cui verrà validamente conferito un incarico da eseguirsi quando il conferente abbia cessato di vivere.

Appunto per ciò, ogniqualvolta non si riscontrino gli estremi e le condizioni poste dalla legge rispetto al testamento, non v'ha disposizione giuridicamente valida intorno al proprio cadavere (4), ed il mandato conferito tra vivi, sia anche attraverso

---

(1) La validità di questo mandato è effettivamente negata in modo espresso dalla L. 108 D. *De solut. et lib.* 46, 3 (Paolo): " Ei qui mandatu meo post mortem meam stipulatus est, recte solvitur: quia talis est lex obligationis, ideoque etiam invito me recte ei solvitur. Ei autem, cui jussi debitorem meum post mortem meam solvere, non recte solvitur (quia mandatum morte dissolvitur) „. Si adducono in contrario le leggi 12 e 13 D. *mand.*, 17, 1. V. Bonfante, p. 109.

(2) Loc. cit., p. 113; il *mandatum post mortem exequendum* è un'impossibilità giuridica (p. 108).

(3) Laurent, *Principes*, vol. 28, n. 88, p. 95: " on cite d'ordinaire l'exécution testamentaire comme exemple d'un mandat qui commence seulement à la mort du mandant „. Bonfante, p. 113: " ... sarà un mandato in cui subentra come mandante l'erede? Ma allora, se si vuole che ci sia un mandato assoluto e irrevocabile, regolato una volta per sempre dalla volontà del defunto, si viene a costruire una figura di mandato mostruosa, senza controllo da parte del mandante, senza diritto di revoca „. Windscheid, *Pand.*, § 567, nota 7: " ... nel mandato dichiarato unilateralmente e non revocabile dagli eredi si ha il nome romano, e non la cosa romana „.

(4) Ciò non toglie che in questo caso non si avrebbe quella specie di signoria *post mortem* del proprio patrimonio economico ed intellettuale, di cui, col Laurent (vol. 28, p. 96), si vale il Bonfante (p. 111) per combattere il mandato cui si fece inerire un tale carattere. Ciò è rilevato dal Laurent (ivi, p. 98). — In senso contrario al testo: Cassaz. Torino, 13 marzo 1884, est. Perocchio, in causa Costa c. Scotti Anguissola; " Foro it. „, 1884, I, col. 871 seg.

una serie di mandati reciproci, non può servire a tale scopo, perchè privo di ogni efficacia (1).

Se la clausola, con cui il testatore dispone del proprio corpo, è accompagnata dalla nomina della persona tenuta a farla valere, questa avrà diritto di ottenere, di fronte a chiunque, il cadavere del defunto, affinchè riceva quella destinazione che è conforme alla sua volontà.

Ma, in mancanza di una persona espressamente designata, chi sarà tenuto ad eseguire le disposizioni relative al cadavere? chi, in conseguenza di tali disposizioni, potrà intentare un'azione?

La questione si riconnette ad un'altra più ampia: quali saranno gli effetti della morte di una persona sui diritti della sua personalità?

Il Kohler ripone appunto la differenza tra i diritti individuali ed i diritti patrimoniali in ciò, che i primi sono indissolubilmente connessi all'individuo ed i secondi sono liberamente alienabili (2), per cui si trasmettono colla morte del titolare.

Ma l'ammessa validità delle disposizioni relative al cadavere, importando di per sè come conseguenza la necessità, che ci sia qualcuno giuridicamente autorizzato a farle valere, accenna già ad una deroga all'assolutezza di questo principio: e la deroga si avverte senz'altro nel caso dell'esecutore testamentario, a cui il *de cujus* trasferisce la possibilità di farsi vindice di una data estrinsecazione della sua personalità.

La difficoltà si è presentata alla giurisprudenza tedesca nel noto caso dei due fotografi amburghesi, che, penetrati di soppiatto nella casa del principe *Bismarck*, fotografarono l'ex-cancelliere sul letto di morte (3).

---

(1) Menochius, *De presumptionibus*, lib. II, XXXVI, n. 28 (ed. 1636, p. 187): " Mortem enim mandantis expirat mandatum, sic dicimus, morte finire et tolle voluntatem ".

(2) *Das Autorrecht*, p. 125 in fine e 126.

(3) Cfr. Kohler, *Autor- und industrierechtliche Abhandlungen und Gutachten*, II Heft, p. 55 seg. e *Das Eigenbild im Recht*, p. 11 e 12; Cohn, *Neue Rechtsgüter*, Berlino 1902, p. 53 seg.; Gareis, in " Verhandlungen des 26en Deutschen Juristentages ", 1902, I, p. 16; Keyssner, ivi, p. 75 seg.; Gallenkamp, in " Die Umschau ", 1° novembre 1902; articolo riassunto nella " Minerva ", 9 novembre 1902, p. 1135; Nöldecke, in " Die Nation ", 15 novembre 1902, p. 100 e 101; Von Blume, in " Das Recht " 1903, p. 113 seg.: articolo riassunto nella " Legge ", 1903, n. 7, p. 725 seg.

Sul carattere ingiurioso dell' atto non vi era dubbio (1). Tutto stava nel vedere, chi ed a quale titolo potesse promuovere il giudizio. Il *Landgericht* di Amburgo, nella sua sentenza dell' 8 settembre 1898 (2), ammise un' azione a favore degli eredi, non perchè tali nel senso giuridico, ma perchè appartenenti alla famiglia del defunto.

In questa qualità colla lesione dei diritti individuali dell'estinto, verrebbero offesi direttamente essi stessi, si offenderebbe, cioè, il loro diritto personale, il loro sentimento di pietà.

Secondo l' Hoelder (3), la successione nel diritto romano si estrinsecava anche in ciò che l'*injuria* arrecata al cadavere od alla memoria del defunto era *injuria* arrecata al suo erede. L'offendere un morto è un offendere chi è chiamato a succedervi (4).

Ma la teoria che l' erede, rivendicando la memoria del de-

---

(1) Keyssner, in " Deutsche Juristen-Zeitung „ del 1° dicembre 1898 (n. 24, p. 488) ed in " Verhandlungen des 26en deutschen Juristentages „, 1902, I, p. 76; Kohler, *Autor- und industrierecht. Abh.*, p. 105.

(2) Riferita dal Kohler, op. cit., p. 55. Vedi pure Keyssner, in " Verhand. „, p. 75 e 76.

(3) " Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte „, 1895, vol. 2° (*Die Stellung des römischen Erben*, p. 221-229), parte 3ª, p. 256: " Die Rechtsnachfolge des Erben äussert sich ausserdem darin, dass die dem Leichnam oder Andenken des Verstorbenen angethane Beschimpfung eine seinen Erben zugefügte *injuria* ist „. Ed aggiunge in seguito: " Diese *injuria* ist dem Erben zugefügt nicht als einer mit dem Verstorbenen identischen, sondern als einer vom Verstorbenen verschiedenen Person „.

(4) Fr. 1, § 4, *De injuriis*, 47, 10 (Ulpiano). Cfr. sentenze del Tribunale e della Corte di Appello di Torino, 10 dicemb. 1889, est. Lago, e 5 maggio 1890, est. Bozzi (" Giur. tor. „, XXVII, 215 e 341), citate dai traduttori del Windscheid nelle note al libro 2°, p. 618 e 619. Ivi, p. 619: " ... l'ingiuria fatta al cadavere del defunto attribuisce azione al successore universale a qualsiasi titolo „. Hoelder, loc. cit., p. 257: " Die Stellung des Erben als Rechtsnachfolger des Verstorbenen ist somit die doppelte, dass sein Vermögen erweitert ist durch den auf ihn übergegangenen Nachlass des Verstorbenen und dass seine von den Rechtsgenossen zu achtende Persönlichkeit erweitert ist durch die ihm geschuldete Achtung des Leichnams und des Andenkens des Verstorbenen. Wie Object der durch Beschimpfung des Verstorbenen begangenen injuria, so ist der Erbe Subject der vom Verstorbenen hinterlassenen Rechtsverhältnisse als eine von diesem verschiedene Person, was insbesondere auch gilt von denjenigen Rechtsverhältnissen, die *nothwendig* auf den Erben übergehen, weil sie ein mögliches Object ihrer letztwilligen Zuwendung an Dritte nicht sind „.

funto, faccia valere il *proprio* diritto di personalità, ripugna al senso pratico. Ciò premesso, si viene sostanzialmente ad urtare in questo dilemma: o il diritto della personalità si estingue ed allora non si potrà parlare di un' azione, o non si estingue ed allora si avrà un diritto senza soggetto, dal momento che la persona ha cessato di vivere.

Il *Reichsgericht* (1) trovò modo di sfuggire ogni soluzione condannando i due fotografi per violazione di domicilio.

Già nel 1880 (2) il Kohler osservava, che, per quanto l'*Individualrecht* in generale si connetta alla persona, tuttavia in certi rapporti sopravvive alla persona stessa.

Anche in questo senso vale il principio: *non omnis moriar*, e, come la potestà giuridica famigliare si estende oltre la morte di chi ne è investito, così il luogo in cui giace il cadavere, è *res extra commercium* (3). Un residuo del diritto individuale sussiste pure in quella parte di vita intellettuale che si cristallizzò negli scritti non pubblicati (4).

Ma con ciò non si spiega ancora la persistenza di questo diritto malgrado la morte del soggetto, cui si dice indissolubilmente connesso. La ragione è indicata dal Keyssner (5), il quale, a proposito della fotografia fatta a *Bismarck*, dopo aver osservato, che il concedere un' azione risponde alla coscienza giuridica popolare, aggiunge, che colla morte non cessa tutto ciò che riguarda l' individuo; il corpo esanime non diventa senz'altro pari ad una cosa inanimata, tant' è vero che si usa parlare dell'estinto come di una persona. L'ingiuria punita dal § 189 del codice penale dell'impero non è rivolta a coloro cui il legislatore concede il diritto di reagire, ma alla memoria del defunto. Nè è ammissibile la scappatoia di un' offesa al sentimento morale e religioso, all'onore famigliare, ecc. La coscienza popolare trova il fondamento della disposizione nel fatto che la

---

(1) Sentenza riferita dal Kohler a p. 28 seg. del suo *Eigenbild im Recht*.

(2) *Das Autorrecht*, p. 147.

(3) Wappäus, *Zur Lehre von den dem Rechtsverkehr entzogenen Sachen*, 1867, p. 12 seg.; cit. in Kohler, op. cit., p. 148.

(4) Op. cit., p. 149.

(5) " Deutsche Juristen-Zeitung ", 1° dicembre 1898, n. 24, p. 488; anche in " Verhand. ", 1902, I, p. 76.

persona del defunto vive nella memoria, la quale appunto perciò dev'essere mantenuta pura ed intemerata.

Non si tratta quindi di un diritto, che esiste senza soggetto; ma di un soggetto, che seguita ad esistere come tale, quando anche la vita materialmente gli sia venuta meno.

Eccoci di fronte ad una prerogativa dell'uomo, che dalle leggi ineluttabili della natura è vinto, ma non domo, perchè, estinte le sue forze fisiche, vive e può vivere tanto maggiormente nella storia. Nè di questa idea della personalità sussistente come tale anche oltre i limiti della vita fisica si potrebbe trovare raffigurazione più espressiva dei " dii manes „ dell'antica fantasia.

A ragione quindi il Prof. Kohler affermava ripetutamente (1), che il diritto della personalità, estinguendosi colla morte nella sua manifestazione principale, lascia dietro di sè un residuo, che è garantito dall'ordine giuridico e che vien esercitato dai relativi organi (eredi, famigliari) non come diritto personale loro proprio, ma come diritto di personalità del defunto (2). Tale è appunto quello che si esplica sul cadavere, sugli scritti non pubblicati, sulle lettere ecc. (3).

Checchè dica il Keyssner (4), la comparazione ci pare perfettamente calzante. Il Gareis (5), uno dei più autorevoli fautori del *Persönlichkeitsrecht* (6), dopo aver posto in rilievo, come

---

(1) *Autorrecht*, p. 148 in fine; vedi pure p. 147 e 148; *Autor- und industrierechtliche Abhand. und Gutachten*, II, p. 57, cit. anche dal Keyssner, in " Verhand. „, 1902, I, p. 77; *Eigenbild im Recht*, § 10, p. 26; cfr. anche Grüttefien, in " Berl. Tageb., Jurist. Rundschau „, v. 3 Januar 1903, ivi cit. dal Kohler alla nota 2.

(2) V. passi dell'Hoelder riferiti alle note 3 e 4 della p. 9.

(3) Notisi che il Kohler nell'*Autorrecht* attribuisce la difesa del cadavere agli eredi ed ai parenti, quella dei manoscritti e delle lettere agli eredi. Egualmente nell'*Eigenbild im Recht* per ciò che ha tratto alle lettere. Nell'*Autor- und indust. Abh.* ecc. parla in genere di *Hinterbliebenen*; il caso però che aveva dinnanzi agli occhi è precisamente quello di Bismarck.

(4) " Verhand. „, 1902, I, p. 77.

(5) *Das Recht am menschlichen Körper* (*Festgabe der juristischen Fakultät für ihren Senior* Johann Theodor Schirmer), Königsberg 1900, p. 93-95; di cui dà un cenno sommario lo stesso Gareis in " Verhand. des deutschen Juristentages „, 1902, I, p. 16.

(6) Come lo chiamò più recentemente sulle orme del Gierke. V. Ravà, in " Riv. it. per le scienze giurid. „. 1901, XXXI, fasc. III, p. 342.

il cadavere non appartenga all'eredità, dopo aver ampiamente dimostrato la persistenza del diritto dell'umana personalità oltre la morte (" das über den Tod hinaus wirkende Persönlichkeitsrecht „) aggiunge, che ad esercitare questo diritto sono chiamati gli eredi o quelle altre persone cui compete l' obbligo della sepoltura, in quanto non abbia avuto luogo rispetto al cadavere una disposizione analoga all' occupazione nel senso del diritto civile (" als nicht eine der Aneignung im bürgerlichrechtlichen Sinne analoge Disposition über die Leiche stattgefunden hat „).

Prescindiamo dall' offesa alla personalità in genere e specialmente da quella contemplata dal codice penale, di fronte alla quale non può nemmeno sorgere il dubbio, che possano reagire solo gli eredi immediati (art. 400 cod. pen. § 189 *St. G. B.*), e fermiamoci all'inosservanza delle disposizioni del defunto per ciò che ha tratto al proprio corpo.

Qui non si tratta della protezione generica dell' interesse morale contenuto nel diritto individuale dell'estinto, ma di una speciale estrinsecazione, che di sua natura è affidata ad una determinata persona. E per vero il diritto della personalità, imponendo il rispetto di una volontà priva di un contenuto patrimoniale, dà luogo ad un onere; ma l'onere importa la necessità che esso esista a carico di una determinata persona, e cioè, che ad esso sia legalmente tenuto colui che della successione ha pure i vantaggi: vale a dire, l'erede. Spetta all'erede di eseguire la volontà del *de cujus* quanto alla destinazione del proprio corpo. Ma a questo scopo, se compete a suo favore un'azione contro i terzi, competerà ai terzi un'azione contro di lui? Potrà alcuno costringerlo all' adempimento della clausola testamentaria relativa al cadavere?

La questione fu sollevata più di una volta per parte delle società di cremazione in seguito all'inosservanza del disposto di persone, che dichiararono di voler essere cremate. Il Tribunale di Bergamo (1) ammise nelle Società il diritto di agire, che giustamente negarono il Tribunale e la Corte d'Appello di Torino (2).

---

(1) " Foro it. „, 1885, I, 1249 seg.; " Legge „, 1885, 2, 207.
(2) App. Torino, 6 dicembre 1901; " Giur. it. „, 1902, I, 2, 386.

Causa d'errore può essere la natura attribuita al diritto della persona sul proprio corpo.

Come il KEYSSNER confonde spesso il diritto all'immagine colla proprietà della figura (1) dando luogo alle critiche del VON BLUME (2), così il BEKKER (3) ritiene che il cadavere sia proprietà dell'erede, il quale, secondo le circostanze, avrebbe contro i terzi la *rei vindicatio*, l'*actio legis Aquiliae*, ecc.

Inteso in siffatta guisa il dominio sul proprio corpo, si viene facilmente al concetto di un legato delle ceneri, invocato nelle note d'udienza davanti la Corte d'Appello dalla Società crematrice di Torino (4).

Ma nello stesso modo che la formula *proprietà letteraria*, come dice il MANZONI (5), è nata non da un intuito dell'essenza della cosa, ma da una semplice analogia, così l'idea di dominio è semplicemente un traslato rispetto al corpo: e, come tutti i traslati, per seguitare con quel Sommo, diventa un sofisma, quando se ne vuol fare un argomento.

Se all'individuo compete un diritto sul proprio corpo, non è questo un diritto reale che passi ad altri colla sua morte.

" Nessuno, osserva il GABBA (6), è padrone del cadavere umano nel diritto odierno, come nessuno lo era nel diritto romano, perchè il cadavere è dalla comune persuasione morale e religiosa tolto fuori dal novero delle semplici cose materiali, è *res extra commercium* e non soltanto sottratta alla proprietà dei privati, ma ad ogni e qualunque proprietà in modo assoluto per la stessa natura sua. Non appartiene il cadavere alla famiglia del defunto, non alla comunità civile od allo Stato; non può appartenere a nessun altro superstite nè per atto tra vivi, nè per testamento ".

Oggetto della disposizione non è un interesse materiale (che

---

(1) *Das Recht am eigenen Bilde, passim* e specialmente a p. 4 e 16.

(2) In *Das Recht*, 1903, p. 113 seg.: articolo riassunto nella " Legge ", 1903, N. 7; col. 723 e 724.

(3) *Pand.* I, § 77, app. I, B., p. 331; cfr. note dei traduttori al libro secondo del WINDSCHEID, p. 615.

(4) " Giur. it. ", 1902, I, 2, col. 388.

(5) *Intorno ad una questione di cosidetta proprietà letteraria*, lettera al Prof. GEROLAMO BOCCARDO, in " Prose varie ". Milano 1869.

(6) " Foro it. ", 1885, I, col. 1253.

sussistendo dopo la morte del *de cujus*, si trasmette), ma un interesse morale (che inerisce alla persona e che si attenua a poco a poco col suo scomparire nel passato) (1).

Dal che risulta, come d'altra parte dimostrano la stessa finalità della cremazione e l'intenzione di chi dichiara di volervi sottoposto il proprio cadavere, che non si tratta di atto *a favore* di altri, ma di atto con cui il testatore dispone *di ciò che riguarda sè*.

Nel determinare la potestà di agire occorre vedere a chi si è rivolta la volontà del defunto. Questa può essersi manifestata espressamente colla designazione di una persona; altrimenti, siccome l'offesa alla personalità si afferma qui come la conseguenza dell'inadempimento di un onere, così la corrispondente tutela si presume attribuita unicamente a colui su cui gravano tanto gli oneri quanto i vantaggi dell'eredità.

Affinchè il diritto di agire sorga nel terzo, occorre, che esso gli sia esplicitamente conferito dal testamento: è la concezione del Kohler, che dei diritti della personalità fa vindice il *Vertrauensmann* ed in sua mancanza l'erede (2): è quella dell'Huard, per cui, se il testatore " a désigné pour défendre ses intérêts moraux une personne, sa volonté doit être respectée „ (3), e del resto sono appunto gli eredi " les mandataires présumés du défunt „ (4). La Società crematrice quindi non avrà azione verso il successore che quando sia stata nominata esecutrice testamentaria (5).

D'altronde, non si potrà che imputare all'estinto di aver mal posta la propria fiducia nella persona dell'erede, se pure egli dell'onere relativo al suo corpo non abbia fatto una vera condizione.

---

(1) *Das Autorrecht*, p. 151 e 152.

(2) Ivi, p. 147, 149.

(3) *Traité de la propriété intellectuelle*, Paris 1903, I, n. 208, p. 298.

(4) Ivi, n. 218, p. 307.

(5) Vedasi in argomento la sentenza della Corte d'Appello di Milano, 21 maggio 1895 (" Giur. it. „, 1895, I, 2, 715), la quale ritenne, che la persona delegata dal defunto per curare la cremazione del proprio cadavere può all'uopo spiegare azione in giudizio, purchè provi d'aver ottenuto antecedentemente dalle autorità amministrative l'assenso per la cremazione.

Una diversa soluzione, e cioè, l'ammessibilità di un'azione per parte della Società crematrice implica il disconoscimento del diritto esercitato dal *de cujus* (interesse morale) e conduce alla confusione rimproverata dal Gabba al Tribunale di Bergamo tra le disposizioni d'ultima volontà relative ai beni e quelle relative alla propria persona, o, come si esprimono i traduttori del Windscheid (1), tra il legato di un cavallo e la disposizione data sul proprio cadavere.

Spigolature storiche sull'assedio di Verrua, 1704-1705.

Nota del Dott. FRANCESCO BAZZI.

I.

Dell'eroico e memorando assedio, che, durante la guerra per la successione al trono di Spagna, sostenne la fortezza di Verrua contro le armi francesi del Maresciallo Duca di Vendôme, discorre diffusamente e con giusto orgoglio la Storia del Piemonte.

Il Duca di Savoia, Vittorio Amedeo II, col grosso dell'esercito piemontese e con parecchi Austriaci, comandati dal Maresciallo imperiale Guido di Starhemberg, si era accampato a Crescentino: piazza forte posta non lungi dal sito ove la Dora Baltea versa le sue acque nel Po, nella pianura che si stende a sinistra di questi fiumi. Di fronte a Crescentino, sulla destra del Po, sorgeva la fortezza di Verrua sopra una rupe scoscesa a picco verso il fiume e difesa, nella parte meridionale, da un triplice fronte bastionato a scala. I due luoghi forti erano tra di loro collegati per mezzo di un doppio ponte sul Po, che si appoggiava ad un isolotto sito in mezzo al fiume. Tra le diverse fortificazioni che incoronavano la rocca di Verrua, degnissimo di nota era il Fort-Royal, che sorgeva sull'altura di Carbignano a poca distanza a sud-est della rocca stessa, colla quale comunicava mediante una depressione del terreno.

---

(1) *Note al libro secondo*, p. 615.

Il Maresciallo Francese assediante aveva fissato il suo quartiere generale sull'alture di Collegna, a mezzodì di Verrua, estendendo le sue truppe dalle colline verso Gabiano, ad est, alle pianure di Brusasco, ad ovest.

L'assedio cominciò il 14 ottobre 1704 e, per l'eroica ed ostinata resistenza del valoroso presidio, fu protratto fino al 9 aprile dell'anno successivo: giorno memorando in cui il fiero governatore di Verrua, dopo aver consumato tutte le munizioni e fatto saltar colle mine le opere di difesa, costretto dalla necessità, si arrendeva a discrezione, consegnando in mano del nemico sè stesso, la stremata guarnigione e della fortezza non più che un ammasso informe di rovine (1).

II.

Nel 1901 (2) pubblicò il Barone Domenico Carutti una monografia, che ha per titolo: " Il Conte De La Roche d'Allery e il Colonnello Fresen all'assedio di Verrua, 1704-1705 „; colla quale egli ha il merito di esser riuscito a rompere una lunga e tradizionale leggenda d'eroismo, che si era venuta formando intorno al Conte d'Allery, conosciuto finora, pressochè da tutti, come l'unico comandante del valoroso presidio di Verrua, durante tutti i sei mesi d'assedio, dal 14 ottobre cioè, del 1704 al 9 aprile del 1705. Riuscì il Carutti, basandosi sopra documenti finora inediti ed inesplorati, a dimostrare chiaramente che non già al De La Roche spetta l'onore d'aver eseguito con animo invitto gli ordini di Vittorio Amedeo II e del Maresciallo Guido di Starhemberg, negli ultimi e terribili casi di quell'assedio, ma bensì al Colonnello Imperiale Von Fresen.

Con tutto il rispetto dovuto all'illustre scrittore, tanto benemerito degli studi storici, sia lecito a noi di venir ora seguendo a mano a mano la sua monografia e di fare alcuni

---

(1) Le notizie particolareggiate dell'assedio, a cominciare dal 7 novembre, sono registrate in un Diario, di cui si trova una copia ms. agli Archivi di Stato piemontesi - *Materie militari,* m. 10; ed un'altra alla Biblioteca del Re a Torino. Un terzo esemplare è posseduto dalla Biblioteca del Seminario di Casale Monferrato.

(2) " Miscellanea di Storia Italiana „, vol. VI, 1901.

riscontri ed alcune osservazioni, collo scopo di esaminare se proprio tutti i dati fornitici dalla suddetta monografia, siano, a nostro debole parere, da accettarsi o meno.

Orbene, nel suo studio il Carutti si propone di cercare chi fosse il governatore di Verrua durante i sei mesi d'assedio; ed osserva che, fino a ieri, tutti gli eruditi sarebbero stati d'accordo a rispondere a questo quesito: il Conte De La Roche d'Allery.

Nella seconda parte infatti della sua monografia fa una estesa citazione da parecchi storici: dal Denina, da Alexandre de Saluces, dal Botta, dal Frézet, dal Cibrario, da Antonio Gallenga e da altri; i quali tutti tributano il solito onore al valore del d'Allery e, quando in fin d'assedio il Maresciallo francese richiese al Governatore di arrendersi, ce lo dipingono eroicamente seduto sopra di un barile di polvere, con una miccia accesa in mano, in atto minaccioso di sfida. Anzi questa diceria fu accolta e ripetuta dal Carutti medesimo persino nella 3ª edizione della sua " Storia di Vittorio Amedeo II ", stampata l'anno 1897. E certamente, se v'era argomento che non gli permettesse di abbandonare la prima sua opinione, questo l'offriva, come egli stesso si esprime, un testimonio, per così dire, oculare dei fatti: il Conte Solaro della Margherita; il quale nel suo " Journal historique du Siège de Turin ", al 21 maggio 1706, dice: " Le même jour S. A. R. déclara Gouverneur de la cita-
" delle de Turin, le Comte De La Roche d'Allery, officier d'une
" expérience consommée, qui avait été Gouverneur de Verrue
" pendant le mémorable siège de cette place ".

Ma ciò che indusse il Barone Carutti a mutar d'opinione ed a far le ricerche che lo condussero a questa monografia, fu la diversità, fattagli osservare a questo proposito, fra la tradizione usuale e ciò che ne dicono i Compilatori delle " Campagne del Principe Eugenio " (1).

Torna bene riprodurre qui un passo di quanto il Carutti viene esponendo nel terzo punto del suo studio, che suona così: " I Com-
" pilatori delle Campagne, vol. VI, pag. 233, premettono che nel-
" l'ottobre 1704, quando Vendôme pose l'assedio, *piccolo era il*

---

(1) *Le Campagne del Principe Eugenio.* Opera edita per cura dello Stato Maggiore I. e R. di Vienna, 1881; e tradotta in italiano per ordine di S. M. il Re Umberto I, vol. VI, 1894.

" *presidio della Verrua, tutto di Piemontesi*, e che il comando della " fortezza era affidato al governatore de la Roche d'Allery: indi " descrivono l'assalto del nemico al forte di Carbignano, che più " non potendo esser difeso, fu abbattuto; dopo di che espongono " il corso delle operazioni militari fino alla grande sortita del " 26 dicembre, concordata fra il duca, il maresciallo di Sta- " rhomberg e gli assediati, e riuscita assai molesta agli asse- " dianti; ma nè in questo luogo, nè altrove nominano più il " governatore. Nel vol. VII, pag. 88, dove ripigliano il racconto " dell'assedio, scrivono: " *Il presidio di Verrua, sotto gli ordini* " *del colonnello imperiale von Fresen si difendeva sul principio del* " *1705 con quel valore che aveva sempre dimostrato* „. Ciò detto " narrano i fatti dal 2 gennaio 1705 sino al giorno della resa „. Fin qui il Carutti.

Esaminiamo il primo passo. Quanto in esso il Carutti fa dire alle " Campagne „, non ci pare strettamente ben inteso.

Ricordiamo, innanzi tutto, che tre sono i punti essenziali e ben distinti della fortezza quando si parla di questo assedio di Verrua: 1° Il Castello della Verrua, sul culmine della rocca. 2° Il Fort-Royal, sull'altura di Carbignano, a sud-est della rocca. 3° Lo spazio compreso fra questi due punti, ridotto a campo trincerato; ove il Duca faceva salire per turno le truppe, anche per toglierle dall'aria malsana, che si respirava nella pianura di Crescentino (1).

Ora, quando il Compilatore delle " Campagne „ disse che " piccolo era il presidio della Verrua, tutto di Piemontesi „, si riferiva bensì al principio dell'assedio, 14 ottobre 1704; ma qui voleva indicare unicamente la Verrua propriamente detta (il 1° dei tre punti sopra indicati); e non dice punto che ora fosse governatore il De La Roche d'Allery.

Del resto ci sia lecito di riferire il passo, non lungo, in questione: " Fin dal 22 maggio (1704) il Fort Royal era presidiato " soltanto da comandati del Reggimento Regal sotto gli ordini " del M. G. Conte Massimiliano Starhemberg. Piccolo era il " presidio della Verrua, tutto di Piemontesi. Nel campo di Car- " bignano si davano la muta le fanterie accampate presso Cre- " scentino. Allorchè il Duca di Savoia vide il 14 ottobre ap-

(1) *Campagne* citate, vol. VI.

" pressarsi i nemici da sud, fece salire tutte le infanterie imperiali
" dal campo di Crescentino a quello di Carbignano, ove allora
" stavano gli ultimi quattro battaglioni piemontesi... Il L. M. Daun
" ebbe il comando del campo di Carbignano (il 3° dei tre punti
" sopra indicati) e del Fort Royal (il 2° punto); e sotto di lui
" il M. G. Massimiliano Starhemberg quello del Forte (2° punto),
" ed il general conte della Rocca quello del campo (3° punto) ".

Evidentemente qui non si fa parola del De la Roche: in quella vece le " Campagne " parlano del De La Roche, come governatore di Verrua, non già prima dell'assalto e presa di Carbignano (avvenuta il 6 novembre), come loro fa dire il Carutti; ma bensì dopo di questo fatto. Infatti a pag. 237, del vol. VI, esse ci riferiscono che, perduta Carbignano e " tornato
" a Crescentino il Duca, prevedendo l'attacco della fortezza di
" Verrua ne rinforzò il presidio con uomini presi da vari corpi
" imperiali e piemontesi, quelli sotto il colonnello Regal, questi
" sotto il colonnello Blagnac. Il comando della fortezza fu affidato
" al governatore de la Roche d'Allery ".

Nè vogliamo credere che il Carutti abbia qui potuto confondere il nome del General Della Rocca, a cui vedemmo affidato dalle " Campagne " il comando del campo di Carbignano, con quello del General De La Roche, a cui, sempre secondo le " Campagne ", viene più tardi, cioè dopo la perdita di Carbignano, affidato il comando della Verrua-rocca. Sarebbe facile dimostrare che qui non si tratta punto di una sola e medesima persona. Nel numero degli ufficiali componenti lo Stato Maggiore del Duca di Savoia, datoci dagli Archivi di Stato (1), figurano tutti e due i nomi dei nostri generali in questo modo:

— General di Battaglia di Cavalleria, Conte La Roccia d'Alery.

— General di Battaglia di Fanteria, Conte Della Rocca.

In uno " Stato degli ufficiali di S. A. il Duca di Savoia dell'anno 1703 ", troviamo (2) i loro nomi in questo modo:

— De La Roque, Colonnello del reggimento di Monferrato.

— De La Roche d'Alery, Maggiore delle guardie del corpo.

---

(1) Archivi di Stato piemontesi: *Uffici generali del soldo*, mazzo 6.
(2) Archivi di Stato piemontesi: *Id., id.*

Dal che appare che al nome francese: De La Roche corrispondeva l'italiano: Della Roccia; ed al nome italiano: Della Rocca corrispondeva il francese: De La Roque.

Stando alle " Campagne „, risulterebbe adunque: 1° inesatto che tutta la fortezza fosse munita da soli Piemontesi. Di soli Piemontesi fu munita la rocca di Verrua, presa nello stretto senso, fino al 6 novembre; 2° che il comando della Verrua fu affidato al De La Roche il giorno 7 novembre.

Del resto, pure ammesso che il De La Roche fosse già prima d'ora governatore di Verrua-rocca, non si può ammettere che fosse governatore di tutta la fortezza, presa in largo senso, e per tutti i sei mesi; perchè al comando di Carbignano troviamo il Daun. Ed è cosa molto difficile ad immaginare che il L. M. Daun, all'assedio di Verrua, dipendesse dal General De La Roche; mentre avremmo una prova del contrario all'assedio di Torino nell'anno 1706, in cui il medesimo Daun avrà il comando dell'intera città ed il medesimo De La Roche avrà il comando della sola cittadella.

Di più, del De La Roche, come governatore, non troviamo alcun cenno in alcuna carta dell'Archivio di Stato, in nessuno storico (per quanto ci consti) prima del 7 novembre. La prima volta che compare come tale, è appunto in detto giorno, nel Diario dell'assedio; in cui si dice che Vittorio Amedeo " fit le " tour de la place, donna toutes les dispositions au general " comte de la Roche d'Allery pour une vigoureuse defense, qui " de son coté n'avait rien oublié pour assurer la place „ (1).

Quindi, ammesso pure che il De La Roche avesse continuato a tenere il comando fino al 9 aprile 1705; cosa che il Carutti dimostrò, come vedremo, con documenti non essere affatto vera; sempre a torto però gli storici potrebbero dire che il De La Roche fu governatore di Verrua per tutti i sei mesi d'assedio, dal 14 ottobre cioè, al 9 aprile dell'anno successivo; mentre invece sarebbe stato tale soltanto per cinque mesi; dal 7 novembre cioè, al 9 aprile. Di questa opinione pare sia Luigi

---

(1) Archivio di Stato: *Materie militari*, m. 10. " Regolamento di quello che nell'avvenire si deve puntualmente osservare nella guarnigione di Verrua sotto il comando del Signor Generale di battaglia, il Signor Conte della Roche „.

Cibrario, il quale nel suo " Specchio cronologico di Storia nazionale „ cita " la bella difesa di La Roche d'Allery per cinque mesi interi „.

Il Barone Carutti, esaminando attentamente il Diario, trovò che al 7 gennaio, il De La Roche fu ferito al braccio da un colpo di moschetto e che poi il giorno 8 " la blessure du Gou- " verneur qui avec une fermeté très-grande avait voulu rester " dans la place, empira, et on le fit porter à Crescentino. M. le " Baron de St. Remy, qui etait colonel du jour, resta chargé " du commandement „. E qui, come a ragione osserva il Carutti, che fu il primo a farne la scoperta, finisce il governatorato del De La Roche; nè ci avviene d'incontrarci più oltre nel nome suo, per quanto riguarda questo assedio. È vero che il Carutti crede d'incontrare questo nome ancora, quando riferisce ciò che sta scritto nel Diario al 2 marzo, cioè che nella rottura del ponte e presa del ridotto dell'isola fatta dai Francesi, Vittorio Amedeo II " eût à ses cotés l'aide de camp du General de la Roche " d'Allery tué „; ma il fatto non ha, in verità, grande importanza; nè pare che il Carutti glie n'abbia attribuita. Del resto abbiamo esaminato le due copie del Diario; e non sappiamo come il Carutti abbia potuto leggere " *de la Roche d'Allery* „, mentre tutti e due i manoscritti portano registrato chiaramente " *de la Roque* „ (1); che vedemmo essere altra persona.

Passiamo quindi a quello che noi potremmo appellare il secondo governatore di Verrua: Filippo Guglielmo Pallavicino, detto il Barone di S. Remigio. Il Carutti asserisce recisamente che il S. Remigio, assunto il comando agli 8 di gennaio, lo tenne fin verso il 12 marzo, e subito dopo soggiunge che, dopo la rottura del ponte, " Vittorio Amedeo riconoscendo che og- " gimai la fortezza non potendo esser soccorsa, doveva in breve " tempo arrendersi, prepose al comando del presidio il colonnello " Von Fresen, dichiarandogli che riposava in lui per la difesa " fino agli estremi; il 7 marzo gli mandò l'ordine di far en- " trare il luogotenente colonnello Chamousset nel mastio del " castello con duecento uomini..... (2), il dì 11 gli spedì l'istru-

(1) Anche l'esemplare della Biblioteca del Seminario di Casale registra La Roque e non La Roche.

(2) Il Diario ha la data del 6 marzo. Agli Archivi di Stato: *Materie militari*, m. 10, vi ha una carta dell'8 marzo circa le riflessioni e memorie

" zioni per la difesa (1) e il 13 il maresciallo Starhemberg gli " ordinò di tener il fermo fino al 10 aprile „ (2). Quindi mette in luce per la prima volta la lettera scoperta agli Archivi di Stato, che il Fresen scriveva il 12 marzo al Duca di Savoia:

Monsegneur, Puisque V. A. R. veut bien se reposer sur moi pour la deffence de Verrue je respondrois si bien al honneur qu'elle me fait, qu'elle ne se repentira iammais de me l'avoir confié, et ie me crois parfaitement heureus de trouver une aussi belle occasion a lui temoigner le zele que j'ay pour son Royal service. Touts les officiers qui sont ici, me chargent d'asseurer V. A. R. quil feront leur devoir sans besoin d'estre animé par aucune esperance de recompense; je me croirez suffisament recompensé, si j'ay le bonheur de la servir utilement. Ie repond dans la lettre que j'ecrits à Mons. le Marechal à touts les articles qui m'ont eté envoyé hier, et je prie V. A. R. d'etre persuadé que toute la garnison faira son devoir, et que je suis avec tout le zele et tout le respect possible

Monsegneur

De V. A. R.

Tres humble et tres obeissant
et fidelle serviteur
De Fresse.

" Questa lettera sembra certificare che Fresen assunse il co- " mando quando la capitolazione era considerata inevitabile ed " imminente „; il che equivale pel Carutti al 12 marzo: e poi si chiede perchè sia stato preferito e perchè il Fresen abbia sostituito il S. Remigio.

---

per la guarnigione di Verrua, in cui si nomina il Chamousset destinato per il castello. Del 9 si ha la seguente lettera del Cavalier Chamousset al Duca:

" *Monsegneur*,

" Il ma esté ordonné de la part de V. A. R. par Mons. le coronel Fresan " dantrer dans le Chateaux de verruue, aujourdhuy il ma comuniqué ses " intantions sur la magniere que je me doit conduire pour le deffendre ou " pour capittuler.

" Iasure V. A. R. que ie les suiurais exactemt et que iij perdray lame " nayan dautre embission que de la sacrifier pour S. R. services ie suis

" Monsegnieur D. V. A. R.

" *Son tres humble tres obeijssant et fidelle sujets*
" De Chamosset.

" Du Chateaux de Verruue ce 9 mars 1705 a 3 hor apres midy „.

(1) Il Diario dice il 10.

(2) La stessa cosa gli aveva scritto il Duca l'11.

Quanto alla preferenza, non riuscimmo a scoprire documenti immediati; il Carutti osserva acutamente che, dopo le cattive prove date dagli ufficiali piemontesi nella resa di Susa, Vercelli e Bard, gl'Imperiali sospettavano della fede di Vittorio Amedeo II.

Non sappiamo se veramente gl'Imperiali temessero della fede del Duca di Savoja, o semplicemente non avessero un troppo buon concetto dei capitani piemontesi; il vero è che dopo la perdita di Susa e di Vercelli, troviamo (1) che gl'Imperiali, nel comando di Ivrea, avevano voluto che al governatore Barone di Perrone, fosse associato il Generale austriaco Kirkbaum. Ed a conferma di questa nostra ipotesi sta anche una lettera (2), che il Duca Vittorio Amedeo scriveva il 26 luglio 1704 al Principe Eugenio: lettera che certamente non deve suonar troppo gradita agli orecchi dei Piemontesi. Essa dice: " Ho ragione di tutto " temere dopo le deboli prove di valore e di fedeltà che gli uf- " ficiali piemontesi hanno dato con la vergognosa capitolazione " di Vercelli; tutta la mia fiducia è posta ora nelle truppe del- " l'Imperatore.... ".

Senonchè rimane a provarsi che il Fresen abbia sostituito nel comando di Verrua il Barone di St. Remy; e che, in caso affermativo, lo abbia sostituito il 12 marzo.

Intanto, per via negativa, si può obbiettare al Carutti che (lui consenziente) il giorno 7 marzo vi sono già scritti indirizzati al Fresen, i quali non si spiegherebbero se ancor fosse al comando il S. Remigio. Inoltre, agli Archivi di Stato (3), vi ha una lettera (che deve essere sfuggita al Carutti) del 2 marzo, con cui il Fresen, alle ore 11 $^1/_2$ di notte, rispondeva ad un'altra, che il Duca gli aveva scritto un'ora prima. La lettera del Fresen dice:

A. R., Ie viens de recevoir sa letre, et ie ne manqueres pas d'executer avec toutte d'exactitude ses ordres. Tout est issi en bon ordre et de la meilleure volontè du monde. Nous auons repoussè uigoureusement les ennemis qui estoent dans la faussebré et nous auons pris un gre-

---

(1) Alexandre de Saluces, *Histoire Militaire du Piémont.* Turin, 1818, tome V.

(2) Citata dalle *Campagne del Princ. Eugenio*, vol. VI, pag. 221.

(3) *Materie militari*, m. 10.

nadier prisonier. I'ay fait munir le chastau de tout ce qui estoit neccessaire. L'on a pris les precautions necessaires pour la redoute de Vallis, ie prie V. A. R. de vouloir bien estre persuadè de mon zele, et que je me ferois un honeur de rependre mon sang pour son Royal service ie suis avec un tres profond respect

De vostre A. R.

Tres heumbe et trés obeissent serviteur

FRESEN
Oberst.

A Verue ce 2me mars 1705
a onze heures et demi du soir.

Un'altra prova poi, e di carattere positivo, ci pare di trovarla nel Diario dell'assedio e precisamente al giorno 9 gennaio; il giorno successivo cioè, a quello in cui era stato assunto al comando il Barone di St. Remy. Orbene, in detto giorno il Diario con laconica brevità dice che " le comte de Frinc releva Saint " Remy „ (1). Da questo punto intanto fino al 15 marzo, il Diario non solo non nomina più il governatore, ma nemmeno vi fa più allusione e gli ordini li cita con frase impersonale: dopo il 4 di marzo fa menzione del Colonnello e tutte le azioni attribuite dal Diario al Colonnello, vengono confermate dalle lettere inedite dell'Archivio di Stato che portano il nome del Fresen.

Cosicchè, se non erriamo, è arbitraria la supposizione del Carutti che il Fresen abbia sostituito il St. Remy; non solo arbitraria, ma contradittoria quell'altra, che lo abbia sostituito il 12 marzo.

Per il periodo, che va dal 9 gennaio al 2 marzo, non riuscimmo a scoprire documenti che valgano a diradare l'oscurità che lo avvolge; si possono però, come ognun vede, stabilire con qualche certezza questi due limiti. Stando al Diario, il St. Remy depose il comando il 9 gennaio. Per altra parte il Fresen certamente lo aveva già assunto il 2 marzo, secondo il documento da noi scoperto all'Archivio di Stato, e che il Diario stesso conferma per via indiretta.

---

(1) Questo Conte di Frinc, col titolo di Colonnello ed appartenente al Reggimento delle Guardie, lo troviamo registrato con il Colonnello di St. Remy, in uno " Stato degli ufficiali di S. A. il Duca di Savoia dell'anno 1703 „. Archivio di Stato: *Uffici generali del soldo*, mazzo 6.

Sarebbe interessante conoscere su quali argomenti si appoggi il Compilatore delle " Campagne „ per asserire che fin dal principio del 1705 il Fresen aveva il comando di Verrua. Dall'esame attento del procedere della narrazione, parrebbe che il Compilatore proprio non avesse intenzione di attribuire a quel " principio del 1705 „ il significato di principio di gennaio. Il Compilatore del vol. VII al riprendere della narrazione che l'altro Compilatore aveva troncata nel precedente volume, caccia là, per così dire, quella frase in modo complessivo, senza aver la pretesa di specificare proprio il giorno dell'assunzione del Fresen al comando: tanto più che dopo quella frase, ricapitolando il detto, accenna ad un fatto del 22 dicembre, mentre la narrazione dei fatti nell'altro volume si era protratta fino oltre la sortita del 26 dicembre. Ma il guaio si è che al 17 gennaio registra esplicitamente una sortita degli assediati ordinata dal Fresen (1). Il Compilatore non dice donde attinga: quindi non possiamo saper nulla di preciso.

Una strana combinazione intanto si è che nessuno degli storici si occupi di tutti e tre i comandanti: De La Roche, Saint Remy e Fresen; anzi nessuno affatto (per quanto ci consta), eccettuato quel brevissimo cenno del Diario, parla del St. Remy, come comandante in Verrua. (Anche del Conte di Frinc nessun altro fa cenno all'infuori del Diario). Per questa ragione forse e pel fatto, che quando il St. Remy fu assunto al comando di Verrua era " colonel du jour „, come registra il Diario, non parrebbe confermata un' ipotesi: che il comando del St. Remy sia stato effimero e di poca importanza?

Il Carutti asserisce che uno solo fu il governatore in titolo; benchè in realtà il Diario dia il nome di governatore al Colonnello Von Fresen, pur senza nominarlo; ma le lettere di Vittorio Amedeo lo dicono sempre colonnello e non mai governatore, come chiamavano invece il De La Roche.

I soli intanto che nominino i due governatori, pur senza dirci perchè e quando cessasse il comando del Conte De La Roche, e cominciasse il comando del Colonnello Von Fresen, sono i Compilatori delle " Campagne „: del resto tutti gli altri che trattano

---

(1) Il Diario la dice del 16 e composta di soli sei granatieri, senza nominare, al solito, il governatore.

di questo assedio (compreso l'autore del Diario), nominano esclusivamente o l'uno o l'altro. Nè Francesco Maria Ottieri (1) si deve ritenere il solo che nomini il Fresen, benchè con grafia inesatta " *Freiner* "; perchè in alcuni altri ancora si trova menzione del bravo colonnello imperiale.

Ma qui ci vien fatto di domandarci chi fosse questo Fresen. Di quanti trovammo che ne parlano, non due lo chiamano precisamente col medesimo nome. Le sue lettere stesse non sono sempre firmate allo stesso modo: " *Fresen* ", " *De Fresse* ", " *De Frese* ". Nel vol. 2° dei " Memoires du M. de Quincy " è detto " *Frecset* "; nel " Journal du Marquis de Dangeau ", tom. X " *Fresingue* "; l'annotatore dei " Memoires de Sourches ", " *Frezen* "; l'autore dell' " Histoire militaire ", " *barone di Freissing* ". Ma il Compilatore delle " Campagne ", che pare il più informato, perchè attinge dagli Archivi di Guerra, lo chiama: il Colonnello Barone Cristiano Ernesto Fresen del Reggimento Nigrelli. Governatore del Castello di Arco (sul lago di Garda) ed assediato dallo stesso M. di Vendôme, si era arreso il 17 agosto 1703, dopo aver anche allora resistito sino agli estremi: e ci narra il M. de Quincy che, uscendo prigioniero da quella piazza, rivolgesse al general francese queste parole: " Hodie mihi cras tibi "; e che fatto poi di nuovo prigioniero a Verrua, il 9 aprile 1705, alcuni ufficiali francesi memori di Arco, gli rivolgessero: " Eh bien Monsieur, l'*hodie mihi* est toujours pour vous! ". Del resto il Quincy stesso dice di lui che era " un très brave homme " e parole di lode ha pure per lui il Maresciallo imperiale Guido di Starhemberg nella relazione della resa di Verrua, che mandava all'Imperatore il 15 aprile 1705. Lo stesso Principe Eugenio lo stimava, come appare da sua lettera del 3 settembre 1703 allo Starhemberg: " ..... On dit que Fresen a esté tué.... J'en serais fort faché ". Il Fresen, dice il Carutti, morì poi di malattia a Torino, durante l'assedio del 1706; ove aveva avuto la sorte di trovarsi cogli altri due difensori di Verrua: il General De La Roche e il Barone di St. Remy. Il De La Roche morì a Torino governatore della cittadella l'anno 1714.

---

(1) *Istoria delle guerre avvenute in Europa e in Italia per la successione della monarchia di Spagna dal 1696 al 1725*, 1758.

Concludiamo quindi alcuni punti:

1° Ad esser governatore di Verrua, il Conte De La Roche d'Allery non cominciò che al 7 novembre 1704. Non si nega la possibilità ch'egli fosse già, prima d'ora, governatore di Verrua; ma non certamente di tutto il territorio che si suol designare con questo nome, quando si parla dell'assedio che durò dal 14 ottobre 1704 al 9 aprile 1705. Egli resse fino all'8 gennaio 1705, giorno in cui fu trasportato ferito al campo di Crescentino.

2° L'8 gennaio 1705 viene assunto al comando di Verrua il Colonnello Filippo Guglielmo Pallavicino, detto il Barone di S. Remigio. Il giorno 9 gli sottentra nel comando il Colonnello Conte di Frinc.

3° Per il periodo di tempo che corre dal 9 gennaio al 2 marzo, non trovammo documenti che valgano a diradare la oscurità che vi regna: nulla però contraddice all'asserzione del Compilatore delle " Campagne ", il quale pone già il Colonnello Barone Von Fresen, il 17 gennaio.

4° Ad ogni modo, al 2 marzo, al comando di Verrua troviamo di sicuro il Fresen, che vi rimase fino alla resa, avvenuta il 9 aprile 1705.

Valeriano iuniore e Salonino Valeriano.

Nota del Dr. UGO GIRI.

Sostenne il Mommsen nel *Corpus Inscr. Latinarum* (VIII, p. 1051, Suppl. III, N. 6956) che l'imperatore Gallieno ebbe due figli, il primo dei quali si sarebbe chiamato Licinio Cornelio Valeriano, ed il secondo Salonino. Alle medesime conclusioni giunse il Dessau nella *Prosopographia Imp. Rom.* (Berlino, 1897, vol. 2°, pagg. 272-73). Mi sarei anch'io volentieri inchinato innanzi al giudizio di sì illustri maestri, se un esame attento delle testimonianze degli antichi storici, delle monete e principalmente delle epigrafi, non mi avesse dapprima gettato il dubbio nell'animo sulle conclusioni alle quali si era venuti intorno allo stato di famiglia dell'imperatore Gallieno, e quindi inculcata la persuasione che esso stato non sia quello che s'è ritenuto.

Uno studio, uscito testè alla luce nella *Rivista di Numismatica* (1902, pag. 19 e segg.), sulle monete alessandrine dei figli di quell'imperatore, invece di farmi credere ch'io era in errore, ha maggiormente rafforzato i miei convincimenti. Il Dattari in questo studio, se da un lato ha accettato le conclusioni ben altro che trascurabili dell'Eckhel, il quale nega che alcuna moneta vada attribuita ad un *Valerianus iunior*, fratello di Gallieno, e se ha pensato di dividere quelle monete fra i figli di Gallieno stesso, tuttavia non ha mostrato con argomenti nuovi che veramente non debba entrare nella questione il fratello dell'imperatore e che le monete siano da distribuire proprio fra il primo e il secondo figlio di Gallieno.

***

Si è generalmente accettata la notizia tramandataci dagli storici, che l'imperatore Gallieno abbia avuto un fratello, che Trebellio Pollione chiama *Valerianus iunior*. In base a questa notizia avevano classificato le monete i numismatici che precedettero l'Eckhel. Il grande maestro però non volle prestar fede ai pochi passi contraddittorî degli antichi storici su tale punto. Egli attribuendo al vecchio Valeriano le monete portanti questo nome, seguìto dal titolo d'Augusto, e a Salonino, figlio di Gallieno, le altre tutte, venne ad eliminare completamente la figura di Valeriano iuniore.

Ma la classificazione eckheliana più tardi incontrò oppositori, e il Cohen in special modo non la ritenne esatta, e rimise in campo il *Valerianus iunior*, con non molto frutto.

Recentemente ha ripresa la questione il Dattari, che abbiamo ricordato più sopra. Egli, dopo aver negato che si possa attribuire alcuna moneta al fratello di Gallieno, divide le monete alessandrine in due categorie. Alla prima apparterrebbero quelle del figlio maggiore che portano la leggenda:

ΠΙ. ΚΟΡ. ΛΙΚ. ΟΥΑΛΕΡΙΑΝΟϹ ΚΑΙϹ. ϹΕΒ.

alla seconda quelle appartenenti al figlio minore con la leggenda:

ΠΙ. ΚΟΡ. ΛΙΚ. ϹΑ ΟΥΑΛΕΡΙΑΝΟϹ ΚΑΙϹ. ϹΕΒ.

E poichè il Dattari trova che le prime giungono fino all'anno 5°, mentre le seconde procedono dall'anno 5° all'anno 8°,

stabilisce che l'anno 5° non può essere che il 258 (sappiamo per vero da Aurelio Vittore che Valeriano, salendo all'impero nel 253, fece Augusto il figlio e Cesare il nepote), nel quale anno *P. Cornelio Licinio Valeriano* sarebbe morto lasciando, diremo così, il posto vacante per l'altro fratello *Salonino Valeriano,* le cui monete dal 258 andrebbero fino al 261. Senonchè l'esame delle fonti non ci permette di accettare queste conclusioni. Cominciamo da quel *Valerianus iunior.*

*
* *

Se il Dattari, conformemente a quello che su *Valerianus iunior* insegnò l'Eckhel, ha escluso che alcuna moneta possa attribuirsi a questo *Valerianus iunior*, tuttavia il generale silenzio intorno ad esso, il silenzio delle monete e delle epigrafi (dove Valeriano non è mai ricordato nè solo, nè accompagnato col presunto padre, nè col fratello, nè infine, ciò che più meraviglia, coi nepoti Cesari) non è sembrato sufficiente ragione per affermare che tale principe non sia mai esistito.

Pare a me che il Dattari non voglia inimicarsi Trebellio Pollione, che difende anche dagli attacchi dell'Eckhel. Pollione afferma che a Milano esisteva una tomba su cui si leggeva il nome di Valeriano, al quale era unito il titolo di *Imperator*; e il Dattari, prestando fede a questa notizia, crede che appunto con essa possa spiegarsi il silenzio delle monete e delle epigrafi intorno al fratello di Gallieno; poichè questo tale fratello, secondo il Dattari, non sarebbe stato mai nè Cesare, nè Augusto, ma avrebbe rivestito solamente la dignità d'*imperator*. Ed è curioso, molto curioso, ch'egli venga a queste conclusioni, in special modo perchè precedentemente si era meravigliato che dal vecchio Valeriano fosse stato fatto Augusto il figlio, e Cesare il nepote, quando nessuno dei due onori sarebbero toccati all'altro figlio, al supposto Valeriano iuniore.

Si può forse sfuggire alla difficoltà affermando che questo principe, presunto fratello di Gallieno, ebbe solamente il titolo d'*imperator*? E perchè mai non sarebbe stato trattato almeno come un figlio dell'Augusto Gallieno? E perchè nelle epigrafi, fosse anche come *imperator*, non compare affatto? E se anche si volesse pensare a un terribile odio paterno, noi non potremmo

mai comprendere, come dopo il 260, dopo la cattura e la morte del vecchio Augusto, il giovane Valeriano fosse rimasto semplicemente *imperator*, e come Gallieno non avesse pensato di associare all'impero il proprio fratello, o almeno di crearlo Cesare.

Nè le occasioni erano mancate; chè nel 257, assente dall'Italia il vecchio Valeriano, costretto Gallieno ad andare sul Danubio, è molto difficile a comprendersi come sul Reno, sul teatro delle continue lotte coi Franchi, si mettesse a rappresentare la imperiale autorità un ragazzo come Salonino, piuttostochè un uomo il quale per essere e figlio e fratello di Augusti e per l'età e per il senno, doveva avere ben più autorità sui soldati. Tale difficoltà dunque rimane, e non mi pare così lieve.

Io, da canto mio, ritengo fermamente che questo fratello di Gallieno, questo *Valerianus iunior* non sia mai stato nè Cesare nè Augusto nè *imperator*, per la ragione che non sia mai esistito, e che la notizia su di lui non sia nata che da un equivoco in cui cadde Trebellio o Celestino; da una confusione la quale abbia fatto scambiare il figlio per il fratello dell'imperatore Gallieno. Prendiamo in esame ciò che attesta Trebellio. Egli dice (*Valeriani duo*, 8, 1 segg.): *Valerianus iunior alia quam Gallienus matre genitus..... a patre absente Caesar est appellatus, a fratre (ut Celestinus dicit) Augustus — Et quoniam scio errare plerosque qui, imperatoris titulum in sepulcro legentes, illius Valeriani redditum putant corpus qui a Persis captus; ne ullus obrepat error, mittendum in litteras censui, hunc Valerianum circa Mediolani sepultum addito titulo: Valerianus imperator.*

Se la notizia provenisse da uno storico degno di maggior fede di Trebellio, l'assunto di mostrarla falsa non sarebbe troppo facile. Ma con Trebellio, non vero e superficiale (*Pollio multa incuriose, multa breviter tradidit*, scrisse Vopisco in *Aurel.*, 2, 1), è ben altro che difficile. Quando anche tale notizia non si volesse ritenere addirittura per falsa (la qual cosa non sarebbe poi nuova in Trebellio, fabbricatore, per esempio, di un *Postumius iunior* per completare il numero dei trenta tiranni), sarebbe molto agevole pensare ad una confusione.

Ma prima di dimostrare che la notizia riferita da Trebellio, non è degna di fede, vediamo se le attestazioni di Eutropio e di Zonara circa l'esistenza di un fratello di Gallieno, meritino il vero nome di testimonianze o non siano piuttosto nate dalla notizia stessa tramandataci da Trebellio Pollione.

*
* *

Chi bene consideri il racconto di questo storico, scorgerà di leggieri che, scontento delle varie versioni che si davano sulla fine di questa famiglia imperiale, vuole offrirci finalmente proprio lui la vera luce. Il suo modo di parlare è quello di chi ha scoperta una novità ignota a tutti (e tutti egli intende dire con quelle parole: *scio errare plerosque*). Quel suo tono magistrale ci induce a credere, quasi con sicurezza, che nessuno aveva detto prima quello che egli dice; ciò che d'altra parte è ben logico, se riusciamo a dimostrare che la notizia da lui riferitaci non merita alcuna fede. Se è così, se Trebellio è il primo che, male interpretando Celestino, afferma che Gallieno ebbe un fratello morto a Milano, da chi può aver attinto Eutropio il quale dice (XI): *Gallienus interea Mediolani cum Valeriano fratre occisus est*?

Evidentemente da Trebellio Pollione: per fermo egli fu tratto in inganno da quel tono di grande maestro, col quale si esprimeva Trebellio.

E che veramente sulla fine di questa famiglia d'Augusti corresse un' altra versione di sicuro scartata da Pollione, ma a cui Pollione pare voglia alludere con quelle sue parole: *scio errare plerosque*, è prova la testimonianza di Zonara, che qui riporto (XXVI): Ἐν Ῥώμῃ δέ γε ἡ σύγκλητος μαθοῦσα τὴν τοῦ Γαλιήνου ἀναίρεσιν, τὸν ἀδελφὸν ἐκείνοῦ καὶ τὸν υἱὸν ἐθανάτωσαν.

In questa notizia di Zonara, dunque, entra in scena il Senato Romano. Se il presente passo noi poniamo a confronto con quello di Aurelio Vittore, ove si dà la notizia medesima, restiamo subito colpiti dalla singolare simiglianza. Dice Aurelio Vittore (*Caes.*, 31): *At Senatus comperto tali exitio* (Gallieni) *satellites propinquosque per scalas Gemoniae praeceps agendos decrevit*. Che questo luogo sia stato la fonte di quello, su riferito, di Zonara, a me pare assai chiaro. V'è persino la medesima collocazione delle parole.

Se Zonara adunque, che qui segue Aurelio Vittore, il quale a sua volta segue la tradizione esatta, cambia i *propinquos* della sua fonte, in τὸν ἀδελφὸν καὶ τὸν υἱὸν, non può aver ricorso che a Eutropio, ossia a Trebellio stesso.

Così la radice di tutti i mali sarebbe Trebellio Pollione, o per sua mala fede, o perchè veramente interpretò male ciò che aveva scritto Celestino, quando pure non voglia ritenersi che errasse Celestino stesso.

E veniamo allora, poichè le testimonianze di Eutropio e Zonara nascono da Trebellio, ad un esame della notizia riferita da questo storico, per mostrare come essa non meriti fede, e come è possibile che sia venuto fuori l'errore.

*
* *

Dobbiamo recare in mezzo due argomenti già addotti più sopra; il primo è nel silenzio delle epigrafi intorno a questo zio dei figli di Gallieno. Adunque Valeriano, il preteso fratello di Gallieno, non compare nelle iscrizioni come tale. Non v'è alcuna dedica a un fratello di Gallieno, nè, ch'io mi sappia, v'è epigrafe, in cui, ancorchè si dedichi al vecchio Augusto Valeriano o a Gallieno o a Salonino, sia ricordato *Valerianus iunior*, quale figlio, fratello, zio, rispettivamente, di questi principi.

Il secondo argomento consiste in quell'affermazione di Aurelio Vittore (cap. XXXIII), che Valeriano, salito all' impero, abbia fatto Augusto il figlio e Cesare il nepote, mentre pure non si parla di altro figlio, nè di altre dignità date ad altri. Ma ben più importante è ciò che si legge in questa epigrafe (*C. I. L.*, Suppl. III, 6956 = 12215): *Imp. Caesari P.* | *Li*(ci)*nio Valer* | *iano et P. Licinino* | (Gall)*ieno et P. Cor* | (nelio) *Valeriano* | (f. et nep.) *piorum* | (Augg.) *et Cor* | (nelio S)*a*(l)*onino* | (Valeria)*no iuniori* | (nobiliss. Ca)*e*(s.) *Aug.*

Da un' altra epigrafe (*C. I. L.*, XI, 538) si raccoglie che il nome di *Valerianus iunior* spettava ad un figlio di Gallieno e non ad un fratello: *P. Corneli*(o) | *Salonino* | *Valeriano* | *nobil. Caes.* | *principi iuventutis filio* | *imp. Gallieni* | *Aug.*

Chi è questo *P. Cornelio Salonino Valeriano*, che in questa epigrafe viene detto figlio di Gallieno, se non quel medesimo principe che nell'epigrafe precedente è chiamato *Cornelio Salonino Valeriano iuniore*?

Or dunque, poichè sarebbe strano, anzi addirittura impossibile, che due principi di una medesima famiglia avessero am-

bedue il nome e il soprannome di *Valerianus iunior*, e poichè è evidente che un figlio di Gallieno si chiamava *P. Cornelio Licinio Salonino Valeriano iuniore*, perciò è da ritenersi errata la notizia di Trebellio, che afferma esservi stato un fratello di Gallieno col nome di Valeriano iuniore.

È da considerare ancora un'altra epigrafe (*C. I. L.*, XI, 826):

Imp. Caes. P. Licinius | Valerianus Pius Fel. Aug. pon. | max. Germ. max. trib. pot. VII, cos. IIII | p. p. proc. et imp. Caes. P. Licinius | Gallienus Germ. Pius Fel. Aug. pont. max. trib. | pot. VII cos. III, p. p., procos. et P. Cornelius Saloninus | Valerianus nobiliss. Caes.....

Questa epigrafe, come mostra la TR. P. VII di Valeriano, appartiene al 259. In quest'anno dunque Salonino Valeriano, o *Valerianus iunior* che ci piaccia chiamarlo, figlio di Gallieno, era ancora Cesare. Ma poichè la prima epigrafe riferita qui sopra dà a Salonino Valeriano il nome di Cesare Augusto, e non può essere posteriore al 260, perchè è una dedica al vecchio Valeriano, ne viene di conseguenza che Salonino Valeriano iuniore non può essere stato fatto Augusto che verso la fine del 259 o i primi del 260.

Se si rammentano le parole che Trebellio Pollione disse in proposito del suo *Valerianus iunior*, fratello di Gallieno (*a patre absente Caesar est appellatus, a fratre, ut Celestinus dicit, Augustus*), si vede come Celestino o Trebellio, nel darci tale notizia, siano caduti proprio in una confusione. Queste parole di Trebellio infatti converrebbero ottimamente a Salonino Valeriano, figlio dell'imperatore Gallieno.

E Trebellio, parlando di questo Valeriano, il cui nome egli trova nei *Fasti* ancor dopo il 260, non sapendo chi possa essere, dice (*Gallieni duo*, 14, 9, 10): ..... *Valerianum, quem multi Augustum, multi Caesarem, multi neutrum fuisse dicunt. Quod quidem verisimile non est, si quidem capto iam Valeriano scriptum invenimus in fastis: Valeriano imperatore consule. Quis igitur alius potuit esse nisi Gallieni frater?*

Risulta da tali parole che l'illustre storico non conosceva che dovesse vivere dopo quell'anno, dopo cioè la cattura del vecchio Augusto, un Licinio Egnatio Valeriano ed un Salon. Valeriano iuniore che abbiamo visto diventare Augusto proprio verso questo tempo, e le cui monete alessandrine, giungendo

fino all'anno ottavo, ci dimostrano essere egli morto nel 268 nel tempo stesso in cui veniva a morire Gallieno.

È lecito supporre che, se Trebellio avesse a ciò pensato, se fosse stato meno ignorante di tutto quello che narrava, se cioè avesse saputo dell'esistenza, dopo il 260, di questo principe, forse si sarebbe accorto della confusione e dell'errore in cui cadeva, e quindi, giova almeno sperarlo, non ci avrebbe tramandato la notizia di questo fratello di Gallieno. Ora è assai probabile che sia vero ciò che racconta Trebellio, che esistesse a Milano una tomba con la leggenda *Valerianus imperator*; eccetto che tale tomba e leggenda, con ogni verisimiglianza, va riferita a Salonino Valeriano, morto nel 268, giusta l'autorità delle monete alessandrine. Secondo le migliori ipotesi, questo principe, che muore in questo stesso anno in cui muore il padre Gallieno, chiuse gli occhi a Milano, dove Gallieno stesso finì la vita. In tal caso quell'*imperator* non ha un valore così ristretto, come vuol credere il Dattari, ma è l'espressione grandiosa della dignità Augustea che Salonino Valeriano rivestiva già da otto anni. Diremo ancora che, per noi, il fatto che Trebellio, a dimostrare l'esistenza di questo fratello di Gallieno, cita la leggenda della tomba di Milano, prova come la ingenuità e la ignoranza dello storico, così pure che questa notizia del fratello di Gallieno era ben poco accreditata, se non addirittura nuova.

Terminiamo col riportare qui un giudizio del Cohen, il quale giudizio è tanto più importante, inquantochè la sua tesi differisce completamente dalla nostra. Egli descrivendo le monete N. 22 e 94 che portano la leggenda: IMP. SALON. VALERIANVS AVG., dice: " *Les traits sont ceux de Valérien jeune* ".

La iconografia di queste monete dunque ci è di valido aiuto per sostenere che Valeriano iuniore altri non è che Salon. Valeriano, e quindi è un figlio, non un fratello dell'Augusto Gallieno.

La confusione, come possa essere nata, a noi non interessa. È certo che il caso non è nuovo negli storici antichi. Qui, noi potremmo pensare che l'equivoco sia nato, per esempio, dal fatto che gli Augusti chiamavansi reciprocamente *fratres*. Che da qualcuno si sia detto che a Milano morirono ambo i fratelli Augusti, e che poi questa frase abbia dato luogo alla confusione del padre col figlio, non pare affatto difficile.

***

Eliminata completamente la figura del fratello di Gallieno, è evidente che le monete alessandrine in questione vanno divise tra i figli di quest'imperatore, come ha fatto il Dattari. Senonchè, io non sono convinto ch'esse vadano distribuite proprio nel modo medesimo, poichè ritengo che tre e non due siano i figli di Gallieno.

Credo che le monete alessandrine si possano dividere fra due principi soltanto, ma non però, come si pretende, fra il primo e il secondo figlio di Gallieno (cfr. Dattari, pag. 20 e sgg.) bensì fra il secondo e il terzo; nè gli anni indicati dalle monete sono, a parer mio, quelli che si è supposto.

Generalmente si ritiene che Gallieno abbia avuto due figli. Il primo sarebbe *P. Cornelio Licinio Valeriano*, morto nelle Gallie per mano di Postumio, e il secondo *P. Cornelio Licinio Salonino Valeriano*. Che il secondogenito si chiamasse Salonino, e non il primo, come pure gli storici affermano, è principalmente per ciò sembrato vero, perchè le monete alessandrine di questo principe giungono fino all'anno ottavo, che, computato dal 253, ci porta al 261. Ora in questo anno doveva essere assolutamente morto, e già da parecchio tempo, il figlio primogenito dell'imperatore Gallieno. E a far credere che i figli di questo principe fossero davvero due, ha avuto la sua parte il passo di Polemio Silvio in *laterc.* (*Chron. min.* edit. Mommsen, I, pag. 521) ov'è detto: *Gallienus cum Salonino et Licinio filiis occisi.* E s'era citata ancora l'autorità di Aurelio Vittore il quale scrive (capit. XXXIII): *Hic* (Valerianus) *filium suum Augustum fecit Gallienique filium Cornelium Valerianum Caesarem.*

Secondo noi i figli di Gallieno sono: *P. Cornelio Licinio Salonino Gallieno iuniore*, morto nelle Gallie verso il 258, 259; *P. Cornelio Licinio Egnatio Valeriano*, morto forse di morte naturale fra il 263-264; *P. Cornelio Licinio Salon. Valeriano iuniore*, morto a Milano nel 268. Le parole di Pol. Silvio, a nostro avviso, non vogliono dire altro che, come Gallieno, furono uccisi i figli Salonino e Licinio Sal. Valeriano. E, notiamolo, il nome di Salonino, come quello del primogenito, è anteposto all'altro (1).

(1) Con l'opinione del Dattari, che il primogenito di Gallieno si chiamasse Cornelio, e l'altro Salonino, noi non possiamo in alcun modo con-

Ma procediamo all'esame delle fonti. Se non ci illudiamo, speriamo di dimostrare che le epigrafi confermano questa interpretazione.

***

Dice Trebellio Pollione in *Saloninus Gallienus* (1, 2 e segg.): *De huius nomine magna est ambiguitas; nam multi eum Gallienum, multi Saloninum in historiis prodiderunt. Et qui Saloninum, qui autem Gallienum patris nomine et avi Gallieni cognominatum .....Fuit denique hactenus statua in pedes montis Romulei...., quae habet inscriptum: Gallieno minori Salonino additum.* E in *Postumius* (*Trig. tyr.*, 3): *hic vir in bello fortissimus..... usque adeo ut Saloninum filium suum eidem Gallienus in Gallia positum crederet quasi custodi vitae et morum et actuum imperialium institutori.*

Le notizie di Trebellio meritano qui fede. Infatti in più d'una epigrafe è scritto così: *P. Licinio Salonino*; e due monete in Mionnet, Suppl. II, pag. 433, nn. 1421-1422, recano la leggenda: Πο Λικ Κορνήλιος Γαλλιηνὸς Καισ.

Che veramente, come dice Trebellio, questo principe fosse conosciuto dagli storici o col nome di Gallieno minore o con quello di Salonino, lo conferma il fatto che Zosimo, oggi massimamente seguìto e accreditato, *Salonino* chiama il giovane

---

sentire. Non crediamo che si possa rispondere tanto facilmente alla obbiezione che il Dattari stesso si fa a pag. 30: *Come spiegare quei due nomi riuniti sulla stessa moneta dacchè un figlio si chiamava Cornelio, l'altro Salonino?* (!) Il Dattari medesimo così si risponde: *La risposta più propria che possa dare è questa. Alla morte di un Augusto, il suo successore, fosse il figlio od altri, usava aggiungere al proprio nome quello del predecessore; è quindi probabile che in memoria di Cornelio, quando Gallieno investì Salonino della dignità di Cesare, gli imponesse il nome del defunto figlio.*

Non bisogna seguir troppo materialmente Aurelio Vittore, il quale parlando dei figli di Gallieno, chiama uno Cornelio, l'altro Salonino. Per troncare ogni questione, qualora davvero potesse nascere, riferisco qui sotto una epigrafe, dalla quale si vede che il nome di Cornelio era portato contemporaneamente da due fratelli, e che non era proprietà esclusiva di uno di essi!

(*C. I. L.*, VIII, 8473): *Divo Caesari | P. Cornelio Licinio Va | leriano nepoti | imp. P. Lic. Valeriani | Augusti filio imp. Caes. | Lic. Gallieni Augusti fra | tri P. Cornelii Licin. Sa | lonini Caes. Aug.*

principe affidato a Postumio e Zonara chiama questo medesimo principe *Gallieno iuniore*. Evidentemente qui i due storici seguivano diversa fonte. Innanzi a testimonianze così chiare, così esplicite, come potrebbe ancora sostenere che il primo figlio di Gallieno si chiamava Valeriano?

Nè basta l'autorità dell'ambigua notizia di Aurelio Vittore, per farci scartare quelle, chiare e coerenti, di Trebellio Pollione e massime di Zonara e di Zosimo. E alle affermazioni di questi tre storici dobbiamo aggiungere quella, certo importante, di uno storico tenuto forse un po' troppo in non cale, di Flavio Vopisco. In una lettera, inserita nella sua vita di Aureliano (*Aurel.*, 8, 2 e segg.), scritta da Valeriano imperatore al console Antonino Gallo, si dice: *Culpas me familiaribus literis, quod Postumio filium meum Gallienum magis quam Aureliano commiserim, quod utique et severiori et puer credendus fuerit et exercitus..... Testor autem omnes Deos me etiam timuisse, ne quid Aurelianum etiam erga filium meum, si quid ille fecisset (ut est natura pronus ad ludicra) saevius cogitaret* (1).

---

(1) Questa lettera ha dato molto da fare alla critica. E chi, come il Duruy (*Hist. des Rom.* Paris, 1883, vol. III, pag. 38, nota), volle ritenere autentica la lettera riportata da Vopisco, poichè in essa Valeriano dice di aver affidato alle cure di Postumio Gallieno, che chiama *puer*, e nel tempo medesimo *filius*, pensò che il vecchio Augusto intendesse parlare del figlio (che da calcolo fatto non poteva aver meno di trentacinque anni), come di un ragazzone.

Dice il Duruy: *Son père avait peu de confiance dans ce grand enfant.* E in nota: *Puer - Le mot est dans une lettre citée par Vopiscus* (Aur., 9) *et dont on a révoqué en doute l'authenticité, sans motifs suffisants.*

Ma chi, come il Dessau (*Prosopographia*, parte II, pag. 272, sotto *P. Licinius Cornelius Saloninus*, e pag. 273, sotto a *P. Licinius Cornelius Valerianus*), non volle persuadersi di questo, e non potè comprendere come un Augusto, qual'era Gallieno, venisse chiamato *puer* non solo, ma fosse affidato alle cure di un generale, un Augusto che aveva trentacinque anni, che aveva moglie, che aveva figli, che era stato associato all'impero, appunto perchè questo era grandemente minacciato, oltre a ciò non potè comprendere come un tal Augusto non venisse neppure ritenuto adatto a comandare l'esercito, ritenne la lettera addirittura per falsa. Non mi pare che abbiano raggiunto il vero nè gli uni, nè gli altri. Se poniamo mente che negli ultimi tempi dell'Impero Romano, i vecchi senatori chiamavano *filii* i giovani, che di ricambio *patres* dicevano quelli, e che gli Augusti, come fra loro si chiamavano *fratres*, così *filii* dicevano i Cesari, i quali

Anche qui dunque il primo figlio di Gallieno viene chiamato Gallieno e non Valeriano. Ma più decisivo ancora a me pare un altro passo dello stesso storico Vopisco, perchè vi si accenna a due figli di Gallieno, il primo dei quali si chiama medesimamente Gallieno e il secondo Valeriano, e perchè tale attestazione, come quella or ora riferita, ci si presenta in una lettera scritta dall'imperatore Valeriano ad Aureliano. Ecco le testuali parole: (*Aurel.*, 11, 8): *Consulatum cum eodem Ulpio Crinito in annum sequentem a die undecimo kalendarum iuniarum in locum Gallieni et Valeriani, sperare te convenit.* Qui Gallieno e Valeriano non possono assolutamente essere gli Augusti, perchè qui non si parla che di consoli *suffecti,* perchè il nome di Gallieno non sarebbe stato anteposto al nome di Valeriano, padre di quello ed eletto anteriormente, infine perchè tale consolato non è computato affatto nelle epigrafi degli anni posteriori. Essi quindi non possono essere che i figli dell'imperatore Gallieno. E donde allora la facoltà di sostenere che il primogenito dell'Augusto si chiamasse Valeriano?

E vuolsi considerare che queste lettere, inserite da Vopisco nella sua storia, meritano considerazione non poca, anche per ciò, che ricorrono nella vita di Aureliano per ben altre ragioni

---

patres appellavano gli Augusti, non possiamo trovare difficoltà alcuna nella interpretazione di questa lettera.

Ricordiamo tutto ciò che abbiamo detto intorno al primo figlio di Gallieno, il quale si chiamava Salonino Gallieno iuniore, e non vi sarà dubbio, che nella lettera, riferita da Vopisco, il vecchio Valeriano intendesse parlare del nipote Gallieno iuniore, che egli avrebbe potuto chiamare o con l'appellativo di *nepote* o con quello di *figlio.* È evidente che dette la preferenza a questo secondo, il quale, mentre da un lato ricordava al suo congiunto la dignità di Cesare onde era rivestito, dall'altro doveva sonare più dolce e gradito alle proprie orecchie di nonno.

Noi adunque non ci occupiamo della questione della autenticità della lettera surriferita di Vopisco; sebbene pel fatto di averla interpretata, come riteniamo con sicurezza, giustamente, ci sembra che cada la ragione per cui essa era ritenuta falsa. Ma quando anche si volesse portare su Vopisco il giudizio che comunemente viene portato su gli altri *Scriptores Hist. Aug.*, nonostante ch'egli non ne dia qui motivo, e si volesse dubitare della lettera, a noi rimarrebbe sempre questo a dire, che anche Vopisco, nel caso che avesse falsificato, avrebbe dovuto ciò fare in base a quello ch'egli conosceva ed aveva potuto sapere da altre fonti. I passi cioè della lettera rimarrebbero pur sempre una testimonianza per noi.

che non son quelle cui mira la nostra tesi. Le attestazioni storiche non sono più tre dunque, ma quattro o, meglio ancora, cinque, se teniamo conto che due sono i passi della biografia d'Aureliano.

*
* *

Con le testimonianze degli storici pare a noi che vadano perfettamente d'accordo quelle delle epigrafi. E primieramente, perchè mai dovremmo confondere le epigrafi che portano il nome di *P. Cornelius Licinius Saloninus* con quelle ov'è notato *P. Cornelius Licinius Salon. Valerianus*, che, alla loro volta, si vuole che siano da distinguersi da quelle ov'è scritto *P. Cornelius Licinius Valerianus*? E per vero, se Salonino si chiamava *Gallienus iunior*, secondochè dicono gli storici (e abbiamo monete che portano la leggenda ΓΑΛΛΙΕΝΟϹ ΚΑΙϹ.), come potrà volersi che si confonda col fratello Salon. Valeriano, il quale abbiamo già visto che si chiamava *Valerianus iunior*?

Ma vediamo come dalle epigrafi si possa ricostruire lo stato di famiglia di Gallieno; e cominciamo col ricercare il primogenito di quest'imperatore.

Una epigrafe (*Eph. epigr.*, IV, pag. 518) dice così: *D. D. D. n. n. n.* | *imp. Caes. P. Licinio Vale*(riano Pio Felici) | *invicto Aug. pontifici* [maximo] | *Germanico maximo tr*(ibun) | *potestati* V *cos. III* . . . . . *et* | (P) *Cornelio Egnatio Valerian*(o) | *nobiliss. Caes. princ.* [iuventutis].

Questo P. Cornelio Egn. Valeriano può essere lo stesso principe che troviamo denominato P. Cornelio Salon. Valeriano? No certamente, se in una medesima epigrafe (Suppl. II 6956=12215) sono notati i nomi di P. Cornelio Valeriano e di Cornelio Salonino Valeriano iuniore. Quando volessimo sostenere che *Egnatius Valerianus* della prima iscrizione è uguale al *Cornelius Salon. Valerianus* di questa seconda, rimarrebbe sempre un altro principe col nome di Cornelio Valeriano. Se noi adesso esaminiamo l'epigrafe (VIII, 8473) riferita a pag. 11 e la poniamo a confronto con quelle addotte testè, veniamo subito alla conclusione che i figli di Gallieno non poterono essere che tre. Chi è infatti il *Saloninus Augustus* di quest'ultima iscrizione? Qui sono pos-

sibili due ipotesi: o questo Salonino altro non è che Salonino Valeriano, ed allora Gallieno non avrebbe avuto che due figli, o è un terzo figlio di quest'imperatore. In una epigrafe riportata a pag. 8 (XI, 826) appare che Cornelio Salonino Valeriano iuniore è ancora Cesare nel 259. V'è infatti indicata la TR. P. VII del vecchio imperatore Valeriano. Nell'altra iscrizione nel medesimo luogo addotta (Suppl. III 6956=12215) questo principe ha il titolo di Augusto. E poichè nel 259 era Cesare e qui compare come Augusto, senza che questa epigrafe col fatto che è una dedica a Valeriano padre possa essere posteriore al 260, ne viene che fu fatto Augusto o verso i primi di quest'anno, o verso la fine del 259. Le monete alessandrine con CA.OYAΛEPIANOC KAIC. CEB. giungono fino all'anno 8°, che è evidentemente il 268. Emerge chiaro da ciò come l'anno 5° delle monete alessandrine di questo principe non possa essere, come ritiene il Dattari (p. 29), il 258.

Se dunque il Salonino Augusto dell'epigrafe (VIII, 8473) fosse Salonino Valeriano iuniore, poichè questi fu creato Augusto verso il 260, l'iscrizione ov'è notato Salonino Augusto, non potrebbe essere anteriore a quest'anno. Ma allora nel 260 vivrebbe un altro figlio di Gallieno, Cornelio Valeriano, e sarebbe solamente Cesare (lo ricaviamo dall'epigrafe stessa). In tal caso chi sarebbe il primogenito di Gallieno?

Salonino Valeriano no di certo, se le sue monete lo dichiarano Augusto per otto anni. Cornelio Valeriano neppure; poichè non solo il principe ucciso nelle Gallie doveva nel 260 essere già morto da un pezzo, mentre questi invece indubbiamente viveva, ma ancora perchè le monete alessandrine di P. Cornelio Valeriano ce lo fanno conoscere Augusto per cinque anni. Ora come potrebbe essere costui il primogenito di Gallieno, se, Cesare nel 260, per le monete alessandrine non poteva esser morto prima del 265? Quale sarebbe allora la famosa vittima di Postumio? Evidentemente dunque Salonino non può confondersi con Salonino Valeriano, che alla sua volta non può confondersi con P. Cornelio Egn. Valeriano per ciò che più sopra abbiamo stabilito. E quindi i figli di Gallieno sono tre e non due, dei quali il primogenito è Salonino, detto altrimenti *Gallienus iunior*. E se così non avessimo concluso, ci sarebbe stata di non molto facile risoluzione la leggenda stessa dell'epigrafe riferita a pa-

gina 11 (nota) ove Salonino è detto Augusto, e l'altro fratello, il presunto primogenito, semplicemente Cesare.

Vorrei finalmente fare osservare che se il primogenito di Gallieno fosse davvero Valeriano, di guisa che si dovessero a lui attribuire le monete alessandrine dal Dattari poste nella prima delle due categorie, allora il giovanetto affidato a Postumio, poichè nella lettera di Valeriano al console Gallo, riferita da Vopisco, è chiamato figlio dal vecchio Augusto, perciò nel 256 o meglio 257 (e in seguito vedremo il perchè di tale data) sarebbe stato ancora solamente Cesare. Onde anche per quest'altro argomento non potremmo spiegarci le leggende delle monete alessandrine, ponendo la data della morte di questo principe fra il 258 e il 259.

Se nel 257, dunque, un figlio di Gallieno, che non è Salon. Valeriano, era semplicemente Cesare, ove si ammetta che i figli dell'Augusto furono due, tale figlio non potrebbe essere che il primogenito. Il quale, ritenendo anche che nel 257 stesso sia stato creato Augusto, se ad esso appartengono monete alessandrine che lo dichiarano Augusto per cinque anni consecutivi, dovrebbe essere morto almeno nel 262. Ma non è possibile che questa sia la data della morte del primo figlio di Gallieno. E poichè il primo figlio non può essere neppure *Salonino Valeriano*, morto nel 268, io mi domando, chi sarà mai questo primogenito di Gallieno, se non quel *Salonino Gallieno juniore*, di cui parlano le epigrafi e gli storici.

Infine, se Licinio Valeriano fosse, come è affermato comunemente, il primo figlio di Gallieno, ed il secondo fosse stato Salonino Valeriano, perchè mai il nome di *Valerianus iunior* sarebbe toccato a questo, invece che a quello?

E sì che il primo figlio, se si fosse chiamato Valeriano, si sarebbe dovuto distinguere dal nonno, specialmente per questo, che per un certo spazio di tempo furono ambedue Cesari Augusti. Nè si comprenderebbe come questo secondo figlio avesse bisogno, per distinguersi dal primo, di aggiungere al suo nome un *iunior*; non bastava forse il chiamarsi Salonino per distinguersi da tutti gli altri?

Evidentemente non va così. Quell'appellativo *iunior*, dato a Salonino Valeriano, non è affatto ozioso; esso lo differenzia dagli altri principi; ed è manifesto che per distinguersi dall'uno e dall'altro era chiamato *Salonino Valeriano iuniore*.

A questo punto a me pare che noi possiamo stabilire la cronologia delle dignità di questi tre principi.

Il primo figlio *P. Cornelio Licinio Salonino Gallieno iuniore*, fu fatto Cesare, per testimonianza di Aurelio Vittore, dal nonno, quando questi salì all'impero, nel 253.

La lettera di Valeriano al console Antonino Gallo, riferita da Vopisco, ove si dà notizia che Gallieno figlio di Gallieno e Cesare viene affidato alle cure di Postumio, non può essere che del 256 o 257. In essa infatti Valeriano dice di aver affidato il nepote e l'esercito a Postumio piuttostochè ad Aureliano; il che vuol dire che quest'ultimo doveva essere salito in grande riputazione, tanto da meritare che fosse messo alla pari con Postumio, e gli si potesse affidare tutto l'esercito.

Siamo dunque dopo il 256, dopo cioè che lo scontro dei Germani, così valorosamente rigettati da Aureliano, allora semplice tribuno, ricoprì questi di gloria. La lettera di Valeriano è dunque del 256 o 257: se in essa egli chiama *figlio* il nepote, ciò prova che Salonino verso quest'anno era Cesare ancora.

Ma sappiamo che nel 257 Gallieno dovette accorrere sul Danubio, e lasciò in Agrippina il figliuolo maggiore quale rappresentante dell'imperiale autorità. È quindi molto logico supporre che Salonino Gallieno sia stato proprio in questo frangente creato Augusto, quando infuriava la guerra sul Reno, e quando, per l'irrompere dei barbari sul territorio romano, il vecchio Augusto era chiamato in Oriente e Gallieno sul Danubio, senza che sul teatro della guerra franca rimanesse alcun principe.

Forse in questa medesima circostanza fu creato Cesare il secondogenito di Gallieno; e crediamo che proprio di quest'epoca sia la epigrafe riportata a pag. 11.

Ma, ucciso nel 258 o 59 Salonino, Gallieno riempì il posto lasciato vuoto, eleggendo Augusto il suo secondo figlio, il quale forse morì poi di morte naturale fra il 263 e 264 (le monete alessandrine di lui giungono, ricordiamolo, fino all'anno 5°), e fece Cesare il terzo figlio Licinio Salonino Valeriano iuniore. Questi poi verso i primi del 260 veniva creato Augusto.

In tal modo nella divisione delle monete alessandrine non andrebbe compreso nè il fratello dell'imperatore Gallieno, giammai esistito, nè Salonino.

E a chi facesse l'obiezione, perchè di Salonino le monete alessandrine non parlino, noi risponderemmo che se la lettera riferita da Vopisco nella vita d'Aureliano, scritta da Valeriano imperatore al console Gallo, è stata da noi ben difesa e interpretata, essa ci dice che il primogenito di Gallieno nel 256 o 257 era ancora Cesare.

Ritenendo che verso la fine di quest'anno egli sia stato proclamato Augusto, se poi fra il 258 o 259, come è probabilissimo, venne messo a morte da Postumio, sarebbe stato Augusto un anno o poco più.

Ed allora dov'è la difficoltà che proprio di quest'anno manchino a noi le monete alessandrine?

Relazione intorno la memoria presentata dal prof. Romualdo Bobba col titolo: *Esame storico-critico dell'opera del signor Jules De Gaultier, intitolata: " Da Kant a Nietzsche "*.

Giulio De Gaultier pubblicava nel 1900 un volume inscritto *da Kant a Nietzsche* preceduto da una lunga introduzione, nella quale intende di dimostrare che la filosofia ha per unico suo còmpito di descrivere la forma ed i limiti della nostra facoltà conoscitiva, divisarne le conclusioni e definire l'ufficio del pensiero disgiuntamente da ogni suo contenuto oggettivo. L'autore muove da questo concetto, che l' istinto della vita e l' istinto della conoscenza stanno in perpetuo antagonismo fra di loro, sicchè la verità presa come fine della conoscenza favorisce uno stato contrario alla vita. Secondo l'autore, la vita non si regge sulla verità, ma si nutre di illusioni, che vanno dissipate dalla conoscenza essenzialmente distruttiva e nichilista; fra queste illusioni e menzogne primeggiano le credenze del monoteismo sia filosofico, sia cristiano, che ammette un Dio estramondano, una legge rivelata sia sovranaturalmente, sia razionalmente alla coscienza umana, a cui manifesta un bene da seguire, un male da evitare, un uomo fornito di libero arbitrio, responsabile degli atti suoi, suscettivo di merito e di demerito, di ricompensa e di castigo.

La memoria presentata dal prof. Bobba è uno studio storico critico di queste idee esposte dal Gaultier nell'introduzione della sua opera. Egli segue passo passo l'autore mettendo in chiaro le sue ipotesi avventate intorno l'origine del monoteismo, la sua ignoranza vera o simulata della storia della filosofia, le sue esposizioni monche e spesso errate di dottrine filosofiche notissime come la teoria delle idee di Platone e la dottrina fondamentale delle scuole indiane fino alla Critica della ragion pura. Pone in rilievo la falsità della supposizione che l'autore attribuisce a Kant nello scrivere la *Critica della ragion pura*, e la calunnia di mala fede nel dettare la *Critica della ragion pratica*. Mette in evidenza la stranezza della morale estetica proposta dall'autore in un sistema, secondo il quale l'uomo come tutti gli altri corpi naturali opera sempre così come debbe operare, ma che non lo crede punto, perchè alla vera causa, che lo necessita ad operare, sostituisce altri principii, che lo illudono. Per ultimo il prof. Bobba, esposta l'origine di ogni morale secondo l'autore, ne mette in chiaro le contraddizioni patenti nella stessa esposizione dell'autore e l'assurdità di stabilire una morale qualsiasi allorchè si professa il fatalismo, che informa tutta l'opera di lui.

A dir vero il prof. Bobba ebbe buon giuoco nell'esercitare la critica sopra un'opera, in cui la ragion filosofica non fa gran bella mostra di sè, e che posa tutta quanta sull'infelice paradosso, che la vita e la conoscenza si rinnegano e si respingono mutuamente. Ciò nullameno egli non ha lavorato indarno, giacchè alcuni punti della scienza non sono mai ripensati e discussi quanto basta; e la Commissione propone che la sua Memoria, ricca di erudizione, governata da buon criterio, dettata da lodevole intendimento, sia ammessa alla lettura.

G. Chironi,
Giuseppe Allievo, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

INDICE

DEL VOLUME XXXVIII

Elenco degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 25 Gennaio 1903 . . . . *Pag.* III
Pubblicazioni ricevute dalla R. Accademia delle Scienze di Torino durante l'Anno accademico 1902-1903 XXXVII

Comunicazione della lettera della sig.ª Gina Cossa che ringrazia l'Accademia per le condoglianze fattele per la morte del compianto Presidente Alfonso Cossa . . . . . „ 55
Congresso degli Orientalisti di Hanoï (Tonchino) . . . . „ 11
Elezioni di Soci della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali „ 819
Elezioni di Soci della Classe di scienze morali, storiche e filologiche 468, 982
Elezioni a cariche accademiche:
Elezione del Presidente dell'Accademia . . . . . „ 56
Nomina di due membri della Giunta per la Biblioteca . 63, 981
Nomina della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . . . . „ 84
Nomina della Commissione per il premio di fondazione Gautieri (Filosofia) 1900-1902 . . . . . „ 179
Elezione del Socio Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali 184, 381
Elezione del Vice Presidente dell'Accademia . . . . „ 699
Invito a farsi rappresentare alla solennità del Centenario dell'Ateneo di Brescia . . . . . „ 12
Invito all'Accademia per le feste centenarie in onore di Henrik Abel in Cristiania . . . . . „ 41
Invito di aderire alle onoranze al p. Angelo Secchi . . . . „ 103
Partecipazione della morte del Socio corrispondente Giovanni Vislicenus . . . . . „ 62
Premio Bressa:
Programma del XIV premio Bressa, quadriennio 1901-1904 „ 181
Comunicazione della relazione della 1ª Giunta per il XIII premio Bressa (quadr. 1899-1902) . . . . . „ 557
Nomina della 2ª Giunta per il XIII premio Bressa . . „ 557

Premio Gautieri:
Relazione della Commissione per il premio Gautieri di Letteratura (triennio 1899-1901) . . . . . *Pag.* 57
Conferimento del premio Gautieri per la Letteratura . . „ 82
Programma del premio Gautieri per la Filosofia (trien. 1900-1902) „ 102
Nomina della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1900-1902) . . . . . „ 179
Premio Pollini:
Comunicazione del testamento del Dr. Giacomo Pollini che lega all'Accademia l'annua rendita di L. 250 per un premio da conferirsi da essa . . . . . „ 379
L'Accademia autorizza il Presidente di fare le pratiche necessarie per entrare in possesso . . . . . „ 380
Premio Vallauri:
Nomina della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . . . . „ 84
Programma dei premi di fondazione Vallauri (quadr. 1903-1906 e 1907-1910) . . . . . „ 182
Sunti degli Atti verbali delle Adunanze della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 5
41, 62, 103, 119, 183, 239, 287, 381, 427, 469, 513, 695, 700, 817.
Sunti degli Atti verbali delle Adunanze della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche . . . . . „ 11
51, 83, 107, 179, 218, 277, 332, 419, 467, 481, 558, 595, 768, 979.
Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite . . 1, 55, 81, 379, 556, 699

Abello (Luigi) — Condizion giuridica delle confraternite di mero culto „ 769
Aimonetti (Cesare) — Determinazioni di gravità relativa in Piemonte eseguite coll'apparato pendolare di Sternek . . . . „ 383
Airaghi (Carlo) — V. Foà (Pio) e Camerano (Lorenzo).
Allievo (Giuseppe) — Espone il contenuto di un suo scritto: *La pedagogica di Emanuele Kant*, inserito nei volumi delle *Memorie* „ 13
— Il testamento filosofico di Herbert Spencer . . . . . „ 22
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un suo scritto col titolo: *La vita oltremondana* . . . . . „ 179
— Nominato membro della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia . . . . . „ 179
— Sunto di una memoria intitolata: *La vita oltremondana* . „ 180
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto del Dr. Stefano Grande, intitolato: *Il pensiero pedagogico di Ludovico Antonio Muratori* . . . . . „ 333
— e Carle (Giuseppe) — Relazione intorno la memoria presentata dal Dr. Stefano Grande col titolo: *Il pensiero pedagogico di L. A. Muratori* . . . . . „ 508
— Lo spirito e la materia nell'universo. L'anima ed il corpo nell'uomo . . . . . „ 560

Allievo (Giuseppe) — Oltre il mistero . . . . . *Pag.* 983
— e Chironi (Giampietro) — Relazione intorno alla memoria del Prof. Romualdo Bobba, intitolata: *Esame critico dell'opera del sig. Jules Gaultier, intitolata: " Da Kant a Nietzsche "* . . „ 1039
Balbi (Vittorio) — Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1904 . . . . . „ 733
— e Volta (Luigi) — Passaggi dei lembi della Luna e determinazione dell'ascensione retta del cratere Mösting A. osservati al Circolo meridiano di Torino negli anni 1901 e 1902 . „ 241
Bassani (Francesco) — Nominato Socio corrispondente . . . „ 819
Bazzi (Francesco) — Spigolature storiche sull'assedio di Verrua (1704-1705) . . . . . „ 1011
Beccari (Lodovico) — Sulla reazione dell'etere α-cianpropionico con l'aldeide benzoica . . . . . „ 547
— Ricerche sull'acido colico . . . . . „ 882
Begey (Maria) — V. Carle (Giuseppe) e Ferrero (Ermanno).
— Sunto della memoria: *Per un'opera inedita di Pietro Giannone* „ 506
Belli (Saverio) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
Belloni (Antonio) — Gli è conferito una metà del premio Gautieri per la Letteratura . . . . . „ 82
— Ringrazia per il conferitogli premio Gautieri . . . . „ 107
Bertana (Emilio) — Di una nuova estetica . . . . . „ 483
Biadego (Giuseppe) — Nominato Socio corrispondente . . „ 982
Bianchi (Luigi) e Segre (Corrado) — Relazione sulla memoria del Dr. Guido Fubini: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* „ 329
— Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni . . . . . „ 515
— Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi . . . . . „ 596
— Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali . „ 703
— V. Segre (Corrado).
Bisconcini (Giulio) — V. Morera (Giacinto) e Volterra (Vito).
Bizzozero (Enzo) — Sulla rigenerazione dell'epitelio intestinale nei pesci . . . . . „ 966
Bobba (Romualdo) — V. Allievo (Giuseppe) e Chironi (Giampietro).
Boeris (Giovanni) — Appunti di mineralogia piemontese . . „ 685
Boffito (Giuseppe) — Nominato Socio corrispondente . . „ 982
Boggio (Tommaso) — Sullo sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti . . . . . „ 171
— Risoluzione del problema generale dell'induzione elettrodinamica nel caso di un piano conduttore indefinito . . . . „ 448
Bollati di Saint-Pierre (Emanuele) — V. D'Ovidio (Enrico).
Bonfante (Pietro) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 982
Boselli (Paolo) — Riferisce verbalmente intorno ai lavori della sezione di Storia del diritto e delle istituzioni economiche sociali del Congresso internazionale di scienze storiche . „ 481
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557

Boselli (Paolo) — Eletto Vice Presidente dell'Accademia . . *Pag.* 699
— Breve commemorazione del Socio Luigi Cremona . . „ 979
— V. Peyron (Bernardino).

Bovero (Alfonso) e Calamida (Umberto) — V. Foà (Pio) e Camerano (Lorenzo).

Bréal (Michele) — Invitato a rappresentare l'Accademia al Congresso degli Orientalisti di Hanoï (Tonchino) declina l'incarico „ 11
— Eletto Socio straniero . . . . . „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio straniero . . . . „ 695

Brusa (Emilio) — Dà notizia della prima sentenza arbitrale pronunziata fra gli Stati Uniti d'America e gli Stati Uniti Messicani in conformità della *Convenzione per il regolamento pacifico dei conflitti internazionali* . . . . . „ 13
— Sulla responsabilità dello Stato nel diritto internazionale . „ 16
— Parole pronunziate sull'opera del Dr. Dionisio Anzilotti: *I mutamenti nei rapporti patrimoniali fra coniugi nel diritto internazionale privato* (Firenze, 1900). . . . . „ 51

Burali-Forti (Cesare) — Sul moto di un corpo rigido . . „ 155

Calamida (Umberto) — V. Bovero (A.) e Calamida (U.).

Camerano (Lorenzo) — Eletto Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 184
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un suo scritto, intitolato: *Ricerche intorno alla Talpa romana, Orfield Thomas, ed altre forme di talpe europee* . . . . . „ 818
— V. Foà (Pio) e Camerano (Lorenzo).
— V. Parona (Carlo Fabrizio) e Camerano (L.).

Campetti (Adolfo) — Sul calore di dissociazione elettrolitica . „ 64
— Sulla differenza di potenziale tra liquidi e gas . . . „ 718

Carle (Giuseppe) — Nominato membro della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . „ 84
— Nominato membro della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia . . . . . „ 179
— Presentando il libro del Prof. Vincenzo Lilla: *Manuale di filosofia del diritto* (Milano, 1903), ne espone brevemente il contenuto ed i pregi . . . . . „ 219
— e Ferrero (Ermanno) — Presentano per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro della signorina Maria Begey, intitolato: *Per un'opera inedita di Pietro Giannone* „ 467
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— V. Allievo (Giuseppe) e Carle (Giuseppe).

Chironi (Giampietro) — Di una petizione intorno al divorzio presentata alla Camera francese . . . . . „ 33
— Nominato membro della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia . . . . . „ 179

Chironi (Giampietro) — Parole pronunziate presentando 10 pubblicazioni giuridiche del Dr. Guido Bonolis . . . . *Pag.* 419
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto del prof. Romualdo Bobba, intitolato: *Esame critico dell'opera del sig. Jules Gaultier, intitolata: Da Kant a Nietzsche* „ 420
— V. Allievo (Giuseppe) e Chironi (Giampietro).
Ciamician (Giacomo) — Nominato Socio corrispondente . . „ 819
Cian (Vittorio) — Nominato Socio corrispondente . . . „ 982
Cipolla (Carlo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto del signor Domenico Valla, intitolato: *Il Collegio Puteano* . . . . . „ 467
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— e Ferrero (Ermanno) — Relazione intorno alla Memoria del Dr. Domenico Valla, intitolata: *Vita di Carlo Antonio Dal Pozzo, arcivescovo di Pisa, fondatore del Collegio Puteano* . . „ 593
Claretta (Gaudenzio) — V. Ferrero (Ermanno).
Colonna (Ettore) — Composizione chimica di una cenere del Monte Pelée (Martinica) . . . . . „ 471
Cossa (Alfonso) — V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Salvadori (Tommaso).
— V. Ferrero (Ermanno).
— V. Guareschi (Icilio).
Cremona (Luigi) — V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Boselli (Paolo).
Damour (Agostino Alessio) — V. D'Ovidio (Enrico).
Darboux (G. Gastone) — Eletto Socio straniero . . . . . „ 819
De Alessandri (Giulio) — Sopra alcuni avanzi di Cervidi pliocenici del Piemonte . . . . . „ 845
De-Sanctis (Gaetano) — Eletto Socio nazionale residente . . „ 982
Dewar (Giacomo) — Nominato Socio corrispondente . . . „ 819
D'Ovidio (Enrico) — Parole pronunziate ai funerali del Presidente Alfonso Cossa . . . . . „ 2
— Partecipa la morte del Socio nazionale non residente Riccardo Felici, del Socio straniero Rodolfo Virchow e del Socio corrispondente Agostino Alessio Damour . . . . . „ 41
— Eletto alla carica triennale di Presidente . . . . . „ 56
— Comunica il R. Decreto che lo conferma nella carica di Presidente 183, 218
— A nome del Socio Naccari presenta per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche un lavoro del Prof. Antonio Garbasso, intitolato: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce* . „ 184
— Partecipa la morte del Socio corrispondente Eugenio Rendu „ 218
— Annunzia la morte del Socio straniero Giorgio Gabriele Stokes „ 287
— Comunica una lettera del Socio Vito Volterra colla quale rende conto dell'opera sua come rappresentante dell'Accademia alla commemorazione del P. Angelo Secchi . . . . . „ 381

D'Ovidio (Fnrico) — Comunicazione del R. Decreto che approva la nomina del Socio Lorenzo Camerano a Segretario della Classe *Pag.* 381
— Annunzia la morte del Socio straniero Gastone Paris . . „ 419
— Annunzia la morte del Vice Presidente Prof. Bernardino Peyron „ 595
— Parole pronunziate ai funerali del Vice Presidente Bernardino Peyron . . . . . „ 696
— Comunica la lettera d'invito del Comitato ad assistere all'inaugurazione di un monumento a Kekulé in Bonn . . „ 700
— Comunica la scheda di sottoscrizione per un ricordo da erigersi in Pisa al prof. A. D'Acchiardi . . . . . „ 700
— Partecipa la morte del Socio Emanuele Bollati di Saint-Pierre e ne ricorda i meriti . . . . . „ 768
— Comunica l'invito di un Comitato costituitosi in Bari per commemorare il rimpianto Socio Salvatore Cognetti de Martiis „ 768
— Annunzia la morte del Socio nazionale non residente Luigi Cremona . . . . . „ 817
— Comunica una lettera del Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma circa alle onoranze da tributarsi al compianto prof. Senatore Luigi Cremona . . . . . „ 817
— Luigi Cremona. Cenno necrologico . . . . . „ 821
D'Ovidio (Francesco) — Gli si conferisce una metà del premio Gautieri per la Letteratura . . . . . „ 82
— Ringrazia per il conferitogli premio Gautieri . . . 103, 107
— Nominato Socio corrispondente . . . . . „ 982
Felici (Riccardo) — V. D'Ovidio (Enrico).
Ferrero (Efisio) — Le condizioni climatiche di Torino durante l'anno 1902 . . . . . „ 629
Ferrero (Ermanno) — Annunzia la morte del Presidente Alfonso Cossa „ 1
— Annunzia la morte del Socio nazionale non residente Gian Giacomo Reymond . . . . . „ 11
— Trattiene la Classe sul libro del sig. Arthur Macdonald: *A plan for the Study of man* (Washington, 1902) . . . . . „ 13
— Nominato membro della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . . . . „ 84
— Gaudenzio Claretta - Parole commemorative . . . . „ 279
— Una nuova iscrizione d'Industria . . . . . „ 421
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— Spada di bronzo scoperta nella Moriana . . . . . „ 585
— V. Cipolla (Carlo) e Ferrero (Ermanno).
Fiorese (Sabino) — Incaricato di rappresentare l'Accademia alle onoranze che si tributeranno in Bari al compianto Socio Salvatore Cognetti de Martiis . . . . . „ 768
Foà (Pio) — Legge la commemorazione di Rodolfo Virchow che è pubblicata nei volumi delle *Memorie*. . . . . „ 42
— Nominato membro della 1ª Giunta per il premio Bressa . „ 240
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto dei Dottori Alfonso Bovero e Umberto Calamida,

intilolato: *Canali venosi emissari temporali squamosi e petrosquamosi* . . . . . *Pag.* 428
Foà (Pio) e Camerano (Lorenzo) — Relazione sulla memoria dei dottori Alfonso Bovero e Umberto Calamida, intitolata: *Canali venosi emissari temporali squamosi e petrosquamosi* . . „ 477
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
Fubini (Guido) — Sulla teoria degli spazii che ammettono un gruppo conforme . . . . . „ 404
— V. Bianchi (Luigi) e Segre (Corrado).
Gandino (Gio. Battista) — Eletto Socio nazionale non residente „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio nazionale non residente „ 768
Gatti (Enrico) — Proprietà relativa ad una speciale forma di prisma rifrangente . . . . . „ 301
Gerini (G. B.) — L'educazione fisica secondo alcuni pedagogisti italiani del secolo XIX . . . . . „ 334
Giacosa (Piero) — Comportamento dell'ossido di carbonio nell'organismo „ 864
Giambelli (Gio. Zeno) — Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche . . . . . „ 823
Giri (Ugo) — Valeriano juniore e Salonino Valeriano . . „ 1023
Giudice (Francesco) — Sulla integrazione per sostituzione . „ 962
Gloria (Andrea) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 982
Graf (Arturo), Peyron (Bernardino) e Renier (Rodolfo) — Relazione della Commissione per il premio Gautieri di Letteratura (triennio 1899-1901) . . . . . „ 57
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto della signorina Emilia Regis, intitolato: *Studio intorno alla vita di Carlo Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite* . . . . . „ 467
— e Renier (Rodolfo) — Relazione sopra uno scritto della dott. Emilia Regis, intitolato: *Studio intorno alla vita di Carlo Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite* . . „ 511
Grande (Stefano) — V. Allievo (Giuseppe) e Carle (Giuseppe).
Grassi (Guido) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo scritto, intitolato: *Sugli effetti della dispersione e della reattanza nel funzionamento dei trasformatori a corrente alternata* . . . . . „ 239
— Nominato membro della Giunta del premio Vallauri . . „ 240
Guareschi (Icilio) — Incaricato della biografia del Presidente Alfonso Cossa . . . . . „ 5
— Parole pronunziate facendo omaggio all'Accademia del suo scritto: *Faustino Malaguti e le sue opere* . . . . . „ 42
— Nominato membro della Giunta per la Biblioteca . . „ 63
— Condensazione delle aldeidi coll'etere cianacetico . . „ 290
— Legge la commemorazione del defunto Presidente Cossa, la quale è inserita nelle *Memorie* accademiche . . . . . „ 379
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— Acidi 1.2diidroftalici esasostituiti . . . . . „ 750

HELMERT (F. Roberto) — Eletto Socio straniero . . . . *Pag.* 819
HILBERT (Davide) — Nominato Socio corrispondente . . . „ 819
JADANZA (Nicodemo) — Informa l'Accademia che il Dr. Giacomo POLLINI, con suo testamento 19 ottobre 1902 legava all'Accademia un'annua rendita di L. 250 per un premio da conferirsi da essa „ 380
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un suo scritto, intitolato: *Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di Teleobbiettivo* . . . . . „ 382
— Esposizione finanziaria per il passato esercizio 1902 e bilancio preventivo per l'anno in corso . . . . . „ 556
JANNACCONE (Pasquale) — Di un economista piemontese del sec. XVIII (Donaudi delle Mallere). A proposito di alcuni suoi manoscritti inediti . . . . . „ 352
JORIO (Carlo) — Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri . . . . . „ 656
ISSEL (Arturo) — Nominato socio corrispondente. . . . . „ 819
KLEBS (Giorgio) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
LORENTZ (Enrico) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
MANNO (Antonio) — Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . . . . . „ 557
— Nominato membro della Giunta per la Biblioteca . . „ 981
MARCHAND (Felice) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
MARONI (Arturo) — Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi . . . . . „ 149
MASCI (Filippo) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 982
MASSA (CARLO) — Direttore della Scuola di Commercio in Bari incaricato di rappresentare l'Accademia alle onoranze che si tributeranno al compianto Socio Salvatore COGNETTI DE MARTIIS „ 768
MATTIROLO (Oreste) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo scritto, intitolato: *I funghi ipogei italiani raccolti da O. Beccari, L. Caldesi, A. Carestia, V. Cesati e P. A. Saccardo* . . . . . „ 428
MAYER (Adolfo) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
MOISSAN (Enrico) — Eletto Socio straniero . . . . . „ 819
MORERA (Giacinto) — Sulle equazioni dinamiche di Lagrange . „ 121
— e NACCARI (Andrea) — Relazione sulla Memoria del prof. Antonio GARBASSO, intitolata: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce* . . . . . „ 276
— Presenta a nome del Socio Vito VOLTERRA per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche, uno scritto del sig. Giulio BISCONCINI, intitolato: *Sulle vibrazioni delle membrane elastiche* „ 382
— e VOLTERRA (Vito) — Relazione sulla memoria del Dr. Giulio BISCONCINI, intitolata: *Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri* . . . „ 767
— I sistemi canonici d'equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni . . . . . „ 940
— V. SEGRE (Corrado) e MORERA (Giacinto).

Mosso (Angelo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo scritto, intitolato: *Fisiologia dell' apnea studiata nell'uomo* 514, 701, 702
Naccari (Andrea) — Breve commemorazione del Socio straniero Giorgio Gabriele Stokes . . . . . *Pag.* 287
— Comunica la Relazione della 1ª Giunta per il XIII premio Bressa (quadriennio 1899-1902) . . . . . „ 557
— Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . „ 557
— V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Morera (Giacinto) e Naccari (Andrea).
Nigra (Costantino) — Eletto Socio nazionale non residente . „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio nazionale non residente „ 695
Novati (Francesco) — Nominato Socio corrispondente . . . „ 982
Ovazza (Elia) — Metodo grafico di calcolo degli alberi a gomito con più di due appoggi . . . . . „ 751
Palatini (Francesco) — Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria con la somma di potenze di forme lineari . . . . . „ 43
Panichi (Ugo) — Contributi alla cristallografia zonale. L' omologia e la cristallografia zonale . . . . . „ 135
Paris (Gastone) — V. D'Ovidio (Enrico).
Parona (Carlo Fabrizio) — Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a brachiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lauriano . . . . . „ 104
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche uno scritto del Dr. Carlo Airaghi, intitolato: *Echinidi della scaglia cretacea veneta* . . . . . „ 428
— e Camerano (Lorenzo) — Relazione sulla memoria: *Echinidi della scaglia cretacea veneta*, del Dr. Carlo Airaghi . . „ 476
Peano (Giuseppe) — La Geometria basata sulle idee di punto e distanza . . . . . „ 6
— Presenta il 4° volume del suo *Formulaire mathématique* . „ 469
Peyron (Bernardino) — Partecipa che il Socio Paolo Boselli fece dono all'Accademia di 953 volumi e di circa 3700 opuscoli „ 81
— Nominato membro della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . . . . „ 84
— V. Graf (Arturo), Peyron (Bernardino) e Renier (Rodolfo).
— V. D'Ovidio (Enrico).
Pezzi (Domenico) — Nominato membro della Commissione per il premio Vallauri di critica della letteratura latina . . „ 84
Piccini (Augusto) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
Piccinini (Galeazzo) — Condensazione dell'etere cianacetico coll'aldeide ed il piperonalio . . . . . „ 894
Pizzetti (Paolo) — Sopra alcune equazioni fondamentali del problema degli *n* corpi . . . . . „ 954
— Nominato Socio corrispondente . . . . . „ 819

Pizzi (Italo) — Il trattato persiano " Esposizione delle Religioni „ di Abû 'l Maâli . . . . . *Pag.* 221
Poincaré (G. Enrico) — Eletto Socio straniero . . . . . „ 819
Ponzio (Giacomo) — Sulla costituzione dei cosidetti dinitroidrocarburi primarî R . CHN_2O_4 . . . . . „ 76
— Su un nuovo metodo di preparazione degli acidi nitrolici . „ 201
Porena (Filippo) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 982
Rajna (Pio) — Eletto Socio nazionale non residente . . . . „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio nazionale non residente „ 695
Regis (Domenico) — Sulla prospettiva parallela . . . . . „ 315
Regis (Maria) — V. Graf (Arturo) e Renier (Rodolfo).
Rendu (Eugenio) — V. D'Ovidio (Enrico).
Renier (Rodolfo) — V. Graf (Arturo), Peyron (Bernardino) e Renier (Rodolfo).
— V. Graf (Arturo) e Renier (Rodolfo).
Ricca-Barberis (Mario) — Sugli effetti della disposizione relativa al proprio cadavere . . . . . „ 999
Rizzo (G. B.) — Sopra il calcolo della Costante solare . . . „ 612
— Contributo allo studio della dispersione elettrica nell'atmosfera „ 859
Roccati (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle del Sabbione) . . . . . „ 429
— Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle della Meris e Rocca Val Miana) . . . . . „ 929
Röntgen (G. Corrado) — Nominato Socio corrispondente . . „ 819
Rossi (Vittorio) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 982
Ruffini (Francesco) — Teoria e pratica della conquista nel diritto antico. A proposito di alcuni recenti scritti di Ireneo Lameire „ 586
— Eletto Socio nazionale residente . . . . . „ 981
Salvadori (Tommaso) — Accenna alla perdita fatta dall'Accademia nella persona del suo Presidente Alfonso Cossa . . . „ 5
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo scritto, intitolato: *Contribuzione all'Ornitologia delle isole del Golfo di Guinea;* Parte I: *Uccelli dell'Isola del Principe* „ 62
— — Parte II: *Uccelli di S. Tomé* . . . . . „ 184
— — Parte III: *Uccelli di Annobom e di Fernando Po* . . . „ 382
Savio (Fedele) — Le origini della diocesi di Tortona . . . „ 85
Scialoja (Vittorio) — Eletto Socio nazionale non residente . „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio nazionale non residente „ 695
Segre (Arturo) — Emanuele Filiberto in Germania e le ultime relazioni del Duca Carlo II di Savoia con Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto (1544-1546) . . . . . „ 788
Segre (Corrado) — A nome del Socio nazionale non residente Luigi Bianchi presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Dr. Guido Fubini, intitolato: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* . . . . . „ 103
— Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidea . . . . . „ 535

Segre (Corrado) e Morera (Giacinto) — Relazione sulla memoria del Dr. Francesco Severi, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie* Pag. 764
— V. Bianchi (Luigi) e Segre (Corrado).
Severi (Francesco) — Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica . . . . . „ 185
— V. Segre (Corrado) e Morera (Giacinto).
Silvestri (Alfredo) — Alcune osservazioni sui Protozoi fossili piemontesi . . . . . „ 260
Spezia (Giorgio) — Nominato membro della 2ª Giunta per il premio Bressa . . . . . „ 557
— Sull'anidrite micaceo-dolomitica e sulle roccie decomposte della frana del traforo del Sempione . . . . . „ 921
Stokes (Giorgio Gabriele) — V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Naccari (Andrea).
Valla (Domenico) — V. Cipolla (Carlo) e Ferrero (Ermanno).
Valmaggi — Per la novella nell'antichità . . . . . „ 424
Virchow (Rodolfo) — V. D'Ovidio (Enrico).
Vislicenus (Giovanni) — Partecipazione della morte . . . . „ 62
Volta (Luigi) — V. Balbi (Vittorio) e Volta (Luigi).
Volterra (Vito) — Accetta l'incarico di rappresentare l'Accademia alle feste centenarie in onore di Henrik Abel in Cristiania „ 41
— V. D'Ovidio (Enrico).
— V. Morera (Giacinto).
— V. Morera (Giacinto) e Volterra (Vito).
Wiesner (Giulio) — Nominato Socio corrispondente . . . . „ 819
Wundt (Guglielmo) — Eletto Socio straniero . . . . . „ 468
— Ringrazia per la sua nomina a Socio straniero . . . . „ 695
Zannoni (Giovanni) — Federico II di Montefeltro e G. A. Campano „ 108
Zeuthen (G. Giorgio) — Nominato Socio corrispondente . . „ 819

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

N. Y. Academy
Of Sciences

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 1ª E 2ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Elenco degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 25 Gennaio 1903 . . . . . *Pag.* III

Classi Unite.

ADUNANZA del 16 Novembre 1902 . . . . . *Pag.* 1

D'Ovidio (Enrico) — Parole pronunziate ai funerali del Presidente Alfonso Cossa . . . . . „ 2

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 16 Novembre 1902 . . . . . *Pag.* 5

Peano (Giuseppe) — La Geometria basata sulle idee di punto e distanza . . . . . „ 6

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 23 Novembre 1902 . . . . . *Pag.* 11

Brusa (Emilio) — Sulla responsabilità dello Stato nel diritto internazionale . . . . . „ 16

Allievo (Giuseppe) — Il testamento filosofico di Herbert Spencer „ 22

Chironi (Giampietro) — Di una petizione intorno al divorzio presentata alla Camera francese . . . . . „ 33

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 30 Novembre 1902 . . . . . „ 41

Palatini (Francesco) — Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria con la somma di potenze di forme lineari . . . . . „ 43

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 7 Dicembre 1902 . . . . . *Pag.* 51

Tip. Vincenzo Bona — Torino

Of Sciences

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 3ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classi Unite.

ADUNANZA del 14 Dicembre 1902 . . . . . *Pag.* 55

Graf (Arturo) — Relazione della Commissione per il premio Gautieri di Letteratura (triennio 1899-1901) . . . . . „ 57

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 14 Dicembre 1902 . . . . . *Pag.* 62

Campetti (Adolfo) — Sul calore di dissociazione elettrolitica . „ 64

Ponzio (Giacomo) — Sulla costituzione dei cosidetti dinitroidrocarburi primari $R.CHN_2O_4$ . . . . . „ 76

Classi Unite.

ADUNANZA del 21 Dicembre 1902 . . . . . „ 81

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 21 Dicembre 1902 . . . . . *Pag.* 83

Savio (Fedele) — Le origini della diocesi di Tortona . . . „ 85

Premii di Fondazione Gautieri . . . . . „ 102

Tip. Vincenzo Bona — Torino

Of Sciences

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 4ª E 5ª, 1902-903.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 28 Dicembre 1902 . . . . . *Pag.* 103

PARONA (Carlo Fabrizio) — Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a brachiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lauriano . . . . . „ 104

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 4 Gennaio 1903 . . . . . *Pag.* 107

ZANNONI (Giovanni) — Federico II di Montefeltro e G. A. Campano „ 108

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'11 Gennaio 1903 . . . . . „ 119

MORERA (Giacinto) — Sulle equazioni dinamiche di Lagrange . „ 121

PANICHI (Ugo) — Contributi alla cristallografia zonale. L'omologia e la cristallografia zonale. Nota 1ª . . . . . „ 135

MARONI (Arturo) — Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi . . . . . „ 149

BURALI-FORTI (Cesare) — Sul moto di un corpo rigido . . . „ 155

BOGGIO (Tommaso) — Sullo sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti . . . . . „ 171

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 18 Gennaio 1903 . . . . . *Pag.* 179

ALLIEVO (Giuseppe) — Sunto di una memoria intitolata: *La vita oltremondana* . . . . . „ 180

PROGRAMMA per il XIV Premio BRESSA . . . . . „ 181

PROGRAMMA dei Premi di Fondazione VALLAURI pei quadrienni 1903-1906 e 1907-1910 . . . . . „ 182

Tip. Vincenzo Bona — Torino

Of Sciences

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 6ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 25 Gennaio 1903 . . . . . *Pag.* 183

Severi (Francesco) — Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica . . . . . „ 185

Ponzio (Giacomo) — Su un nuovo metodo di preparazione degli acidi nitrolici . . . . . „ 201

Silvestri (Alfredo) — Alcune osservazioni sui Protozoi fossili piemontesi . . . . . „ 206

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 1° Febbraio 1903 . . . . . *Pag.* 218

Pizzi (Italo) — Il trattato persiano " Esposizione delle Religioni „ di Abû 'l Maâli . . . . . „ 221

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 7ª, 1902-903.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'8 Febbraio 1903 . . . . . *Pag.* 239

BALBI (Vittorio) e VOLTA (Luigi) — Passaggi dei lembi della Luna e determinazione dell'ascensione retta del cratere Mösting A. osservati al Circolo meridiano di Torino negli anni 1901 e 1902 „ 241

MORERA (Giacinto) — Relazione sulla Memoria del prof. Antonio GARBASSO, intitolata: *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce* . . . . . „ 276

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 15 Febbraio 1903 . . . . . *Pag.* 277

FERRERO (Ermanno) — Gaudenzio Claretta - Parole commemorative „ 279

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 8ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 22 Febbraio 1903 . . . . . *Pag.* 287

Guareschi (Icilio) — Condensazione delle aldeidi coll'etere cianacetico. Nota II . . . . . „ 290

Gatti (Enrico) — Proprietà relativa ad una speciale forma di prisma rifrangente . . . . . „ 301

Regis (Domenico) — Sulla prospettiva parallela . . . . . „ 314

Bianchi (Luigi) — Relazione sulla memoria del Dr. Guido Fubini: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* . . . . . „ 329

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 1° Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 332

Gerini (G. B.) — L'educazione fisica secondo alcuni pedagogisti italiani del secolo XIX . . . . . „ 334

Jannaccone (Pasquale) — Di un economista piemontese del sec. XVIII (Donaudi delle Mallere). A proposito di alcuni suoi manoscritti inediti . . . . . „ 352

Tip. Vincenzo Bona — Torino

Copy

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 9ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classi Unite.

ADUNANZA dell'8 Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 379

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'8 Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 381

Aimonetti (Cesare) — Determinazioni di gravità relativa in Piemonte eseguite coll'apparato pendolare di Sternek . . . . „ 383

Fubini (Guido) — Sulla teoria degli spazii che ammettono un gruppo conforme . . . . . „ 404

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 15 Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 419

Ferrero (Ermanno) — Una nuova iscrizione d'Industria . . „ 421

Valmaggi — Per la novella nell'antichità . . . . . „ 424

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 10ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 22 Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 427

Roccati (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle del Sabbione) . . . . . „ 429

Boggio (Tommaso) — Risoluzione del problema generale dell'induzione elettrodinamica nel caso di un piano conduttore indefinito „ 448

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 29 Marzo 1903 . . . . . *Pag.* 467

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 11ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 5 Aprile 1903 . . . . . *Pag.* 469

Colonna (Ettore) — Composizione chimica di una cenere del Monte Pelée (Martinica) . . . . . „ 471

Parona (Carlo Fabrizio) — Relazione sulla memoria: *Echinidi della scaglia cretacea veneta*, del Dott. Carlo Airaghi . . . „ 476

Foà (Pio) — Relazione sulla memoria dei dottori Alfonso Bovero e Umberto Calamida, intitolata: *Canali venosi emissari temporali squamosi e petrosquamosi*. Ricerche morfologiche . . . „ 477

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 19 Aprile 1903 . . . . . *Pag.* 481

Bertana (Emilio) — Di una nuova estetica . . . . . „ 483

Sunto della memoria della Prof.ª Maria Begey: *Per un'opera inedita di Pietro Giannone* . . . . . „ 506

Allievo (Giuseppe) — Relazione intorno la memoria presentata dal Dr. Stefano Grande col titolo: *Il pensiero pedagogico di L. A. Muratori* . . . . . „ 508

Graf (Arturo) — Relazione sopra uno scritto della Dott. Emilia Regis, intitolato: *Studio intorno alla vita di Carlo Botta* . . . „ 511

Tip. Vincenzo Bona — Torino

OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXXVIII, DISP. 12ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 26 Aprile 1903 . . . . . *Pag.* 513

Bianchi (Luigi) — Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi ed alle loro trasformazioni . . . . . „ 515

Segre (Corrado) — Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidea „ 535

Beccari (Lodovico) — Sulla reazione dell'etere α-cianpropionico con l'aldeide benzoica . . . . . „ 547

Classi Unite.

ADUNANZA del 3 Maggio 1903 . . . . . „ 556

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 3 Maggio 1903 . . . . . *Pag.* 558

Allievo (Giuseppe) — Lo spirito e la materia nell'universo. L'anima ed il corpo nell'uomo . . . . . „ 560

Ferrero (Ermanno) — Spada di bronzo scoperta nella Moriana „ 585

Ruffini (Francesco) — Teoria e pratica della conquista nel diritto antico. A proposito di alcuni recenti scritti di Ireneo Lameire „ 586

Cipolla (Carlo) — Relazione intorno alla Memoria del Dr. Domenico Valla, intitolata: *Vita di Carlo Antonio Dal Pozzo, arcivescovo di Pisa, fondatore del Collegio Puteano* . . . . . „ 593

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 13ª, 1902-903.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 10 Maggio 1903 . . . . . *Pag.* 595

Bianchi (Luigi) — Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi . . . . . „ 596

Rizzo (G. B.) — Sopra il calcolo della Costante solare . . . „ 612

Ferrero (Efisio) — Le condizioni climatiche di Torino durante l'anno 1902 . . . . . „ 629

Jorio (Carlo) — Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri . . . . . „ 656

Boeris (Giovanni) — Appunti di mineralogia piemontese . . „ 685

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 17 Maggio 1903 . . . . . *Pag.* 695

D'Ovidio (Enrico) — Parole pronunziate ai funerali del Vice presidente Bernardino Peyron . . . . . „ 696

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 14ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classi Unite.

ADUNANZA del 24 Maggio 1903 . . . . . „ 699

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 24 Maggio 1903 . . . . . *Pag.* 700

Bianchi (Luigi) — Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali . . . . . „ 703

Campetti (Adolfo) — Sulla differenza di potenziale tra liquidi e gas „ 718

Balbi (Vittorio) — Effemeridi del Sole, della Luna e dei principali Pianeti per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1904 . . . „ 733

Guareschi (Icilio) — Acidi 1.2diidroftalici esasostituiti . . . „ 750

Ovazza (Elia) — Metodo grafico di calcolo degli alberi a gomito con più di due appoggi . . . . . „ 751

Segre (Corrado) — Relazione sulla memoria del Dott. Francesco Severi, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie* . . . . . „ 764

Morera (Giacinto) — Relazione sulla memoria del Dr. Giulio Bisconcini, intitolata: *Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri* . . . . . „ 767

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 31 Maggio 1903 . . . . . „ 768

Abello (Luigi) — Condizion giuridica delle confraternite di mero culto . . . . . „ 769

Segre (Arturo) — Emanuele Filiberto in Germania e le ultime relazioni del Duca Carlo II di Savoia con Alfonso d'Avalos, marchese del Vasto (1544-1546) . . . . . „ 788

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXXVIII, Disp. 15ª, 1902-903.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1903

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 14 Giugno 1903 . . . . . *Pag.* 817

D'Ovidio (Enrico) — Luigi Cremona. Cenno necrologico . . . „ 821

Giambelli (Giovanni Zeno) — Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche . . . . . „ 823

De Alessandri (Giulio) — Sopra alcuni avanzi di Cervidi Pliocenici del Piemonte . . . . . „ 845

Rizzo (G. B.) — Contributo allo studio della dispersione elettrica nell'atmosfera . . . . . „ 859

Giacosa (Piero) — Sul comportamento dell'ossido di carbonio nell'organismo . . . . . „ 864

Beccari (Lodovico) — Ricerche sull'acido colico . . . . . „ 882

Piccinini (Galeazzo) — Condensazione dell'etere cianacetico con l'aldeide cinnamica ed il piperonalio . . . . . „ 894

Spezia (Giorgio) — Sulla anidrite micaceo-dolomitica e sulle rocce decomposte della frana del traforo del Sempione . . . „ 921

Roccati (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle valli del Gesso (Valle della Meris e Rocca Val Miana) . . . . . „ 929

Morera (Giacinto) — I sistemi canonici d'equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni . . . „ 940

Pizzetti (Paolo) — Sopra alcune equazioni fondamentali nel problema degli *n* corpi . . . . . „ 954

Giudice (Francesco) — Sulla integrazione per sostituzione . „ 962

Bizzozero (Enzo) — Sulla rigenerazione dell'epitelio intestinale nei pesci . . . . . „ 966

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

ADUNANZA del 21 Giugno 1903 . . . . . „ 979

Allievo (Giuseppe) — Oltre il mistero . . . . . „ 983

Ricca-Barberis (Mario) — Sugli effetti della disposizione relativa al proprio cadavere . . . . . „ 999

Bazzi (Francesco) — Spigolature storiche sull'assedio di Verrua, 1704-1705 . . . . . „ 1011

Giri (Ugo) — Valeriano iuniore e Salonino Valeriano . . . „ 1023

Allievo (Giuseppe) — Relazione intorno la memoria presentata dal prof. Romualdo Bobba col titolo: *Esame storico-critico dell'opera del signor Jules De Gaultier, intitolata: 'Da Kant a Nietzsche'* . „ 1039

Indice . . . . . „ 1041

Tip. Vincenzo Bona — Torino

38 1902-3

23 1936

37

DEC 5 1969

AMNH LIBRARY
100125258